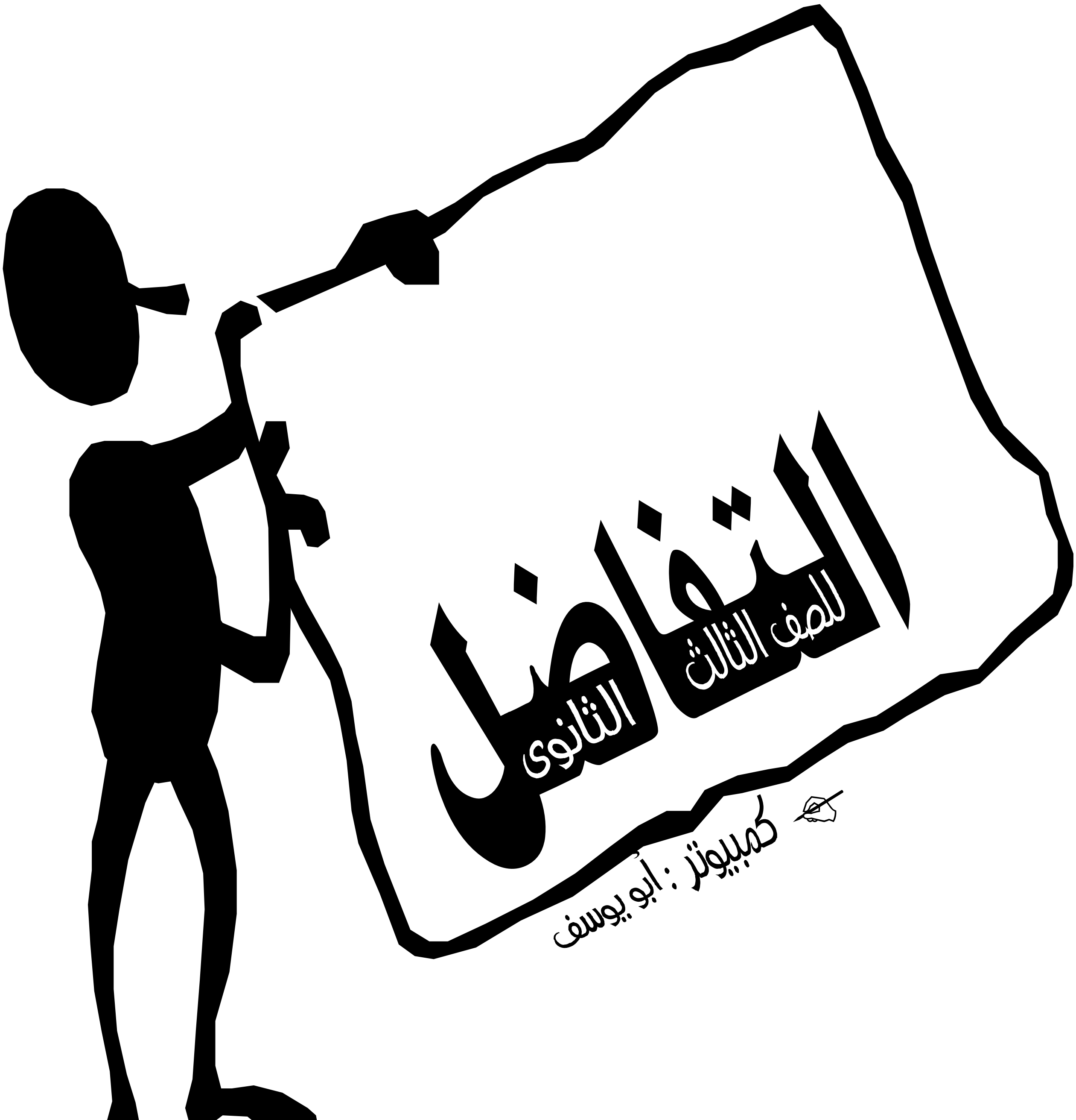
للصف الثالث الثانوي

تفاضل وتكامل



للصف الثالث الثانوي

بسم الله الرحمن الرحيم

وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ
عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صدق الله العظيم

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين .. والصلاة والسلام على أشرف المرسلين

أعزائى طلبة وطالبات الصف الثالث الثانوى

يسعدنى أن أقدم لكم هذا الجهد المتواضع .. متمنيا لكم التفوق

والنجاح بإذن الله ...

والله ولى التوفيق ..

المؤلف ،،

دعاء بدء المذاكرة

اللهم إنى أسألك فهم النبيين وحفظ المرسلين .. وإلهام الملائكة المقربين..اللهم اجعل لسانى عامراً بذكرك وقلبى بخشيتك ..وجسدى بطاعتك .. إنك على كل شئ قدير

دعاء نهاية المذاكرة

اللهم إنى استودعتك ما قرأت وما فهمت وما حفظت فرده علىّ عند حاجتى إليه إنك على كل شئ قدير

مراجعة على بعض قوانين النهايات

بعض نظريات سبق دراستها في العام السابق :.

١) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) = د (أ)

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ [د (س) ± ر(س)] = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) ± $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ر(س)

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) × ر(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) × $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ر(س)

٤) $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\ أ^{ن - ١}$ **نظرية**

٥) $\lim\limits_{س \leftarrow أ} \dfrac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \dfrac{ن}{م}\ أ^{ن - م}$ **نتيجة**

٦) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{جا\ س}{س} = ١$

٧) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{جا\ أ\ س}{ب\ س} = \dfrac{أ}{ب}$

٨) $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{ظا\ أ\ س}{ب\ س} = \dfrac{أ}{ب}$

٩) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ جا س = جا أ

١٠) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ جتا س = جتا أ

ملاحظة هامة :. $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ د (س) إما أن تكون

١) كمية معينة ٢) كمية غير معينة ٣) ليس لها وجود (غير معرفة)

أمثلة محلولة :-

أوجد قيمة النهايات الآتية :-

١) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ س^٣ + ٥ س^٢ ـ ٤ س +٥

الإجابة

نوجد د (٢) = ٨ + ٢٠ ـ ٨ + ٥ = ٢٥

∴ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ س^٣ + ٥ س^٢ ـ ٤ س + ٥ = **٢٥**

٢) $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ + ٥ س ـ ٣}{س + ٢}$

الإجابة

نوجد د (٣) = $\frac{٩ + ١٥ ـ ٣}{٣ + ٢} = \frac{٢١}{٥}$

∴ $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^٢ + ٥ س ـ ٣}{س + ٢} = \frac{٢١}{٥}$

٣) $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٢ ـ ٤ س + ٩}{س^٢ ـ ٤}$

الإجابة

نوجد د (٢) = $\frac{٤ ـ ٨ + ٩}{٤ ـ ٤} = \frac{٥}{٠}$ **ليس لها معنى**

∴ $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٢ ـ ٤ س + ٩}{س^٢ ـ ٤}$ **ليس لها وجود**

٤) $\underset{س \leftarrow -٣}{نهـا} \dfrac{س^٢ + ٨ س + ١٥}{س^٢ - ٤ س - ٢١}$

الإجابة نوجد د (ـ ٣) = $\dfrac{٠}{٠}$ **كمية غير معينة**

$\therefore \underset{س \leftarrow -٣}{نهـا} \dfrac{س^٢ + ٨ س + ١٥}{س^٢ - ٤ س - ٢١} = \underset{س \leftarrow -٣}{نهـا} \dfrac{(س + ٣) (س + ٥)}{(س + ٣) (س - ٧)}$

$= \underset{س \leftarrow -٣}{نهـا} \dfrac{(س + ٥)}{(س - ٧)} = \dfrac{-١}{٥}$

٥) $\underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \dfrac{س^٤ - ٦٢٥}{س - ٥}$

الإجابة نوجد د (٥) = $\dfrac{٠}{٠}$ **كمية غير معينة**

$\therefore \underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \dfrac{س^٤ - ٦٢٥}{س - ٥} = \underset{س \leftarrow ٥}{نهـا} \dfrac{س^٤ - ٥^٤}{س - ٥} = ٤ \; (٥)^٣ = ٥٠٠$

٦) $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \dfrac{(٢ + هـ)^٥ - ٣٢}{٤ \; هـ}$

الإجابة لحل هذه المسألة نستخدم التعويض بوضع **٢ + هـ = و**

وعندما هـ ← ٠ فإن و ← ٢ وتكون **هـ = و - ٢**

$$\therefore \underset{هـ \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{(2 + هـ)^5 - 32}{4\, هـ} = \underset{و \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{و^5 - 2^5}{4\,(و - 2)} = \frac{1}{4} \underset{و \to 2}{\text{نهـــا}} \frac{و^5 - 2^5}{و - 2}$$

$$= \frac{1}{4} \times 5\,(2)^4 = 20$$

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة

إذا كانت $د(س) = \begin{cases} 7\,س + 2 & س < 1 \\ س^2 - 6 & س \geq 1 \end{cases}$

الدالة هنا معرفة بقاعدتين إحداهما على يمين الواحد والأخرى على يسار الواحد .

$7\,س + 2$		$س^2 - 6$
$س < 1$	1	$س \geq 1$

لذلك يوجد لها نهايتين إحداهما يمنى ويرمز لها د (1^+) والأخرى يسرى ويرمز لها د (1^-) وتكون د (1^+) $= \underset{س \to 1^+}{\text{نهـــا}}$ د (س)

، د (1^-) $= \underset{س \to 1^-}{\text{نهـــا}}$ د (س)

نظرية :-

الدالة د (س) تكون لها نهاية ولتكن ل عندما س ← أ إذا وفقط إذا كانت نهايتاها اليمنى واليسرى موجودتين وكل منهما = ل

∴ الشروط الواجب توافرها لكي تكون النهاية موجودة هي :-

١) د (أ⁺) لها وجود   ٢) د (أ⁻) لها وجود

٣) د (أ⁺) = د (أ⁻)

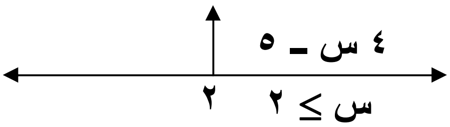
ملحوظات :ـ

١) إذا فقدت الدالة أي شرط من الشروط السابقة فإنه لا توجد لها نهاية

٢) إذا كانت الدالة معرفة على يمين نقطة فقط أو يسار نقطة فقط فعند بحث النهاية نبحث يمنى فقط أو يسرى فقط

مثال إذا كانت د (س) = ٤ س - ٥ ، س ≤ ٢

أوجد نهـــا د (س) ؟
س ← ٢

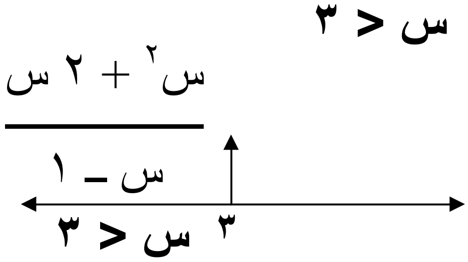


الإجابة

∴ نهـــا د (س) = د (٢⁺) فقط = ٨ ـ ٥ = ٣
س ← ٢

مثال إذا كانت د (س) = (س² + ٢ س) / (س ـ ١) ، س > ٣

أوجد نهـــا د (س)
س ← ٣



الإجابة

∴ نهـــا د (س) = د (٣⁻) فقط = (٩ + ٦) / (٣ ـ ١) = ١٥ / ٢
س ← ٣

أمثلة محلولة :.

ابحث وجود نهاية للدوال الآتية عند النقط المذكورة أمامها ؟

١) د(س) = { ٣ ـ ٢ س   س < ١ ، ٤ س ـ ٣   س >١ }   **عند س = ١**

الإجابة

د (١$^{+}$) = **نهـــا** (س ← ١) ٤ س ـ ٣ = ٤ ـ ٣ = ١

د (١$^{-}$) = **نهـــا** (س ← ١) ٣ ـ ٢ س = ٣ - ٢ = ١

٤ س ـ ٣ | ٣ ـ ٢ س
س >١   ١   س < ١

∴ د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$)

∴ نهـــا (س ← ١) د (س) = ١

مثال

د(س)= { ٣ س ـ ١   س ≤ ٢ ، $\frac{٧}{س ـ ٢}$ س > ٢ }   **عند س = ٢**

الإجابة

د(٢$^{+}$) = **نهـــا** (س ← ٢) $\frac{٧}{س ـ ٢}$ = $\frac{٧}{٢ ـ ٢}$ = $\frac{٧}{٠}$ **∴ لا توجد نهاية يمنى**

د(٢$^{-}$)= **نهـــا** (س ← ٢) ٣ س ـ ١ = ٦ ـ ١ = ٥

$\frac{٧}{س ـ ٢}$ | ٣ س ـ ١
س > ٢   ٢   س ≤ ٢

∴ د (٢$^{+}$) ≠ د (٢$^{-}$)

∴ لا توجد نهاية للدالة عند س = ٢

مثال

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} - ٣ & \text{س} < ٢ \\ \dfrac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س} - ٢} & \text{س} > ٢ \end{cases}$$

عند س = ٢

الإجابة

$$\text{د}(٢^-) = \lim_{\text{س} \to ٢} ٢\text{س} - ٣ = ٤ - ٣ = ١$$

$$\text{د}(٢^+) = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢} \text{س} - ١ = ٢ - ١ = ١$$

$$\text{س} < ٢ : ٢\text{س} - ٣ \quad | \quad ٢ \quad | \quad \text{س} > ٢ : \frac{\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢}{\text{س} - ٢}$$

$$\therefore \text{د}(٢^+) = \text{د}(٢^-)$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = ١$$

مثال

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٢\text{س} & -٢ < \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} - ٤ & ١ \le \text{س} < ٤ \\ \text{س} + ٣ & ٤ \le \text{س} \le ٧ \end{cases}$$

عند س = - ٢ ، س = ١، س = ٤ ، س = ٧

الإجابة

$$-٢ \quad \text{س}^٢ - ٢\text{س} \quad ١ \quad ٣\text{س} - ٤ \quad ٤ \quad \text{س} + ٣ \quad ٧$$

عند س = -٢ الدالة معرفة من جهة اليمين فقط

$\therefore$ **توجد نهاية يمنى فقط** $\therefore \lim_{\text{س} \to -٢} \text{س}^٢ - ٢\text{س} = ٤ + ٤ = ٨$

عند س = ١ فإن :

د (١^+) = **نهـــا** $_{س \leftarrow ١}$ ٣س ــ ٤ = ٣- ٤ = - ١

د (١^-) = **نهـــا** $_{س \leftarrow ١}$ $س^٢$- ٢س = ١- ٢= -١

∴ د (١^+) = د (١^-)

∴ نهـــا $_{س \leftarrow ١}$ د (س)= -١

عند س = ٤ فإن :

د (٤^+)= **نهـــا** $_{س \leftarrow ٤}$ س + ٣ = ٤ + ٣= ٧

د (٤^-) = **نهـــا** $_{س \leftarrow ٤}$ ٣ س - ٤ = ١٢- ٤= ٨

∴ د (٤^+) ≠ د (٤^-) ∴ لا توجد نهاية عند س = ٤

عند س = ٧ نجد أن الدالة معرفة من جهة اليسار فقط

∴ د(٧^-) = **نهـــا** $_{س \leftarrow ٤}$ س + ٣ = ٧ + ٣= ١٠

مثال

د (س) = $\frac{|س ــ ٢|}{س^٢ ــ ٢ س}$ عند س = ٢

الإجابة

بفك المقياس كما هو معروف

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س}(\text{س} - ٢)} & \text{س} > ٢ \\ \dfrac{-(\text{س} - ٢)}{\text{س}(\text{س} - ٢)} & \text{س} < ٢ \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{١}{\text{س}} & \text{س} > ٢ \\ \dfrac{-١}{\text{س}} & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$$\therefore \text{د}(٢^{+}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{١}{\text{س}} = \dfrac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{د}(٢^{-}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{-١}{\text{س}} = \dfrac{-١}{٢} \qquad \therefore \text{د}(٢^{+}) \neq \text{د}(٢^{-})$$

∴ لا توجد نهاية للدالة عند س = ٢

مثال

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٧ + ٢\,\text{جتا س} & \text{س} > ٠ \\ \dfrac{\text{جا}^{٢}\,٣\,\text{س}}{\text{س}^{٢}} & \text{س} < ٠ \end{cases} \quad \text{عند س} = ٠$$

الإجابة

$$\text{د}(٠^{+}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ ٧ + ٢\,\text{جتا س} = ٧ + ٢\,\text{جتا}٠ = ٧ + ٢ = ٩$$

$$\text{د}(٠^{-}) = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\,٣\,\text{س}}{\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}\,٣\,\text{س}}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}\,٣\,\text{س}}{\text{س}} = ٩$$

$$\therefore \text{د}(٠^{+}) = \text{د}(٠^{-}) \qquad \therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س}) = ٩$$

مثال

أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٥ & \text{س} \geq ٢ \\ \text{أ س} - ٣ & \text{س} < ٢ \end{cases}$$

لها نهاية عند س = ٢

الإجابة

$\because$ الدالة لها نهاية عند س = ٢ فإن د (٢ $^+$) = د (٢ $^-$)

$\therefore$ د (٢ $^+$) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ أ س – ٣ = ٢ أ – ٣

$\therefore$ د (٢ $^-$) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ س^٢ – ٤ س + ٥ = ٤ - ٨ + ٥ = ١

$\because$ د (٢ $^+$) = د (٢ $^-$)

$\therefore$ ٢ أ - ٣ = ١ $\therefore$ ٢ أ = ٤ $\therefore$ أ = ٢

الواجب :

١) أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{| س - ١ |}{س^٢ - ٤ س + ٣}$

٢) إذا كان د (س) = $\begin{cases} ٣ س + \dfrac{| س - ٢ |}{٢ - س} & س < ٢ \\ ٤ س - ١ & س \geq ٢ \end{cases}$

أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ د (س) ؟

٣) إذا كان للدالة د (س) = $\begin{cases} أ س + ب & س < ٢ \\ أ س^٢ - ب & س > ٢ \end{cases}$ نهاية = ٣

عندما س $\leftarrow$ ٢ أوجد قيمة أ ، ب ؟

٤) إذا كان للدالة د (س) =
$$\begin{cases} \dfrac{س^{ن} - ١}{س - ١} & س < ١ \\[2ex] \dfrac{٢ س^{٢} - س - ٦}{س - ٢} & س > ١ \end{cases}$$

نهاية عند س = ١ فأوجد قيمة ن ؟ ثم أوجد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ د (س) ؟

٥) ابحث وجود نهاية للدالة د(س) =
$$\begin{cases} \dfrac{س^{٢} + س - ٦}{س - ٢} & س < ٢ \\[2ex] س^{٢} + ١ & س > ٢ \end{cases}$$

عند س = ٢

٦) إذا كانت د (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} - ٣ & س \leq -٣ \\ ٢ - س & س > -٣ \end{cases}$$
فابحث

وجود نهاية للدالة عند س = ـ ٣ ؟

٧) ابحث وجود نهاية للدالة د (س) = $\dfrac{س^{٢} + ٣|س|}{س}$ عند س = ٠

الاتصال عند نقطة

تعريف :-

إذا كانت الدالة معرفة على فترة وكانت أ ∋ للفترة فإن الدالة تكون متصلة عند س = أ إذا حققت الشروط الآتية :-

١) الدالة معرفة عند س = أ

أي أن د (أ) لها وجود

٢) **نهـــا** د(س) لها وجود
س ← أ

أي أن د (أ$^+$) = د (أ$^-$)

٣) **نهـــا** د (س) = د (أ)
س ← أ

أي أن **د (أ$^+$) = د (أ$^-$) = د (أ)**

ملحوظة :-

إذا كانت الدالة معرفة على [أ ، ب] فإنها

تكون متصلة عند س = أ إذا كانت

نهـــا د(س) = د (أ$^+$) = د(أ) **اتصال يمين**
س ← أ

تكون متصلة عند س = ب إذا كانت

نهـــا د(س) = د(ب$^-$) = د(ب) **اتصال يسار**
س ← ب

أمثلة محلولة :.

ابحث اتصال الدوال الآتية عند النقط المذكورة أمامها ؟

١) د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٣} - ٨}{٢ س^{٢} - س - ٦} & س \neq ٢ \\ \dfrac{٥}{٧} & س = ٢ \end{cases}$ **عند س = ٢**

الإجابة

∵ الدالة معرفة بقاعدة واحدة على يمين ويسار النقطة

∴ **لها نهاية واحدة** ∵ د (٢) = $\dfrac{٥}{٧}$

∴ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) = $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٣} - ٨}{٢ س^{٢} - س - ٦} = \dfrac{١٢}{٧}$

∴ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د (س) ≠ د (٢) ∴ **الدالة غير متصلة عند س = ٢**

٢) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٧} - ١٢٨} & س \neq ٢ \\ \dfrac{٥}{٢٨} & س = ٢ \end{cases}$ **عند س = ٢**

الإجابة

د (٢) = $\dfrac{٥}{٢٨}$

∴ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) = $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٧} - ١٢٨} = \lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^{٥} - ٢^{٥}}{س^{٧} - ٢^{٧}} = \dfrac{٥}{٢٨}$

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = د (٢) ∴ الدالة متصلة عند س = ٢

٣) د (س) = $\begin{cases} س^٣ + \frac{٧}{٢} & س \leq -١ \\ \frac{٥}{س + ٣} & س > -١ \end{cases}$ عند س = ـ ١

الإجابة

د(- ١) = (- ١)^٣ + $\frac{٧}{٢}$ = ـ ١ + $\frac{٧}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

د (ـ ١ $^-$) = $\lim_{س \to -١}$ س^٣ + $\frac{٧}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

د (ـ ١ $^+$)= $\lim_{س \to -١}$ $\frac{٥}{س + ٣}$ = $\frac{٥}{٢}$

∴ د (-١$^+$) = د(-١$^-$) = د (ـ ١) = $\frac{٥}{٢}$ ∴ الدالة متصلة عند س= - ١

٤) د(س) = $\begin{cases} ١ + جا\, س & س < \frac{ط}{٢} \\ ٢ + (س - \frac{ط}{٢})^٢ & س \geq \frac{ط}{٢} \end{cases}$ عند س = $\frac{ط}{٢}$

الإجابة

د ($\frac{ط}{٢}$) = ٢ + ($\frac{ط}{٢}$ - $\frac{ط}{٢}$)^٢ = ٢

$$د\left(\frac{ط}{٢}^{+}\right) = \underset{س \leftarrow ط/٢}{نهـا} ٢ + \left(س - \frac{ط}{٢}\right)^{٢} = ٢$$

$$د\left(\frac{ط}{٢}^{-}\right) = \underset{س \leftarrow ط/٢}{نهـا} ١ + جا س = ١ + جا \frac{ط}{٢} = ١ + ١ = ٢$$

$$\therefore د\left(\frac{ط}{٢}^{+}\right) = د\left(\frac{ط}{٢}^{-}\right) = د\left(\frac{ط}{٢}\right) = ٢$$

∴ الدالة متصلة عند س = ط / ٢

مثال أوجد قيمة ك لتصبح الدالة د(س) =

$$\begin{cases} ك & س = ٣ \\ \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & س \neq ٣ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٣

الإجابة ∵ د (٣) = ك

ولكي تكون الدالة متصلة عند س= ٣ فإن

$$\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س) = د(٣) = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} = ٦$$

$$\therefore \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س) = د(٣) \qquad \therefore ك = ٦$$

مثال **أوجد قيم الثوابت أ ، ب لتصبح الدالة الآتية متصلة عند س = ١**

حيث د(١) = ٧

$$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ب س + ٣ & س < ١ \\ أ س + ب & س \leq ١ \end{cases}$$

الإجابة

∵ الدالة متصلة عند س = ١ فإن

د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$) = د (١)

∴ د(١$^{+}$) = **نهــا** (س ← ١) أ س + ب = أ + ب ❶

د(١$^{-}$) = **نهــا** (س ← ١) س^{٢} + ب س + ٣ = ١+ ب + ٣= ب + ٤ ❷

∵ د (١) = ٧ ∴ أ + ب = ٧ ❸

∵ د(١$^{+}$) = د(١$^{-}$) ∴ أ + ب = ب + ٤

∴ أ = ٤ وبالتعويض فى ❸ ∴ ب = ٣

اتصال الدالة على فترة

تعريف :-

١) الدالة تكون متصلة على الفترة المفتوحة] أ ، ب [إذا كانت متصلة عند جميع نقط تلك الفترة .

٢) الدالة تكون متصلة على الفترة المغلقة [أ ، ب] إذا كانت متصلة عند جميع نقط الفترة المفتوحة] أ ، ب [ومتصلة على يمين أ ويسار ب

نظرية :ـ

إذا كانت د (س) ، ر(س) دالتين متصلتين على الفترة س فإن الدوال الآتية تكون متصلة على نفس الفترة

١) د(س) ± ر(س) **٢) ك . د(س) ∀ ك ∍ ح**

٣) د(س) × ر(س) **٤) $\frac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ عدا ف (ر)**

ـ بعض أنماط الدوال المتصلة :ـ

١) الدوال كثيرات الحدود متصلة على ح

٢) الدوال كثيرات الحدود الكسرية متصلة على ح – ف (ر)

٣) الدوال الجذرية التربيعية د(س) = $\sqrt{\text{٢ س ـ ٤}}$

متصلة على مجالها وهو المقدار تحت الجذر ≤ الصفر

٤) الدوال الجذرية التكعيبية د(س) = $\sqrt[3]{\text{س + ٥}}$ متصلة على ح

٥) الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة نبحث اتصالها عند نقط الفواصل بين الفترات

الدوال المثلثية :ـ

١) دالة الجيب د(س) = جا س متصلة على ح أو فترة جزئية منها

١) دالة جيب التمام د(س) = جتا س متصلة على ح أو فترة جزئية منها

٢) دالة الظل د(س) = ظا س

متصلة على ح - { س : س = $\frac{ط}{٢}$ + ن ط ، ن ∋ ص }

أمثلة :- ابحث اتصال الدوال الآتية على الفترة المعطاة

١) د (س) = س^{٣} – ٤ س^{٢} + ٥ س – ٨ فى ح

الإجابة ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ الدالة متصلة فى ح

٢) د(س) = $\frac{س^{٣} + ١}{س^{٤} - ٥ س^{٢} + ٤}$ في ح

الإجابة **نبحث عن أصفار المقام**

س^{٤} – ٥ س^{٢} + ٤ = ٠ ∴(س^{٢} – ٤) (س^{٢} – ١) = ٠

∴ (س – ٢) (س+ ٢) (س – ١) (س+ ١) = ٠

∴ س = ٢ ، س = - ٢ ، س = ١ ، س = -١

∴ الدالة متصلة على ح - {٢ ، - ٢ ، ١ ، -١}

٣) د(س) = $\sqrt{٣ - س}$

الإجابة **نحدد المجال**

٣ – س ≤ صفر - س ≤ - ٣ ∴ **س** ≥ ٣

∴ الدالة متصلة على]- ∞ ، ٣ [

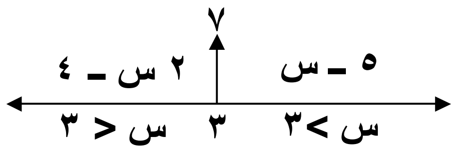
٤) د(س) =
- ٢ س − ٤   س < ٣
- ٧   س = ٣
- ٥ − س   س > ٣

على مجالها

الإجابة

الدالة متصلة عندما س ∋]- ∞ ، ٣ [، س ∋]٣ ، ∞ [لأنها دوال كثيرات حدود

عند س = ٣ فإن **د (٣) = ٧**



د (٣^{+}) = **نهـــا** (س ← ٣) ٥ − س = ٥ - ٣ = ٢

د (٣^{-}) = **نهـــا** (س ← ٣) ٢ س − ٤ = ٢ × ٣ − ٤ = ٢

∴ د (٣^{+}) = د (٣^{-}) ≠ د (٣) ∴ الدالة غير متصلة عند س = ٣

∴ الدالة متصلة فى ح - { ٣ }

٥) د (س) = س | س − ٣ | في ح

الإجابة **نعيد تعريف الدالة حسب تعريف دالة المقياس**

د (س) =
- س^{٢} − ٣ س   س ≤ ٣
- − س^{٢} + ٣ س   س < ٣

الدالة متصلة على]- ∞ ، ٣ [∪]٣ ، ∞ [كثيرات حدود

عند س = ٣ فإن د (٣) = ٩ − ٩ = صفر

د (٣^{+}) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ س^{٢} ـ ٣ س = ٩ ـ ٩ = صفر

د(٣^{-}) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ـ س^{٢} + ٣ س = - ٩ + ٩ = صفر

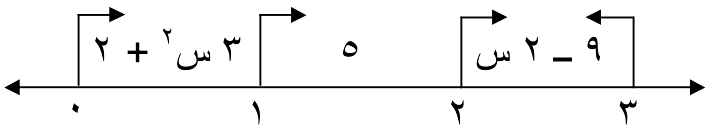
∴ د (٣^{+}) = د(٣^{-}) = د (٣) = صفر

∴ الدالة متصلة عند س = ٣ ∴ الدالة متصلة في ح

٦) د(س) = $\begin{cases} ٣ س^{٢} + ٢ & ٠ \leq س < ١ \\ ٥ & ١ \leq س < ٢ \\ ٩ ـ ٢ س & ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

الإجابة

الدالة متصلة في]٠، ١ [∪] ١، ٢ [∪] ٢، ٣ [



عند س = صفر

د (٠) = ٢

د(٠^{+}) = $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ٣ س^{٢} + ٢ = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ٠

عند س = ١ د (١) = ٥

د (١^{+}) = $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ٥ = ٥

عند س = ٢

د (٢) = ٩ ـ ٤ = ٥

د (٢^{+}) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ٩ ـ ٢ س = ٥

د (٢^{-}) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ٥ = ٥

∴ د (٢^{+}) = د (٢^{-}) = د (٢)

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

د (١ ⁻) = $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ٣ س^{٢} + ٢ = ٥

∴ د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$) = د (١)

∴ الدالة متصلة عند س = ١

عند س = ٣ ، د (٣) = ٣

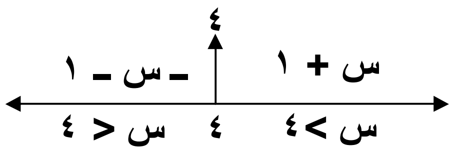
د (٣$^{-}$) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ٩ ـ ٢ س = ٣

∴ الدالة متصلة في [٠، ٣]

٧) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} - ٤}{|\text{س} - ٤|} & \text{س} \neq ٤ \\ ٤ & \text{س} = ٤ \end{cases}$

الإجابة بفك المقياس

د (س) = $\begin{cases} \text{س} + ١ & \text{س} > ٤ \\ ٤ & \text{س} = ٤ \\ -\text{س} - ١ & \text{س} < ٤ \end{cases}$



د (٤) = ٤ ، د (٤$^{+}$) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}}$ س + ١ = ٤ + ١ = ٥

د (٤$^{-}$) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}}$ ـ س ـ ١ = ـ ٤ ـ ١ = ـ ٥

∴ د (٤$^{+}$) ≠ د (٤$^{-}$) ∴ لا توجد نهاية

∴ الدالة غير متصلة عند س = ٤

ثانياً :ـ إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة :ـ

يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند نقطة إذا كان لها نهاية

مثال هل يمكن إعادة تعريف الدالة د(س) = $\frac{س|س + ٢|}{س + ٢}$ + ٩

لتصبح متصلة عند س = - ٢ ؟

الإجابة نعيد تعريف الدالة حسب تعريف دالة المقياس

$$\therefore \ د(س) = \begin{cases} س + ٩ & س > -٢ \\ -س + ٩ & س < -٢ \end{cases}$$

$د(-٢^{+}) = \underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}} س + ٩ = -٢ + ٩ = ٧$

$د(-٢^{-}) = \underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}} -س + ٩ = ٢ + ٩ = ١١$

$\therefore$ د $(-٢^{+}) \ne$ د(-٢^{-}) $\therefore$ لا توجد نهاية للدالة عند س = - ٢

$\therefore$ لا يمكن إعادة تعريفها لتصبح متصلة عند س = - ٢

مثال اعد تعريف الدوال الآتية لتصبح متصلة عند النقط المذكورة أمامها ؟

١) د(س) = $\frac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٤} - ١٦}$ عند س = - ٢

الإجابة نوجد نهاية الدالة

$$\underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}} د(س) = \underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٤} - ١٦} = \underset{س \to -٢}{\text{نهـــا}} \frac{س^{٧} - (-٢)^{٧}}{س^{٤} - (-٢)^{٤}}$$

$$= \frac{٧}{٤} (-٢)^{٣} = -١٤$$

∴ توجد نهاية للدالة ∴ يمكن إعادة تعريفها لتصبح متصلة وتكون

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^7 + 128}{س^4 - 16} & س \neq -2 \\ -14 & س = -2 \end{cases}$$

٢) د (س) = $\begin{cases} \dfrac{7\,س + ظا\,2\,س}{جا\,س} & س > 0 \\ 9\,جتا\,س & س < 0 \end{cases}$ **عند س = صفر**

الإجابة

نوجد نهاية الدالة

$د(0^+) = \lim_{س \to 0} \dfrac{7\,س + ظا\,2\,س}{جا\,س} = \dfrac{7+2}{1} = 9$ **بالقسمة على س**

∵ $د(0^-) = \lim_{س \to 0} 9\,جتا\,س = 9$

∴ $د(0^+) = د(0^-)$ ∴ توجد نهاية للدالة

∴ يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة

∴ $د(س) = \begin{cases} \dfrac{7\,س + ظا\,2\,س}{جا\,س} & س > 0 \\ 9 & س = 0 \\ 9\,جتا\,س & س < 0 \end{cases}$

الواجب :

١) ابحث اتصال الدالة عند س = ١ إذا كان

د (س) = { $\frac{١}{٥}$ (٢ س^{٢} + ٣)   س ≥ ١
            ٦ ـ ٥ س   س > ١

٢) إذا كانت د (س) = { س^{٢} + ب س + ٣   س < ١
            أ   س = ١
            أ س + ب   س > ١

متصلة عند س = ١ فما قيمة أ ، ب ؟

٣) ابحث اتصال الدالة د (س) = { س | س | + ٤   س ≥ ٠
            $\frac{| س |}{س}$ + ٣   س > ٠

وذلك عند س = ٠ ؟

٤) ابحث اتصال الدالة د (س) = { $\frac{٥ س^{٢} + جا^{٢} ٢ س}{س ظا ٣ س}$ س < ٠
            $\frac{س + ٣}{س + ١}$ س ≤ ٠

عند س = ٠ ؟

٥) أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة الآتية متصلة

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^٢ - (ك + ١)\,س + ك}{س - ١} & س \ne ١ \\ ٢ & س = ١ \end{cases}$$

عند س = ١؟

٦) إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} س^٢ + أ\,س + ٣ & س < ١ \\ \dfrac{س^٢ - ١}{س - ١} & س > ١ \end{cases}$$

أوجد قيمة أ لكى يكون $\lim\limits_{س \to ١}$ د (س) لها وجود . ثم اعد تعريف الدالة لكى تكون متصلة عند س = ١

٧) إذا كانت الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} أ\,س^٢ + ١ & س \le ٢ \\ ٢\,س + ١ & س > ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ أوجد قيمة الثابت أ ؟

٨) ابحث اتصال الدالة

$$د(س) = \begin{cases} جا\,س - جتا\,س & ٠ \le س \le ط \\ ٢\,جتا^٢\,س - ١ & س > ط \end{cases}$$

٩) إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} ٤\,س & س \le -٢ \\ أ\,س + ب & -٢ < س < ٣ \\ -٢\,س & س \ge ٣ \end{cases}$$

متصلة على ح فما قيمة أ ، ب ؟

الباب الثاني :ـ الاشتقاق

سبق لنا في الصف الثاني دراسة المشتقة الأولى للدالة ص = د(س) عند أي نقطة س وهى $\frac{ء ص}{ء س} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{د (س + هـ) - د (س)}{هـ}$

وتكون الدالة قابلة للاشتقاق عند النقطة **س = أ** تنتمي لمجال الدالة إذا تحقق وجود مشتقة عند هذه النقطة أي أن **دَ (س)** لها وجود (لها قيمة)

نتيجة :ـ

إذا كانت الدالة يتغير تعريفها في يمين ويسار النقطة س = أ فإنه توجد مشتقة يمنى ، مشتقة يسرى

وتكون الدالة قابلة للاشتقاق عند **س = أ** إذا كانت

١) دَ ($أ^+$) لها وجود ٢) دَ ($أ^-$) لها وجود

٣) دَ ($أ^+$) = دَ ($أ^-$)

نظرية :ـ

إذا كانت الدالة ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = أ فإنها تكون متصلة عند النقطة س = أ والعكس غير صحيح بمعنى أنه إذا كانت الدالة متصلة عند النقطة س = أ فليس من الضرورة أنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

الدالة قابلة للاشتقاق ⟵ الدالة متصلة

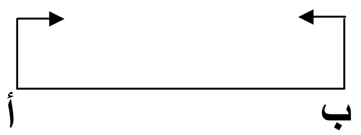
الدالة غير قابلة للاشتقاق (متصلة ــ غير متصلة)

الدالة متصلة (قابلة للاشتقاق ـ غير قابلة للاشتقاق)

الدالة غير متصلة ⟵ غير قابلة للاشتقاق

ملحوظة :.

إذا كانت س ∋ [أ ، ب] فإنه



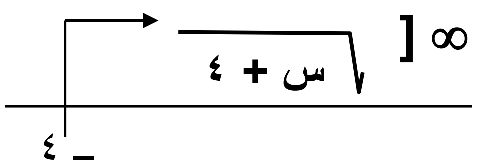
عند س = أ توجد مشتقة يمنى فقط **دَ (أ$^{+}$)**

عند س = ب توجد مشتقة يسرى فقط **دَ (ب$^{-}$)**

مثال **ابحث قابلية اشتقاق الدالة د (س) = $\sqrt{\text{س} + ٤}$ عند أى نقطة على مجالها ؟**

الإجابة نحدد مجال الدالة س + ٤ ≤ صفر

∴ س ≤ ـ ٤ ∴ **س ∋ [ـ ٤ ، ∞ [**



نفرض نقطة س = أ ∋] ـ ٤ ، ∞ [

دَ (أ) = $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{د (أ + هـ) ـ د (أ)}}{\text{هـ}}$ ∵ د (س) = (س + ٤)$^{\frac{١}{٢}}$

∴ د (أ + هـ) = (أ + هـ + ٤)$^{\frac{١}{٢}}$ ، د (أ) = (أ + ٤)$^{\frac{١}{٢}}$

$$\therefore\ \acute{د}(أ) = \lim_{هـ \to 0} \frac{(أ + هـ + 4)^{\frac{1}{2}} - (أ + 4)^{\frac{1}{2}}}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{(أ + هـ + 4)^{\frac{1}{2}} - (أ + 4)^{\frac{1}{2}}}{(أ + هـ + 4) - (أ + 4)}$$

$$= \frac{1}{2}(أ + 4)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{أ + 4}}$$

عند س = ـ ٤ نوجد المشتقة اليمنى فقط وتكون هي مشتقة الدالة عند هذه النقطة

$$د(-4) = \sqrt{-4 + 4} = صفر$$

$$\acute{د}(-4^{+}) = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(-4 + هـ) - د(-4)}{هـ}$$

$$د(-4 + هـ) = (-4 + هـ + 4)^{\frac{1}{2}} = هـ^{\frac{1}{2}} \quad ، \quad د(-4) = (-4 + 4)^{\frac{1}{2}} = صفر$$

$$\therefore\ \acute{د}(-4^{+}) = \lim_{هـ \to 0} \frac{هـ^{\frac{1}{2}}}{هـ} = \frac{1}{0}$$ **غير معرفة**

$\therefore$ لا توجد مشتقة للدالة عند س = ـ ٤

$\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق على] ـ ٤ ، ∞ [

مثال **ابحث قابلية اشتقاق الدالة د (س) = | س ـ ٣ |**

عند س = ٣ ؟

الإجابة **نعيد تعريف الدالة حسب تعريف دالة المقياس**

$$د(س) = \begin{cases} س - 3 & س \geq 3 \\ -س + 3 & س < 3 \end{cases}$$

$$د َ(٣^+) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٣ + هـ) - د(٣)}{هـ}$$

د (٣ + هـ) = ٣ + هـ ـ ٣ = هـ ، د (٣) = ٣ ـ ٣ = ٠

$$\therefore د َ(٣^+) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٣ + هـ) - د(٣)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} ١ = ١$$

$$د َ(٣^-) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٣ + هـ) - د(٣)}{هـ}$$

د (٣ + هـ) = ـ ٣ ـ هـ + ٣ = ـ هـ ، د (٣) = ـ ٣ + ٣ = ٠

$$\therefore د َ(٣^-) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(٣ + هـ) - د(٣)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-هـ}{هـ} = -١$$

$$\therefore د َ(٣^+) \neq د َ(٣^-)$$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

مثال ابحث اتصال الدالة وقابلية الاشتقاق عند س = ٢

$$للدالة\ د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & س \leq ٢ \\ ٥س - ٧ & س > ٢ \end{cases}$$

الإجابة **أولاً نبحث الاتصال :ـ**

$د(٢) = (٢)^٢ - ١ = ٤ - ١ = ٣$

$د(٢^+) = \lim_{س \to ٢} س^٢ - ١ = ٤ - ١ = ٣$

$د(٢^-) = \underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}\ ٥ س - ٧ = ٥ \times ٢ - ٧ = ١٠ - ٧ = ٣$

$\therefore$ $د(٢^+) = د(٢^-) = د(٢)$ $\therefore$ الدالة متصلة عند س = ٢

ثانياً نبحث الاشتقاق :-

$$دَ(٢^+) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$$

$$د(٢ + هـ) = (٢ + هـ)^٢ - ١ = هـ^٢ + ٤ هـ + ٣ \text{ ، } د(٢) = ٣$$

$$\therefore دَ(٢^+) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{هـ(هـ + ٤)}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهــا} هـ + ٤ = ٤$$

$$دَ(٢^-) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$$

$$د(٢ + هـ) = ٥(٢ + هـ) - ٧ = ٥ هـ + ٣$$

$$د(٢) = ٥ \times ٢ - ٧ = ٣$$

$$\therefore دَ(٢^-) = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ} = \underset{هـ \leftarrow ٠}{نهــا} \frac{٥ هـ}{هـ} = ٥$$

$\therefore$ $دَ(٢^+) \neq دَ(٢^-)$ $\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

مثال ابحث قابلية اشتقاق الدالة $د(س) = (س - ٥) |س - ٥|$ عند س = ٥ ؟

الإجابة نعيد تعريف الدالة حسب تعريف دالة المقياس

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} (\text{س} - ٥)^٢ & \text{س} \le ٥ \\ -(\text{س} - ٥)^٢ & \text{س} > ٥ \end{cases}$$

د (٥) = (٥ ـ ٥)^٢ = ٠ د (٥ + هـ) = (٥ + هـ ـ ٥)^٢ = هـ^٢

$$\text{دَ}(٥^+) = \text{نهــا}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{\text{د}(٥ + \text{هـ}) - \text{د}(٥)}{\text{هـ}} = \text{نهــا}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{\text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \text{نهــا}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \text{هـ} = ٠$$

د (٥ + هـ) = ـ (٥ + هـ ـ ٥)^٢ = ـ هـ^٢

$$\therefore \text{دَ}(٥^-) = \text{نهــا}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{\text{د}(٥ + \text{هـ}) - \text{د}(٥)}{\text{هـ}} = \text{نهــا}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{-\text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \text{نهــا}_{\text{هـ} \leftarrow ٠} - \text{هـ} = ٠$$

$\therefore$ دَ (٥$^+$) = دَ (٥$^-$) $\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٥

مثال أوجد قيمة أ ، ب التي تجعل الدالة د حيث

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ & \text{س} < ١ \\ \text{أ س} + \text{ب} & \text{س} \le ١ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند س = ١

الإجابة

$\because$ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ $\therefore$ الدالة متصلة عند س = ١

أولاً دراسة الاشتقاق :ـ

$$\therefore \text{دَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} & \text{س} < ١ \\ \text{أ} & \text{س} \le ١ \end{cases}$$

∴ $دَ(١^+) = دَ(١^-)$ ∴ ٢ = أ ❶

ثانياً دراسة الاتصال :-

$د(١^+) = د(١^-) = د(١)$ ، $د(١) = أ + ب$

$د(١^+) =$ $\lim_{س \to ١}$ أ س + ب = أ + ب

$د(١^-) =$ $\lim_{س \to ١}$ $س^٢ = ١$ ∴ أ + ب = ١ ❷

وبالتعويض من ❶ في ❷

∴ ٢ + ب = ١ ∴ ب = - ١

مثال إذا كانت د(س) = $\begin{cases} أ س^٢ + ب س & س \le ١ \\ ٣ س - ١ & س > ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ١ فما قيمة أ ، ب ؟

الإجابة ∵ دَ (س) = $\begin{cases} ٢ أ س + ب & س \le ١ \\ ٣ & س > ١ \end{cases}$

∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١ ∴ الدالة متصلة عند س = ١

الاشتقاق	الاتصال
∴ $دَ(١^+) = دَ(١^-)$	∴ $د(١^+) = د(١^-) = د(١)$
∴ ٢ أ + ب = ٣ ❶	د (١) = أ + ب

وبطرح ❷ من ❶

∴ ٢ أ + ب = ٣

أ + ب = ٢

أ = ١

∴ **ب = ١**

د (١⁺) = **نهـــا** (س ← ١) أ س^{٢} + ب س

= أ + ب

د (١⁻) = **نهـــا** (س ← ١) ٣س – ١

= ٣ - ١ = ٢

∴ **أ + ب = ٢** ❷

الواجب :

١) ابحث قابلية اشتقاق الدوال الآتية عند النقط المعطاه

أ) د (س) =
$$\begin{cases} س^{٢} + س + ٣ & س < ١ \\ ٣ س + ٢ & س \leq ١ \end{cases}$$
عند س = ١

ثم ابحث كذلك اتصال هذه الدالة عندما س = ١

ب) د (س) = ٣ ـ | س ـ ١ | عند س = ١

جـ) د (س) = $\sqrt[٣]{س + ٢}$ عند أى نقطة من مجالها ؟

---

٢) إذا كانت د (س) =
$$\begin{cases} ٢ س^{٤} & س \geq ١ \\ أ س + ب & س < ١ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند س = ١ فأوجد قيمتى أ ، ب ؟

٣) إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} أ س^٢ + ١ & س \le ٢ \\ ٢ س + ١ & س > ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ . أوجد قيمة الثابت أ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة

عند س = ٢

٤) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & س \geq ٢ \\ ٤ س - ٣ & س < ٢ \end{cases}$

عند س = ٢ ؟

٥) ابحث قابلية اشتقاق الدالة د (س) = $\sqrt{س + ٢}$ عند س = ٢ ؟

٦) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ك س + ١ & س \le ١ \\ ٧ + ٢س & س > ١ \end{cases}$ متصلة عند

س = ١ فأوجد قيمة ك ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ١ ؟

٧) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} س^٣ & س \geq ١ \\ أ س^٢ + ب س + جـ & س < ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق مرتين عند س = ١ فأوجد قيمة أ ، ب ، جـ ؟

الدالة الضمنية – المشتقات العليا

أولاً : مراجعة لما سبق دراسته في قواعد الاشتقاق بالصف الثاني الثانوي :-

١) إذا كانت **ص = أ** حيث **أ ثابت** فإن **صَ = صفر**

مثال :- ص = ٩ ∴ صَ = صفر

٢) إذا كانت **ص = س^{ن}** حيث **ن ∈ ح** فإن **صَ = ن س$^{ن-١}$**

مثال:- إذا كانت ص = س^{٥} ∴ صَ= ٥ س^{٤}

٣) إذا كانت **ص = جـ س^{ن}** حيث **جـ ثابت** فإن **صَ = جـ ن س$^{ن-١}$**

مثال:- إذا كانت ص = ٥ س^{٧} ∴ صَ = ٣٥س^{٦}

٤) إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت

ص = د(س) × ر (س) فإن صَ = دَ(س) × ر(س) + رَ(س) × د(س)

أي أن مشتقة حاصل ضرب دالتين =

مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية × الأولى

مثال :- إذا كانت ص = (س^{٢} + ٥) (٣س+ ٢)

فإن صَ = ٢س(٣س+ ٢) + ٣(س^{٢} + ٥)

= ٦س^{٢}+ ٤س+ ٣س^{٢}+ ١٥ = ٩س^{٢}+ ٤س+ ١٥

٥) إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت

ص = $\dfrac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ فإن صَ = $\dfrac{\text{دَ (س) × ر (س) ـ رَ (س) × د (س)}}{\text{(ر (س))}^{2}}$

أي أن مشتقة خارج قسمة دالتين = $\dfrac{\text{مشتقة البسط × المقام ـ مشتقة المقام × البسط}}{\text{مربع المقام}}$

مثال:ـ إذا كانت ص = $\dfrac{5\text{ س} - 2}{3\text{ س}^{2} + 1}$

فإن صَ = $\dfrac{5\,(3\text{ س}^{2} + 1) - 6\text{ س}\,(5\text{ س} - 2)}{(3\text{ س}^{2} + 1)^{2}}$

٦) إذا كانت **ص = د (ع)** قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير ع ، كانت

ع = ر(س) قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير **س** فإن **ص= د(ر(س))**

تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير **س** حيث

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$$

مثال:ـ إذا كانت ص = ع^{5} ، ع = س^{2} ـ س + ٥ فإن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 5\text{ ع}^{4} \times (2\text{ س} - 1)$$

$$= 5\,(\text{س}^{2} - \text{س} + 5)^{4}\,(2\text{ س} - 1)$$

٧) إذا كانت **ص = (د(س))^{ن}** فإن **صَ = ن (د(س))$^{ن - 1}$ × دَ (س)**

مثال:ـ إذا كانت ص = (س^{2} + ٣س- ٤)^{5}

∴ صَ = ٥(س^{2} + ٣س- ٤)^{4} × (٢س + ٣)

إعداد / صابر عبد الرحيم
موبايل / ٠١٢٢٦٢٠٠٢٤٤

٨) إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س فإن

$$\frac{ء}{ء س} (ص)^{ن} = ن ص^{ن - ١} \times \frac{ء ص}{ء س}$$

مثال : - $\frac{ء}{ء س} ص^{٧} = ٧ ص^{٦} \times \frac{ء ص}{ء س}$

ـ المشتقة الأولى للدوال المثلثية ـ

١) إذا كانت **ص = جا س**   ∴ **صَ = جتا س**

٢) إذا كانت **ص = جتا س**   ∴ **صَ = - جا س**

نتائج :ـ

١) إذا كانت **ص = جا(أ س + ب)**   ∴ **صَ = أ جتا (أ س + ب)**

٢) إذا كانت **ص = جتا (أ س + ب)**   ∴ **صَ = - أ جا (أ س + ب)**

٣) إذا كانت **ص = ظا س**   ∴ **صَ = $قا^{٢}$ س**

ـ الدالة الضمنية ـ الاشتقاق الضمني ـ

١) إذا كانت ص = $س^{٢}$ – ٥ س+ ٦ تسمى **دالة صريحة** أي يمكن فصل س عن ص ويكون **صَ = ٢س – ٥**

٢) أما إذا كانت الدالة بالصورة $ص^{٢}$ – ٥ س ص + $س^{٢}$ = ١٥

تسمى دالة ضمنية لأنه لا يمكن فصل س عن ص ونوجد مشتقتها بالقواعد السابقة .

أمثلة محلولة :. أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ لكل مما يأتي :-

١) $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٥\text{ س} + ٣\text{ص} = ٦$

الإجابة بإجراء تفاضل للطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore ٢\text{س} + ٢\text{ص} \times \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} - ٥ + ٣ \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{صفر}$

$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} (٢\text{ص} + ٣) = ٥ - ٢\text{س}$ $\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٥ - ٢\text{ س}}{٢\text{ ص} + ٣}$

٢) $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢\text{ س ص}$

الإجابة بإجراء تفاضل للطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore ٢\text{س} + ٢\text{ص} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\text{ص} + ٢\text{س} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

$(٢\text{ص} - ٢\text{س}) \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\text{ص} - ٢\text{س}$ $\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٢(\text{ص} - \text{س})}{٢(\text{ص} - \text{س})} = ١$

٣) $٥\text{ ص}^{٢} + \text{جا ص} = \text{س}^{٢}$

الإجابة بإجراء تفاضل للطرفين بالنسبة لـ س

$\therefore ١٠\text{ ص} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + \text{جتا ص} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\text{س}$

$\therefore (١٠\text{ص} + \text{جتا ص}) \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٢\text{س}$ $\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٢\text{ س}}{١٠\text{ ص} + \text{جتا ص}}$

٤) س جتا ص + ص جتا س = ١

الإجابة ∵ س جتا ص + ص جتا س = ١

∴ جتا ص − س جا ص $\frac{ء ص}{ء س}$ + جتا س $\frac{ء ص}{ء س}$ - ص جا س = ٠

$\frac{ء ص}{ء س}$ (جتا س − س جا ص) = ص جا س − جتا ص

∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{\text{ص جا س ـ جتا ص}}{\text{جتا س ـ س جا ص}}$

مثال أوجد ميل المماس للمنحنى $س^{٣}$ + $ص^{٣}$ = ٩ عند النقطة (١ ، ٢)

الإجابة ∵ $س^{٣}$ + $ص^{٣}$ = ٩ **بإجراء تفاضل للطرفين بالنسبة لـ س**

∴ ٣ $س^{٢}$ + ٣ $ص^{٢}$ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{-س^{٢}}{ص^{٢}}$

∴ **عند النقطة (١ ، ٢) يكون ميل المماس =** $\frac{-١}{٤}$

مثال أوجد ميل المماس للمنحنى س ص = ٦ عند النقطة (٣ ، ٢) ؟

الإجابة ∵ **س ص = ٦ وبالتفاضل فإن**

∴ ص + س $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{-ص}{س}$

ميل المماس عند النقطة (٣ ، ٢) = $\frac{-٢}{٣}$

مثال إذا كانت معادلة المنحنى هي س ص + ص = ١ فأوجد

إحداثيات النقط التي عندها ميل المماس = $\frac{-١}{٤}$

الإجابة

∵ س ص + ص = ١ وبالتفاضل فإن

ص + س $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$(س + ١) = ـ ص

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-ص}{س + ١}$ ∵ ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{-١}{٤}$

∴ $\frac{-ص}{س + ١}$ = $\frac{-١}{٤}$ **طرفين × وسطين** ∴ س + ١ = ٤ ص

∴ س = ٤ ص ـ ١ ❶ ∵ النقطة تقع على المنحنى فهى تحقق المعادلة

∴ (٤ ص ـ ١) ص + ص = ١ ∴ ٤ $ص^٢$ = ١

∴ $ص^٢$ = $\frac{١}{٤}$ ∴ ص = ± $\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى ❶

∴ س = ١ ، س = - ٣

∴ النقط هي (١ ، $\frac{١}{٢}$) ، (- ٣ ، $\frac{-١}{٢}$)

ـ المشتقات العليا ـ

إذا كانت ص = د(س) قابلة للاشتقاق عدة مرات فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقات العليا للدالة وتسمى المشتقة الأولى ، المشتقة الثانية ، المشتقة الثالثة ، ....

مثال أوجد المشتقة الثانية للدوال الآتية :-

١) ص = س^{٤} ـ ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٧

الإجابة صَ = ٤ س^{٣}- ١٥س^{٢}+ ٦س ∴ صً = ١٢س^{٢}- ٣٠س + ٦

٢) ص = س + $\frac{١}{س}$ عند النقطة (١، ٢)

الإجابة ∵ ص = س + $\frac{١}{س}$ = س + س$^{-١}$

∴ صَ = ١- س$^{-٢}$ ∴ صً = ٢ س$^{-٣}$ = $\frac{٢}{س^{٣}}$

∴ صً عند (١، ٢) = $\frac{٢}{١}$ = ٢

٣) ص = جتا س ـ جاس عند س = $\frac{ط}{٤}$

الإجابة صَ = - جاس- جتا س ، ∴ صً = - جتا س+ جا س

∴ دً ($\frac{ط}{٤}$)= - جتا $\frac{ط}{٤}$ + جا $\frac{ط}{٤}$ = صفر

مثال إذا كان ص = ٢جا س+ ٣ جتا س - س^{٣} أوجد $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ ؟

الإجابة ∵ ص = ٢جا س + ٣ جتا س – س^{٣}

∴ صَ= ٢جتا س - ٣جا س - ٣س^{٢} ∴ صً=- ٢جا س- ٣ جتا س- ٦س

∴ $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ = - ٢جتا س + ٣جا س – ٦

مثال إذا كانت د (س) = أ س^{٣} + ٣ س^{٢} ، $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ = ٢٤ فأوجد قيمة أ

الإجابة ∵ د (س) = أ س^{٣} + ٣ س^{٢}

∴ دَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٦ س ، دً (س) = ٦ أ س + ٦

∴ $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ = ٦ أ ∵ $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}}$ = ٢٤ ∴ ٦ أ = ٢٤

∴ أ = ٤

مثال إذا كانت س^{٢} + ص^{٢} = ١٥ فاثبت أن ص^{٣} $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ١٥= ٠

الإجابة نوجد مشتقة الدالة مرتين متتاليتين

∴ ٢ س + ٢ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ بالقسمة على ٢

∴ س + ص $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٠ ❶ ∴ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{-س}{ص}$ **

وبتفاضل العلاقة رقم ❶ مرة أخرى

$\therefore$ ١ + $\frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس}$ + ص × $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = ٠

$\therefore$ ١ + ص$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $(\frac{ءص}{ءس})^٢$ = ٠ وبالتعويض من العلاقة * * عن $\frac{ءص}{ءس}$

$\therefore$ ١ + ص$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $(\frac{-س}{ص})^٢$ = ٠

$\therefore$ ١ + ص$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{س^٢}{ص^٢}$ = ٠ **بالضرب × ص^٢**

$\therefore$ ص^٢ + ص$^٣\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + س^٢ = ٠ $\therefore$ ص$^٣\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ١٥ = صفر

مثال

إذا كانت د(س)= $\begin{cases} \text{جـ س}^٣ - ١ & \text{س} \geq ١ \\ \text{أ س}^٢ + \text{ب س} & \text{س} < ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق مرتين أوجد قيم أ ، ب ، جـ ؟

الإجابة $\because$ **الدالة قابلة للاشتقاق مرتين فإن**

دَ (س) = $\begin{cases} \text{٣جـ س}^٢ & \text{س} \geq ١ \\ \text{٢ أ س + ب} & \text{س} < ١ \end{cases}$ ، دً (س) = $\begin{cases} \text{٦ جـ س} & \text{س} \geq ١ \\ \text{٢ أ} & \text{س} < ١ \end{cases}$

$\therefore$ دً (١$^+$) = دً (١$^-$) $\therefore$ ٢ أ = ٦ جـ $\therefore$ أ = ٣جـ ❶

∵ الدالة متصلة ∴ د(1^+)= د(1^-)= د(١)

∴ د (١)= جـ - ١ ، د (1^+) = $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نهـــا}}$ أ س^2 + ب س= أ + ب

د(1^-) = $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نهـــا}}$ جـ س^3 - ١= جـ - ١

∴ جـ - ١= أ + ب ❷

، دَ (1^+) = دَ (1^-) ∴ ٢ أ + ب = ٣ جـ ❸

ومن ❸ ، ❶ فإن ٢ أ + ب = أ ∴ ب = - أ ❹

وبالتعويض من ❹ ، ❶ في ❷

∴جـ - ١= أ – أ ∴ جـ = ١

∴ أ= ٣ ، ب = - ٣

خطوات الإستعداد للمذاكرة

- ✪ اخلص النية لله واجعل طلب العلم عبادة ۰
- ✪ تذكر دائماً أن التوفيق من الله والأسباب من الإنسان ۰
- ✪ احذف كلمة سوف من حياتك .. ولا تؤجل عمل اليوم إلى الغد۰
- ✪ لا تذاكر وأنت مرهق ۰

الواجب :

١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان $س^{٣} + ص^{٣} + ٢ س^{٢} ص - ٣ س ص^{٢} = ٢$

٢) إذا كان $س = (ص^{٢} - ١)^{٤}$ فاثبت أن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص^{٢} - ١}{٨ س ص}$

٣) إذا كان $٢ ص^{٣} = ٣ س^{٢}$ فاثبت أن

$$ص \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٢ \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢} = \frac{١}{ص}$$

٤) إذا كانت $ص = \frac{٣ س + ١}{(س - ١)^{٢}}$ اثبت أن

$$(س - ١)^{٢} \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} + ٤ (س - ١) \frac{ءص}{ءس} + ٢ ص = ٠$$

٥) إذا كان $د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ$ حيث أ ، ب ، جـ ثوابت حقيقية وكان $د(٠) = ٣$ ، $دَ(٢) = ٣$ ، $دَ(٠) = ٥$

فأوجد $د(١)$ ، $دَ(-٢)$ ؟

٦) إذا كان $س^{٢} - س ص = ٣$

أوجد قيمة المقدار $س \left(\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\right) + ٢ \left(\frac{ءص}{ءس}\right)$

٧) إذا كان ص = ٣ جا (٢ س + ١) اثبت أن $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ + ٤ ص = ٠

٨) إذا كان ص = ٢ جا س ـ س جتا س اثبت أن

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ص = ٢ \text{ جا س}$$

٩) إذا كان $ص^٢ + س^٢ = ٢$ س ص اثبت أن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١ ؟

١٠) إذا كان ص = جتا س أثبت ان

$$ص \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} - \left(\frac{ء ص}{ء س}\right)^٢ = -١ \text{ ؟}$$

١١) إذا كان ص = ظا س اثبت أن $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ = جا ٢س $قا^٤$ س ؟

١٢) إذا كان ص = جتا ن س + جا ن س اثبت أن

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ن^٢ \text{ ص} = \text{صفر} \quad \text{حيث ن ثابت}$$

تطبيقات هندسية

إذا كان ص = د(س) فإن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة عليه هو صَ

وعند أي نقطة معلومة يكون

م المماس= $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ ، ميل العمودي = $\frac{-1}{\text{ميل المماس}}$

∴ معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) هي

ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

ومعادلة العمودي على المماس عند نفس النقطة هي

ص – ص$_1$ = م العمودي (س – س$_1$)

ملحوظة :-

إذا كانت **ص = ظا س** فإن **صَ = قا^2 س**

مثال **أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى ص = س^3 + ٣س^2- س- ١ عند النقطة (١، ٢) ؟**

الإجابة

م المماس = $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٣س^2 + ٦س- ١ ∴ **م = ٣ +٦- ١ =٨**

∴ معادلة المماس هى ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

∴ ص – ٢ = ٨ (س - ١) ∴ ص ـ ٢ = ٨ س ـ ٨

∴ ص ـ ٨ س + ٦ = ٠

∵ م المماس = ٨ ∴ ميل العمودي = $\frac{-١}{٨}$

∴ معادلة العمودي هي ص ـ $ص_١$ = م العمودي (س ـ $س_١$)

∴ ص ـ ٢ = $\frac{-١}{٨}$(س ـ ١) ∴ ٨ ص- ١٦= - س + ١

∴ ٨ ص + س- ١٧= ٠

مثال أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى ص = $\frac{٢ س + ١}{٣ ـ س}$

عند ص = ٥

الإجابة نوجد س بالتعويض عن ص = ٥

∴ ٥ = $\frac{٢ س + ١}{٣ ـ س}$ بضرب الطرفين × الوسطين

∴ ١٥- ٥ س = ٢س + ١ ∴ ٧ س = ١٤ ∴ س = ٢

∴ النقطة هي (٢ ، ٥)

∴ م المماس= $\frac{٢ (٣ ـ س) + (٢ س + ١)}{(٣ ـ س)^٢}$ = $\frac{٧}{(٣ ـ س)^٢}$ ، م = ٧

∴ معادلة المماس هي ص ـ ٥ = ٧(س ـ ٢)

ص ـ ٥ = ٧ س- ١٤ ∴ ص ـ ٧س + ٩ = صفر

ومعادلة العمودي هي

$ص - ٥ = \frac{-١}{٧} (س - ٢)$ $\therefore$ $٧ ص - ٣٥ = - س + ٢$

$\therefore$ **$٧ ص + س - ٣٧ =$ صفر**

مثال

أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى

$س^٢ - ٣ س ص + ص^٢ = ٩$ عند النقطة (٦، ٣)

الإجابة

بالاشتقاق بالنسبة لـ س فإن

$٢س - ٣ص - ٣س \frac{ءص}{ءس} + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} (٢ص - ٣س) = ٣ص - ٢س$ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ص - ٢س}{٢ص - ٣س}$

$\therefore$ **ميل المماس $= \frac{١}{٤}$ ، ميل العمودي $= -٤$**

$\therefore$ معادلة المماس هي :- $ص - ٣ = \frac{١}{٤} (س - ٦)$

$\therefore$ $٤ ص - ١٢ = س - ٦$ $\therefore$ **$٤ ص - س - ٦ =$ صفر**

$\therefore$ معادلة العمودي هي :- $ص - ٣ = -٤ (س - ٦)$

$\therefore$ $ص - ٣ = -٤ س + ٢٤$ $\therefore$ **$ص + ٤ س - ٢٧ =$ صفر**

ملاحظات هامة جداً :-

١) م = ظا هـ $= \frac{ء ص}{ء س} = \frac{- معامل س}{معامل ص}$

٢) إذا كان **المماس // المستقيم** فإن **ميل المماس = ميل المستقيم**

٣) إذا كان **المماس ⊥ المستقيم** فإن **م المماس × م المستقيم = - ١**

أي أن $م_١ × م_٢ = - ١$

٤) إذا كان **المماس // محور السينات** (١، ٠) فإن **ميل المماس= صفر**

٥) إذا كان **المماس // محور الصادات** (٠، ١) فإن **ميل المماس= $\frac{١}{٠}$**

٦) أى نقطة تقع على المنحنى تحقق معادلته

٧) لإيجاد نقط تقاطع منحنيين أو منحنى ومستقيم أو لإيجاد نقطة التماس نحل المعادلتين معاً وذلك بجعل ص للمنحنى الأول = ص للمنحنى الثاني

٨) لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات **نضع س = صفر**

٩) لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات **نضع ص = صفر**

١٠) لإثبات أن المنحنيان لهما مماس مشترك عند نقطة معلومة فإنه يكون عند هذه النقطة $\frac{ء ص}{ء س}$ للأول = $\frac{ء ص}{ء س}$ الثاني

١١) لإثبات أن المنحنيان متقاطعان على التعامد نوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ للأول ، $\frac{ء ص}{ء س}$ للثاني ثم نوجد حاصل ضربهما فإذا كان الناتج = - ١ **ثبُت المطلوب**

مثال **أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $\frac{٤\text{ س} + ٣}{\text{س}^{٢} + ١}$**
والمماس عندها يوازى محور السينات ؟

الإجابة ∵ المماس // محور السينات ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠$

∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٤ (\text{س}^{٢} + ١) - ٢\text{ س } (٤\text{ س} + ٣)}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$ = صفر

∴ ٤ $\text{س}^{٢}$ + ٤ – ٨ $\text{س}^{٢}$ – ٦س = ٠ ∴ - ٤$\text{س}^{٢}$ - ٦س +٤ = ٠ ÷ -٢

∴ ٢$\text{س}^{٢}$ + ٣س – ٢ = ٠ ∴ (٢س – ١) (س + ٢) = ٠

س = $\frac{١}{٢}$ ∴ ص = ٤ ∴ **النقطة** ($\frac{١}{٢}$ ، ٤)

س = - ٢ ∴ ص = - ١ ∴ **النقطة** (- ٢ ، - ١)

مثال **أوجد النقط الواقعة على المنحنى $\text{س}^{٢}$ + $\text{ص}^{٢}$ + ٣ س + ص= ٠**
والتي عندها يكون المماس عمودي على المستقيم ٣ص + س+ جـ = ٠

الإجابة ∵ المماس ⊥ المستقيم فإن ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{٣}$

∴ **ميل المماس = ٣** ∵ $\text{س}^{٢}$ + $\text{ص}^{٢}$ + ٣س + ص= ٠ **بالاشتقاق**

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ + ٣ + $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٠

(٢ص + ١) $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = - ٢س – ٣ ∴ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{-٢\text{ س} - ٣}{٢\text{ ص} + ١} = ٣$

$\therefore$ ٦ ص + ٣ = - ٢س - ٣ $\quad$ $\therefore$ ٦ ص + ٦ = - ٢س $\quad$ **÷ -٢**

$\therefore$ س = - ٣ص - ٣ $\quad$ **وبالتعويض في معادلة المنحنى**

$\therefore$ (- ٣ص - ٣)^{٢} + ص^{٢} + ٣(- ٣ص - ٣) + ص = صفر

$\therefore$ ٩ص^{٢} + ١٨ص + ٩ + ص^{٢} – ٩ص - ٩ + ص = صفر

$\therefore$ ١٠ص^{٢} + ١٠ص = ٠ ÷ ١٠ $\quad$ $\therefore$ ص (ص + ١) = ٠

$\therefore$ ص = صفر $\quad$ **$\therefore$ ص = - ١**

س = - ٣ $\quad$ **$\therefore$ س = صفر**

مثال **أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = س^{٤} – ٣س وعندها يكون المماس عمودي على المستقيم س + ٢٩ص + جـ = ٠**

الإجابة $\because$ المماس $\perp$ المستقيم

$\therefore$ ميل المستقيم = $\frac{-١}{٢٩}$ ، ميل المماس = ٢٩

$\therefore$ ميل المماس = ٤ س^{٣} – ٣ $\quad$ $\therefore$ ٤ س^{٣} - ٣ = ٢٩

$\therefore$ ٤ س^{٣} = ٣٢ $\quad$ $\therefore$ س^{٣} = ٨ $\quad$ **$\therefore$ س = ٢ $\quad$ وبالتعويض**

$\therefore$ ص = ١٦ - ٦ = ١٠ $\quad$ **$\therefore$ النقطة هى (٢ ، ١٠)**

$\therefore$ معادلة المماس هى $\quad$ ص – ١٠ = ٢٩(س – ٢)

$\therefore$ ص – ١٠ = ٢٩س - ٥٨ $\quad$ **$\therefore$ ص – ٢٩س + ٤٨ = ٠**

مثال اثبت أن المنحنيان $ص = س^{٥} - س^{٤} + ٧$ ، $ص = س^{٢} - ٣س + ٩$

يتقاطعان على التعامد عند (١، ٧)

الإجابة **نوجد ميل كل منهما عند (١، ٧) ثم نوجد حاصل ضربهما**

فإذا كان الناتج = - ١ نتج المطلوب

$م_{١} = ٥ س^{٤} - ٤ س^{٣}$ ∴ $م_{١}$ عند (١، ٧) = ٥ – ٤ = ١

$م_{٢} = ٢س - ٣$ ∴ $م_{٢}$ عند (١، ٧) = ٢ – ٣ = - ١

∴ **$م_{١} \times م_{٢}$ = ١ × - ١ = - ١** ∴ **المنحنيان متقاطعان على التعامد**

مثال **اثبت أن المنحنيان $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س - ٦ص + ٢٥ = ٠$ ،**

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢س + ص = ١٠$ لهما مماس مشترك عند النقطة (٢، ١)

وأوجد معادلته ؟

الإجابة **المنحنى الأول :-**

$٢س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} - ١٢ - ٦ \frac{ءص}{ءس} = ٠$ **بالقسمة على ٢**

∴ $س + ص \frac{ءص}{ءس} - ٦ - ٣ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

∴ $(ص - ٣) \frac{ءص}{ءس} = ٦ - س$ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٦ - س}{ص - ٣}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ عند (٢ ، ١) = - ٢

المنحنى الثاني :-

$٢س + ٢ص \frac{ء ص}{ء س} + ٢ + \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

$(٢ص + ١) \frac{ء ص}{ء س} = -٢س - ٢$ $\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٢س - ٢}{٢ص + ١}$

$\therefore \frac{ء ص}{ء س}$ عند $(٢ ، ١) = -٢$ $\therefore م_١ = م_٢$

$\therefore$ المنحنيان لهما مماس مشترك عند النقطة (٢، ١)

ومعادلة المماس هي ص – ١ = - ٢(س – ٢)

$\therefore$ ص – ١ = - ٢س +٤ $\therefore$ **ص + ٢س- ٥ = ٠**

مثال **أوجد معادلتي المماسين للمنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٥٢$ الموازيين للمستقيم ٢س + ٣ ص = جـ**

الإجابة $\because$ المماس // المستقيم $\therefore$ **ميل المماس = ميل المستقيم**

$\therefore$ م المستقيم = $\frac{-٢}{٣}$ ، م المماس = $\frac{-٢}{٣}$

$\because س^٢ + ص^٢ = ٥٢$ فإن $٢س + ٢ص \frac{ء ص}{ء س} = ٠$

بالقسمة على ٢ $\therefore ص \frac{ء ص}{ء س} = -س$ $\therefore \frac{ء ص}{ء س} = \frac{-س}{ص}$

$\therefore \frac{-س}{ص} = \frac{-٢}{٣}$ $\therefore ٣س = ٢ص$ $\therefore س = \frac{٢}{٣} ص$

وبالتعويض فى المنحنى $\therefore \frac{٤}{٩}$ ص^٢ + ص^٢ = ٥٢ **بالضرب × ٩**

$\therefore$ ٤ ص^٢ + ٩ ص^٢= ٤٦٨ $\therefore$ ١٣ص^٢ = ٤٦٨ $\therefore$ **ص = ± ٦**

عند ص = ٦ **فإن س = ٤** **(٤ ، ٦)**

عند ص = - ٦ **فإن س = - ٤** **(- ٤ ، - ٦)**

عند (٤ ، ٦)

ص – ٦ = $\frac{-٢}{٣}$ (س – ٤)

٣ص – ١٨ =- ٢س + ٨

٣ص+ ٢س – ٢٦= صفر

عند (- ٤ ، - ٦)

ص + ٦= $\frac{-٢}{٣}$ (س + ٤)

٣ص + ١٨ = - ٢س- ٨

٣ص + ٢س + ٢٦= صفر

مثال **أوجد قيم أ ، ب ، جـ حتى يكون لمنحنيين الدالتين ص = أ س^٣ + ب س ، ص = جـ س^٢ – س مماس مشترك عند النقطة (- ١ ، ٢) وأوجد معادلة المماس المشترك ؟**

الإجابة $\because$ النقطة (- ١ ، ٢) تقع على المنحنيان $\therefore$ **تحققان معادلته**

أي أن ٢ = - أ – ب $\therefore$ **أ + ب = - ٢** ❶

والمنحنى الثاني :- ٢ = جـ + ١ $\therefore$ **جـ = ١**

$\because$ للمنحنيان مماس مشترك عند (- ١ ، ٢)

$\therefore$ **م$_١$ عند (-١ ، ٢) = م$_٢$ عند (-١ ، ٢)**

∴ ٣ أ س^{٢} + ب = ٢ جـ س – ١ ∴ ٣ أ + ب = - ٢ جـ - ١

٣ أ + ب = -٢- ١= - ٣ ∴ **٣ أ + ب = - ٣** ❷

من ❶ ، ❷ بالطرح ∴ ٢أ= - ١ ∴ **أ = $\frac{-١}{٢}$**

وبالتعويض فإن ب = $\frac{-٣}{٢}$ **ويكون الميل = - ٣**

∴ معادلة المماس المشترك عند (- ١، ٢) هي

ص – ٢ = - ٣ (س + ١) ∴ ص – ٢ = - ٣ س – ٣

∴ ص + ٣ س+ ١= صفر

مثال **أوجد معادلتي المماسين للمنحنى ص^{٢} = ٤س عند نقطتي تقاطعه مع المستقيم ٤ س – ٢ص= ٣**

الإجابة **نوجد نقط التقاطع بحل المعادلتين معاً**

∵ ص^{٢} = ٤ س ، ٤ س – ٢ص = ٣ ∴ ص^{٢} – ٢ص – ٣ = ٠

∴(ص – ٣)(ص + ١) = ٠

∴ ص = ٣ ∴ س = $\frac{٩}{٤}$ ($\frac{٩}{٤}$ ، ٣)

ص = - ١ ∴ س = $\frac{١}{٤}$ ($\frac{١}{٤}$ ، – ١)

∵ ص^{٢} = ٤ س **بالاشتقاق**

∴ ٢ص$\frac{ء ص}{ء س}$= ٤ **بالقسمة على ٢**

∴ $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢}{ص}$ ، عند $(\frac{٩}{٤} ، ٣)$ فإن م $= \frac{٢}{٣}$

∴ المعادلة هى ص ـ ٣ $= \frac{٢}{٣}$ (س ـ $\frac{٩}{٤}$)

∴ ٣ص ـ ٩ = ٢س ـ $\frac{٩}{٢}$ ∴ ٦ص ـ ١٨ = ٤س ـ ٩

∴ ٦ص ـ ٤ س ـ ٩= صفر

وعند $(\frac{١}{٤} ، - ١)$ فإن م $= \frac{٢}{-١} =$ ـ ٢

∴ معادلة المماس هي ص + ١ = - ٢(س - $\frac{١}{٤}$)

∴ ص + ١ = - ٢س + $\frac{١}{٢}$ بالضرب × ٢

∴ ٢ص + ٢ = - ٤ س+ ١ **∴ ٢ص + ٤س+ ١ = صفر**

الواجب :

١) اثبت أن المنحنيين ص = ٣ س^{٢} ـ ٥ س ـ ٢ ، ص = س^{٢} ـ ٣ س ـ ٢ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، ـ ٤)

٢) أوجد معادلة المماس للمنحنى ٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} ـ ٢ س = ٤ عند النقطة (١ ، ـ ١)

٣) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٢ عند النقطة التى إحداثيها السينى يساوى ١ ؟

٤) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى س ص = ٨ والذى يوازى المستقيم ص + ٢ س = ٩

٥) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د (س) = جا س + جتا س عند النقطة (٠ ، ١) على هذا المنحنى ؟

٦) أوجد النقط الواقعة على المنحنى $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٦$ والتى يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم ٣ س ـ ٦ ص = ٧ ؟

٧) أوجد معادلة المماس للمنحنى $س^٢ - ٢س ص - ص^٢ = ٤$ عند النقطة (٢ ، ٠) الواقعة عليه ؟

٨) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى $ص = ٥س^٣ - ٧س^٢ - ٢س - ٦$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة عليه ؟

٩) أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $ص = س^٢ - ٤س + ٢$ عند النقطة (١ ، ـ ١) الواقعة عليه ؟

١٠) أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = جا ٢س + جتا س عند النقطة ($\frac{ط}{٢}$ ، ٠) الواقعة عليه ؟

المعدلات الزمنية المرتبطة

إذا كانت ص = د(س) وإذا كانت س تتغير بتغير الزمن ن فإن ص تتغير بتغير الزمن ن أيضاً

وتسمى $\frac{ء س}{ء ن}$ بسرعة س ، $\frac{ء ص}{ء ن}$ بسرعة ص

حيث أن $\frac{ء ص}{ء ن} = \frac{ء ص}{ء س} \times \frac{ء س}{ء ن}$

<u>وعند حل المسائل نتبع الآتي :ـ</u>

١) رسم شكل هندسى يمثل المسألة ومنه نوجد العلاقة بين متغيرات المسألة

٢) نوجد مشتقة هذه المتغيرات بالنسبة للزمن ونحدد قيمة المتغيرات عند اللحظة المراد القياس عندها ثم التعويض لإيجاد المجهول

أمثلة محلولة :ـ

مثال **نقطة تتحرك على المنحنى $س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٣ص - ٦ = ٠$ فإذا كانت سرعة إحداثيها السيني ٧ سم / ث عند النقطة (١، ٢) . أوجد عند نفس النقطة سرعة إحداثيها الصادي ؟**

الإجابة

$س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٣ص - ٦ = ٠$ **بالاشتقاق بالنسبة لـ ن**

$\therefore ٢س \frac{ء س}{ء ن} + ٢ص \frac{ء ص}{ء ن} - ٥ \frac{ء س}{ء ن} + ٣ \frac{ء ص}{ء ن} = ٠$

وعند النقطة (١، ٢) ، $\frac{ءس}{ءن}$ = ٧ سم / ث

٢× ١ × ٧ + ٢× ٢ $\frac{ءص}{ءن}$ – ٥ × ٧ + ٣ $\frac{ءص}{ءن}$ = صفر

∴ ١٤ + ٧ $\frac{ءص}{ءن}$ - ٣٥ = صفر

∴ ٧ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٢١ ∴ $\frac{ءص}{ءن}$ = **٣ سم / ث**

مثال **تتحرك نقطة على المنحنى س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س- ٨ ص= ١٠٨ عين مواضع النقط التي يكون عندها معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة للزمن يساوى معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة للزمن ؟**

الإجابة

أي أن $\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{ءص}{ءن}$ **وبالاشتقاق بالنسبة ن**

∴ ٢ س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ص $\frac{ءص}{ءن}$ + ٤ $\frac{ءس}{ءن}$ – ٨ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٠

وبالقسمة على $\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{ءص}{ءن}$

∴ ٢ س + ٢ص- ٤ = ٠ ∴ س + ص – ٢= ٠

∴ س = ٢ – ص **وبالتعويض فى العلاقة المعطاة**

$\therefore$ (٢- ص)^{٢} + ص^{٢} + ٤(٢ – ص) – ٨ ص= ١٠٨

٤ – ٤ ص + ص^{٢} + ص^{٢}+ ٨ – ٤ ص – ٨ ص - ١٠٨= ٠

$\therefore$ ٢ص^{٢} – ١٦ص – ٩٦= ٠ $\therefore$ ص^{٢} – ٨ ص - ٤٨ = ٠

$\therefore$ (ص – ١٢) (ص + ٤) = ٠

$\therefore$ ص = ١٢ $\therefore$ س = ٢ – ١٢ =- ١٠

$\therefore$ ص = - ٤ $\therefore$ س = ٢+ ٤ = ٦

$\therefore$ النقط هي (- ١٠، ١٢) ، (٦ ، - ٤)

مثال **مستطيل طوله ضعف عرضه ينكمش بالبرودة بحيث ينقص عرضه بمعدل ٠,٠٥ سم / ث . أوجد معدل النقص فى المساحة عندما يكون العرض = ١٠سم ؟**

الإجابة **نفرض أن العرض = س ، الطول = ٢س**

مساحة المستطيل = الطول × العرض

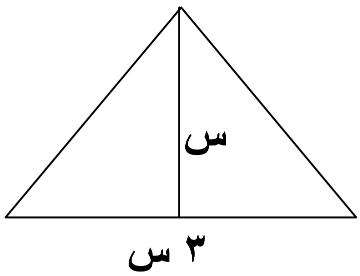
$\therefore$ م = ٢س × س = ٢س^{٢} **بالتفاضل بالنسبة لـ ن**

$\therefore \frac{ء م}{ء ن} = ٤ س \times \frac{ء س}{ء ن}$ حيث $\frac{ء س}{ء ن}$ = – ٠,٠٥ ، س = ١٠

$\therefore \frac{ء م}{ء ن} = ٤ \times ١٠ \times \frac{-٥}{١٠٠} = -٢$

$\therefore$ المساحة تنقص بمعدل ٢سم^{٢} / ث

مثال **صفيحة رقيقة من المعدن على شكل مثلث يتمدد بانتظام بحيث يظل طول قاعدتها مساوياً ثلاثة أمثال ارتفاعها . فإذا كان معدل زيادة مساحة الصفيحة ٠,٢٧ سم^{٢} / ث . فأوجد معدل تغير ارتفاعها عند اللحظة التي يكون فيها ارتفاع الصفيحة = ٩ سم**



الإجابة

نفرض أن الارتفاع = س سم $\therefore$ القاعدة = ٣ س

$\therefore$ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع

$\therefore$ م = $\frac{١}{٢}$ × ٣ س × س = $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} **وبالتفاضل بالنسبة لـ ن**

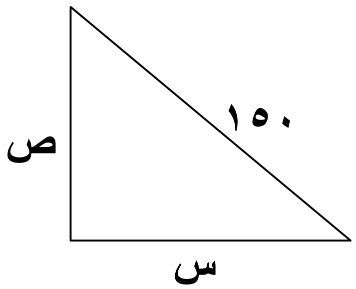
$\therefore$ $\frac{ء م}{ء ن}$ = ٣ س × $\frac{ء س}{ء ن}$ وعند س = ٩ ، $\frac{ء م}{ء ن}$ = ٠,٢٧

$\therefore$ ٠,٢٧ = ٣ × ٩ × $\frac{ء س}{ء ن}$ $\therefore$ $\frac{ء س}{ء ن}$ = $\frac{٠,٢٧}{٢٧}$ = ٠,٠١

معدل تغير ارتفاع الصفيحة = ٠,٠١ سم / ث

مثال **سلم طوله ١٥٠ سم يرتكز بطرفه الأعلى على حائط رأسي وبطرفه الأسفل على الأرض فإذا كان طرفه الأسفل ينزلق مبتعداً عن الحائط بمعدل ٢سم / ث فبأي معدل ينزلق الطرف الآخر عندما يكون الطرف الأسفل على بعد ٩٠ سم من الحائط ؟**

الإجابة نفرض أن الطرف العلوي على بعد = ص ، والطرف السفلى على بعد = س



$\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢$ سم / ث المطلوب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ عند س = ٩٠ سم

$\because$ $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = (١٥٠)^{٢}$ وبالاشتقاق بالنسبة لـ ن

$\therefore$ $٢\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = $ صفر

$\therefore$ $\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + \text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$ $\therefore$ $\text{س}\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -\text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ * وعند س = ٩٠ فإن

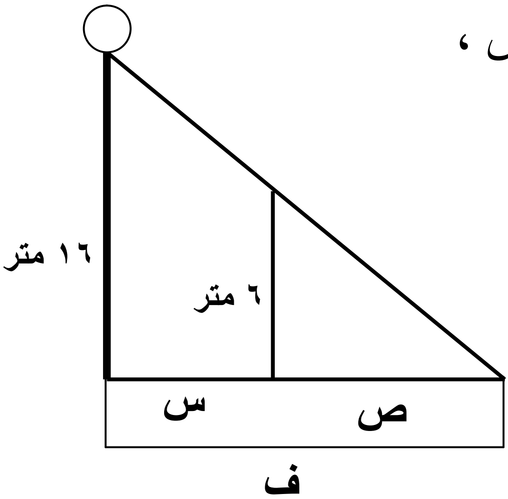
$(٩٠)^{٢} + \text{ص}^{٢} = (١٥٠)^{٢}$ $\therefore$ ص = ١٢٠

وبالتعويض في العلاقة * $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-٩٠}{١٢٠} \times ٢ = \frac{-٣}{٢}$ سم / ث

مثال ونش رأسي ارتفاعه ٦ أمتار يتحرك بسرعة ٥ م / ث في اتجاه مصباح على ارتفاع ١٦ متر . أوجد

١) معدل تحرك نهاية ظل الونش ٢) معدل تحرك طول ظل الونش

الإجابة



نفرض أن بعد الونش عن قاعدة المصباح = س ،

طول الظل = ص ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -\text{٥}$ م / ث

بعد نهاية ظل الونش = ف

ف = ص + س **بالاشتقاق**

$\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ❶

ومن تشابه $\Delta\Delta$ فإن $\frac{\text{ص}}{\text{ف}} = \frac{\text{٦}}{\text{١٦}}$ $\therefore$ ٣ ف = ٨ ص

$\therefore$ ف = $\frac{\text{٨}}{\text{٣}}$ ص **بالاشتقاق** $\therefore \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = \frac{\text{٨}}{\text{٣}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

وبالتعويض في المعادلة ❶

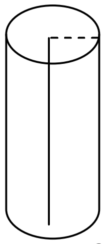
$\therefore \frac{\text{٨}}{\text{٣}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} + \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ $\therefore \frac{\text{٨}}{\text{٣}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} - \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

$\therefore \frac{\text{٥}}{\text{٣}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -\text{٥}$ $\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = -\text{٣}$ ، $\frac{\text{ءف}}{\text{ءن}} = -\text{٨}$

$\therefore$ طول الظل ينقص بمعدل ٣ م / ث

، نهاية الظل ينقص بمعدل ٨ م / ث

مثال اسطوانة تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطرها نق يزداد بمعدل ٠,٢ سم / ث وارتفاعها ع يزداد بمعدل ٠,١ سم / ث . أوجد معدل تغير حجم الأسطوانة عندما نق = ٢سم ، ع = ٥ سم ؟



الإجابة نفرض أن نصف القطر = نق ، الارتفاع = ع

$\frac{\text{د نق}}{\text{د ن}} = \text{٠,٢ سم / ث}$ ، $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}} = \text{٠,١ سم / ث}$

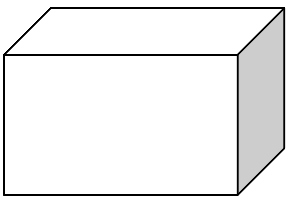
$\because \text{ح} = \text{ط نق}^{\text{٢}}\,\text{ع}$ $\therefore \frac{\text{ء ح}}{\text{ء ن}} = \text{٢ ط نق ع} \times \frac{\text{ء نق}}{\text{ء ن}} + \text{ط نق}^{\text{٢}} \times \frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}}$

وعند نق = ٢سم ، ع = ٥ سم

$\therefore \frac{\text{ء ح}}{\text{ء ن}} = \text{٢ ط} \times \text{٢} \times \text{٥} \times \text{٠,٢} + \text{ط} \times \text{٤} \times \text{٠,١} = \text{٤,٤ ط سم}^{\text{٣}}\text{ / ث}$

مثال يزداد حجم مكعب بانتظام محتفظاً بشكله بمعدل ٢٧سم³ / دقيقة أوجد معدل الزيادة في مساحة سطحه الكلية عند اللحظة التي يكون فيها طول حرفه = ٣ سم ؟

الإجابة $\frac{\text{ء ح}}{\text{ء ن}} = \text{٢٧ سم}^{\text{٣}}\text{ / دقيقة}$



مساحة سطح المكعب الكلية = ٦ × مساحة الوجه الواحد

$\therefore \text{م} = \text{٦ ل}^{\text{٢}}$

$\therefore \frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = \text{١٢} \times \text{ل} \times \frac{\text{ء ل}}{\text{ء ن}}$ $\therefore \frac{\text{ء م}}{\text{ء ن}} = \text{١٢} \times \text{٣} \times \frac{\text{ء ل}}{\text{ء ن}}$

$\therefore \frac{ءم}{ءن} = ٣٦ \times \frac{ءل}{ءن}$ $\because$ ح = $ل^٣$ $\therefore \frac{ءح}{ءن} = ٣ل^٢ \times \frac{ءل}{ءن}$ *

$\therefore ٢٧ = ٣ \times ٩ \times \frac{ءل}{ءن}$ $\therefore \frac{ءل}{ءن} = ١$ سم / ث **بالتعويض فى** *

$\therefore \frac{ءم}{ءن} =$ **٣٦ سم^٢ / ث**

مثال **تتمدد قطعة من المعدن على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضه ٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضها بالتسخين بحيث تظل محتفظة بهذه النسبة فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٠,٦ سم^٣ / دقيقة ، وعندما يزداد العرض بمعدل ٠,٠١ سم / دقيقة . فأوجد أبعاده**

الإجابة **نفرض أن العرض = س ، الطول = س + ٢ ، الارتفاع = ٣ س**

$\frac{ءس}{ءن} =$ **٠,٠١ سم / دقيقة**

$\because$ ح = س (س + ٢) × ٣س= ٣$س^٣$ + ٦$س^٢$

$\therefore \frac{ءح}{ءن} = ٩س^٢ \times \frac{ءس}{ءن} + ١٢س \times \frac{ءس}{ءن}$

$\therefore$ ٠,٦ = (٩ $س^٢$ + ١٢س) × ٠,٠١

$\therefore$ ٩ $س^٢$ + ١٢س – ٦٠ = ٠ $\therefore$ ٣$س^٢$ + ٤س- ٢٠ = ٠

$\therefore$ (٣س + ١٠) (س – ٢) = ٠

∴ $س = \frac{-10}{3}$ ترفض ، $س = 2$

∴ **العرض = ٢ سم ، الطول = ٤ سم ، الارتفاع = ٦ سم**

الواجب :

١) تتحرك نقطة على المنحنى $س^2 + س ص + ص^2 = 7$ وكان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (ـ ١ ، ٣) يساوى ٠,١ أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة ؟

٢) تتحرك نقطة (س ، ص) على الدائرة $س^2 + ص^2 + 4س - 8ص = 108$ عين موضع النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساوياً لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن ؟

٣) قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم / ث عندما يكون العرض ٨٠ سم ، احسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة ؟

٤) سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢ سم / ث أوجد معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجة فى ١٠ ثوانى ؟

٥) يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه على أرض أفقية وبطرفه الأخر على حائط رأسى . فإذا انزلق الطرف السفلى للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / دقيقة عندما يكون على بعد ٢,٥ متر من الحائط أوجد عندئذ معدل انخفاض الطرف العلوى للسلم . ثم أوجد بُعد الطرف العلوى للسلم عن الأرض عندما يتحرك الطرف العلوى والطرف السفلى بنفس المعدل ؟

٦) وضع مصباح كشاف على ارتفاع ٨ أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله ١,٦ متر مبتعداً عن الضوء بسرعة ٢ متر / دقيقة . أوجد

أ) معدل ازدياد طول ظل الرجل　　　　ب) سرعة تحرك نهاية ظل الرجل

٧) فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم . إذا كان الضلع الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة وكان الضلع الثانى يزداد بمعدل ٢ سم / دقيقة فأوجد معدل التغير فى مساحة المثلث بعد دقيقتين ؟

٨) أجـ ، ب جـ طريقان متعامدان حيث أجـ = ٩٠متر ، ب جـ = ٧٠متر يسير رجلان الأول من أ نحو جـ بسرعة منتظمة ٦ متر / ث والثانى من ب إلى جـ بسرعة منتظمة ٨ متر / ث أثبت أن البعد ف بين الرجلين بعد مضى ن ثانية من لحظة انطلاقهما معاً يعطى بالعلاقة $ف^{٢}$ = ١٠٠($ن^{٢}$ ـ ٢٢ ن + ١٣٠) ثم استنتج معدل تغير ف بالنسة إلى ن عندما ن = ٨ ثوان ؟

سلوك الدالة

أولاً تزايد وتناقص الدالة :.

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة] أ ، ب [فإنه يكون

الدالة تزايدية إذا كان د ($س_2$) > د ($س_1$) $\forall$ $س_2$ > $س_1$

الدالة تناقصية إذا كان د ($س_2$) < د ($س_1$) $\forall$ $س_2$ > $س_1$

استخدام المشتقة الأولى لمعرفة فترات التزايد والتناقص في الدالة :.

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة] أ ، ب [فإن

الدالة تكون تزايدية إذا كانت دَ (س) > صفر $\forall$ س $\in$] أ ، ب [

الدالة تكون تناقصية إذا كانت دَ (س) < صفر $\forall$ س $\in$] أ ، ب [

عند تحديد فترات التزايد والتناقص للدالة نتبع الآتى :.

١) نوجد دَ (س)

٢) نوجد أصفار دَ(س) وذلك بوضع دَ(س) = صفر ومنها نوجد قيم س وكذلك قيم س التي عندها دَ(س) غير معرفة إن وجدت

٣) نحدد الفترات التى ينقسم إليها مجال هذه الدالة بهذه النقط

٤) نعين إشارة دَ (س) خلال كل فترة (بقاعدة بحث إشارة الدالة التي سبق دراستها بالصف الأول الثانوي)

٥) إذا كان لا يوجد أصفار للدالة دَ (س) فإننا نبحث متباينة دَ(س) > ٠ ، دَ(س) < ٠ حول النقطة الغير معرفة عندها

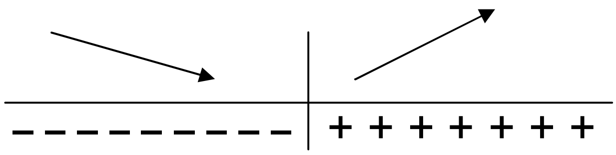
مثل إذا كانت دَ(س) = $\frac{٣}{\text{س} - ١}$ عند دَ(س) = صفر

∴ ٣ ≠ صفر ∴ **دَ (س) غير معرفة عند س ـ ١ = صفر**

∴ **س = ١ ، نبحث إشارة دَ (س) حول س = ١ وذلك بأخذ قيم س = ١,١ ، س = ٠,٩**

عند س = ١,١ ∴ دَ (س) = $\frac{٣}{١,١ - ١}$ = $\frac{٣}{٠,١}$ > صفر **(موجب)**

عند س = ٠,٩ ∴ دَ (س) = $\frac{٣}{٠,٩ - ١}$ = $\frac{٣}{-٠,١}$ < صفر **(سالب)**



٦) إذا كان مقام دَ (س) كمية مربعة فإننا نبحث إشارة البسط فقط وهى إشارة الدالة

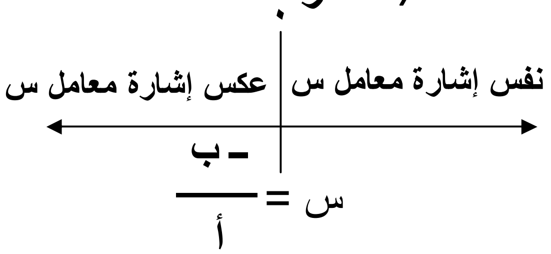
ـ بحث إشارة الدالة ـ

١) الدالة الثابتة :ـ د (س) = أ حيث أ عدد ثابت

إشارتها مثل إشارة العدد الثابت

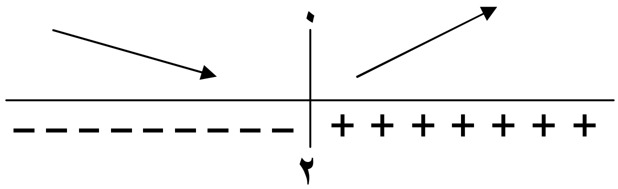
مثال :- **د(س) = ٧** **موجبة لجميع قيم س ∋ ح**

٢) الدالة الخطية :- د (س) = أ س + ب ، أ ≠ صفر



بوضع د(س) = ٠ ∴ **س = $\frac{-ب}{أ}$**

مثال:- د (س) = ٣ س- ٦

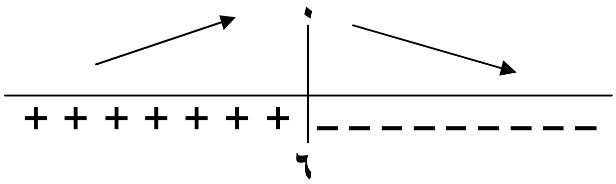


الإجابة

بوضع د (س) = صفر

∴ ٣س- ٦= صفر ∴٣ س= ٦ ∴ **س = ٢**

مثال:- د (س) = ٦ – س



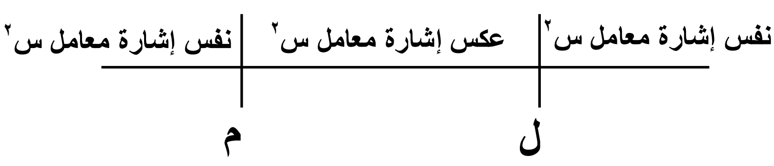
الإجابة

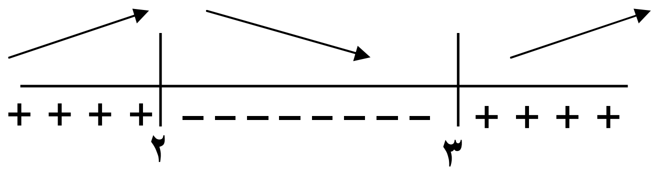
بوضع د (س) = صفر ∴ ٦ – س = صفر ∴ **س = ٦**

٣) الدالة التربيعية :- د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

وهذه الدالة إما تحلل وتعطى قيمتين أو قيمة وحيدة أو لا تحلل حسب المميز

١) إذا كانت تحلل وتعطى قيمتين ل ، م





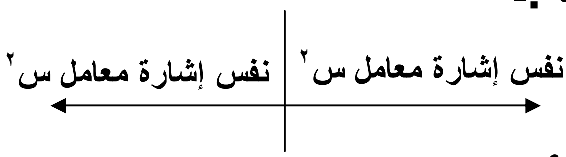
مثال:- د (س)= س^{٢} – ٥ س + ٦

الإجابة بوضع د (س) = صفر

∴ س^{٢} – ٥ س + ٦ = ٠ ∴(س – ٣) (س – ٢) = صفر

∴ س = ٣ ، س = ٢ (معامل س^{٢} موجب)

٢) إذا كانت تحلل وتعطى قيمة وحيدة :-

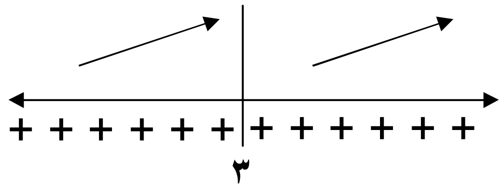


مثال:- د (س) = س^{٢} – ٦س + ٩

الإجابة بوضع د (س) = ٠ ∴ س^{٢} – ٦س +٩ =٠

∴ (س – ٣) (س – ٣)= ٠

∴ س = ٣



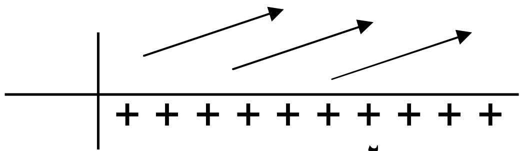
٣) إذا كانت لا تحلل :-

فإن إشارتها مثل إشارة أ (معامل س^{٢})

مثال:- د (س) = س^{٢} – ٣س +٨

الإجابة بوضع د(س) = صفر ∴ س^{٢} – ٣س + ٨ = صفر

نجد أنها لا تحلل



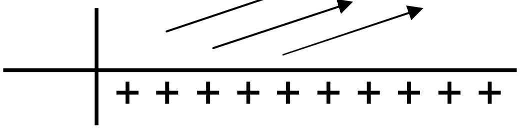
∴ إشارتها موجبة دائماً مثل إشارة أ (معامل س^{٢})

أمثلة محلولة :.

عين فترات تزايد وتناقص الدوال الآتية على مجالها

١) د(س) = ٢س – ٥

الإجابة دَ (س) = ٢ **ثابتة وموجبة**

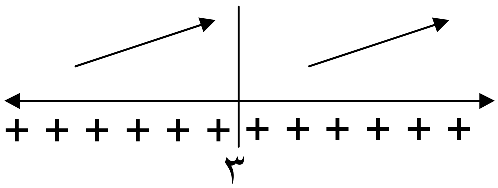


∴ الدالة تزايدية على مجالها

٢) د(س) = س^{٣} – ٩س^{٢} + ٢٧س + ٤

الإجابة دَ (س) = ٣س^{٢} – ١٨س + ٢٧

وبوضع دَ(س) = صفر



∴ ٣ س^{٢} – ١٨س + ٢٧ = ٠

∴ س^{٢} – ٦س + ٩ = ٠ ∴ (س – ٣)^{٢} = ٠ ∴ **س = ٣**

الدالة تزايدية على مجالها

٣) د(س) = $\sqrt{٢ - س}$ = (٢ – س)$^{\frac{١}{٢}}$

الإجابة هذه الدالة مجالها ٢ – س ≥ ٠ ∴ - س ≥ - ٢

∴ **س** ≤ ٢ ، دَ (س) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٢ - س}}$ بوضع دَ (س) = ٠

∴ نجد أن دَ (س) **غير معرفة** ∵ ٢ – س = ٠ ∴ **س = ٢**

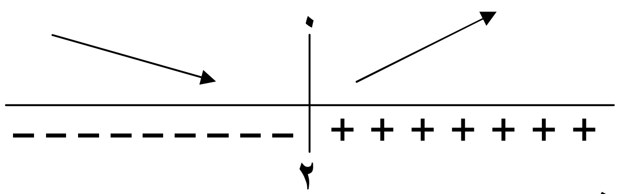
وبأخذ قيم س أقل من ٢ نجد أن المقام موجب دائماً ولذلك نبحث إشارة البسط

∵ البسط سالب ∴ الدالة تناقصية على مجالها

٤) د (س) = س^{٢} – ٤ س + ٥

الإجابة دَ (س) = ٢س – ٤ وبوضع دَ (س) = ٠

∴ ٢س – ٤ = ٠ ∴ **س = ٢**



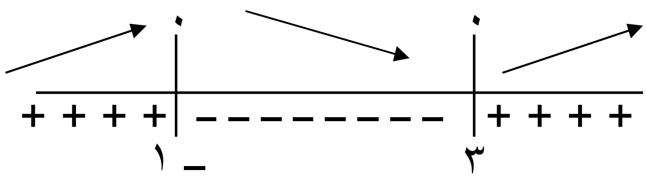
الدالة تناقصية] - ∞ ، ٢] وتزايدية [٢، ∞ [

٥) د (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – س^{٢} – ٣س+ ٣

الإجابة دَ (س) = س^{٢} – ٢س – ٣ وبوضع دَ (س) = ٠

∴ (س – ٣) (س + ١) = ٠

∴ **س = ٣ ، س = - ١**



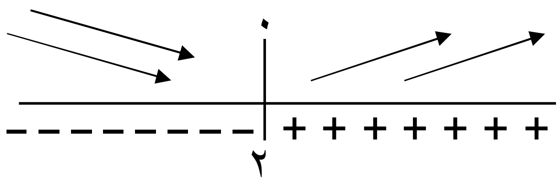
∴ الدالة تزايدية] - ∞ ، - ١] ∪ [٣ ، ∞ [

وتناقصية فى [- ١ ، ٣]

٦) د (س) = { س^{٢} ـ ٤ س ، س ≤ ٢
          ٢ س ـ ٨ ، س > ٢

الإجابة

دَ (س) = { ٢ س ـ ٤ ، س ≤ ٢
          ٢ ، س > ٢



بوضع دَ (س) = صفر كل فترة على حده

∴ ٢س – ٤ = ٠ ∴ **س = ٢ والدالة الثانية ثابتة وموجبة**

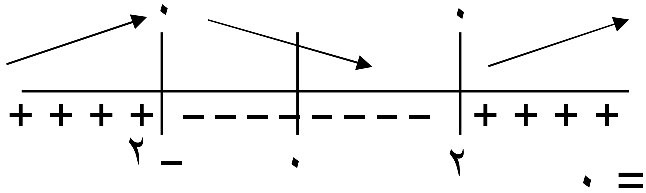
∴الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٢] ، تزايدية فى [٢ ، ∞ [

---

٧) د (س) = س + $\frac{٤}{س}$ حيث س ≠ صفر

الإجابة

دَ (س) = ١ ـ $\frac{٤}{س^{٢}}$ = $\frac{س^{٢} ـ ٤}{س^{٢}}$



وبوضع دَ (س) = صفر ∴ س^{٢} – ٤ = ٠

∴(س – ٢)(س + ٢) = ٠ ∴ **س = ٢ ، س = - ٢**

دَ(س) غير معرفة عند س = ٠ أى المقام = ٠

المقام كمية مربعة أى موجب دائما لذلك نبحث اشارة البسط فقط

∴ **الدالة تزايدية فى] - ∞ ، - ٢] ∪ [٢ ، ∞ [**

، تناقصية فى]- ٢، ٢ [- {٠}

الواجب :

١) عين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية : -

أ) $د(س) = ٢س^٣ - ٣س^٢ - ١٢س - ٥$

ب) $د(س) = س + \frac{١}{س}$ حيث $س \neq ٠$

جـ) $د(س) = ٢ - |س - ١|$

د) $د(س) = ١ - ٤س - س^٢$

هـ) $د(س) = (س + ٤)^٣$

و) $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & س \leq ١ \\ ٢س + ١ & س > ١ \end{cases}$

٢) اثبت أن الدالة $ص = س^٣ - ٣س^٢ - ٥س + ١٠$ تناقصية عند النقطة (١ ، ٣) وتزايدية عند النقطة (٣ ، -٥) ؟

القيم العظمى والصغرى المحلية

تعريف :.

إذا كانت الدالة معرفة على [أ ، ب]

١) نقول أن لها قيمة عظمى محلية عند $س_١$ ∋ [أ ، ب] إذا كانت

د ($س_١$) > د (س) حيث س ∋ ج ($س_١$)

٢) نقول أن لها قيمة صغرى محلية عند $س_٢$ ∋ [أ ، ب] إذا كانت

د ($س_٢$) < د (س) حيث س ∋ ج ($س_٢$)

ملحوظة :.

عند النقط الطرفية أ ، ب فإن

١) د (أ) ≥ د (س) ∀ س ∋ ج (أ) **صغرى محلية**

٢) د (ب) ≤ د (س) ∀ س ∋ ج (ب) **عظمى محلية**

نظرية (١) :.

إذا كانت الدالة د المعرفة على الفترة] أ ، ب [قابلة للاشتقاق عند $س_١$ ∋] أ ، ب [وكان للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند $س_١$ فإن **دَ ($س_١$) = صفر أى عندها المماس يوازى محور السينات**

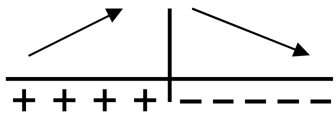
ملحوظة :.

هذا الشرط غير كافى ولذلك لابد من وجود نظريات أخرى .

نظرية (٢) :.

إذا كانت الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق فإن

عظمى محلية

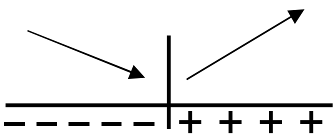


دَ(س) > ٠   دَ (س) < ٠

دَ (س) > ٠ على اليسار

دَ (س) < ٠ على اليمين

صغرى محلية



دَ (س) < ٠   دَ (س) > ٠

دَ (س) < ٠ على اليسار

دَ (س) > ٠ على اليمين

نظرية (٣) :.

الدالة يكون لها قيمة

عظمى محلية إذا كانت

قابلة للاشتقاق فى

فى ج (س) ،

دَ (س) = ٠

، دً (س) < ٠

صغرى محلية إذا كانت

قابلة للاشتقاق فى

فى ج (س) ،

دَ (س) = ٠

، دً (س) > ٠

عند حل المسائل نتبع الآتى :.

١) نوجد دَ (س) ، دً (س) إن أمكن

٢) نضع دَ (س) = صفر ومنها نوجد قيم س وكذلك التى عندها دَ (س) غير معرفة إن وجدت

أ) إما نبحث إشارة دَ (س) كما فى نظرية (٢) وهى تفضل فى الدوال المعرفة بأكثر من قاعدة والكسرية وكثيرات الحدود التى عندها دً (س) = ٠

ب) أو نعوض فى دً (س) حسب نظرية (٣) وهى تفضل فى الدوال كثيرات الحدود بعد الدرجة الثالثة

٣) نعوض بقيم س فى الدالة ص = د (س) لإيجاد قيم ص وهى مقدار القيم العظمى والصغرى المحلية

تعريف :.

النقط الحرجة هى النقط التى تحقق أحد الشرطين

دَ (س) = صفر   أو   دَ (س) غير معرفة

أمثلة محلولة :.

أوجد مواقع القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال الآتية إن وجدت

١) د (س) = - س^{٢} + ٤ س + ٥

الإجابة دَ (س) = - ٢س + ٤ ، دً (س) = -٢ < ٠

بوضع دَ (س) = صفر ∴ - ٢س + ٤ = ٠

∴ س = ٢ ∵ دً (٢) < ٠

∴ عند س = ٢ قيمة عظمى محلية

---

٢) ص = س^{٣} – ٩س^{٢} + ١٥س + ١٠

الإجابة **صَ = ٣س^{٢}- ١٨س + ١٥ ، صً = ٦س – ١٨**

وبوضع صَ = صفر ∴٣ س^{٢}- ١٨س + ١٥= ٠ **÷ ٣**

∴ س^{٢} – ٦س + ٥ = ٠ ∴(س – ٥) (س – ١) = ٠

∴ س = ٥ ، س = ١

وبالتعويض فى صً عن قيم س

∴ دً (٥) = ٦ × ٥ - ١٨= ١٢> ٠ **صغرى محلية**

∴ دً (١) = ٦ – ١٨ = - ١٢< ٠ **عظمى محلية**

وبالتعويض فى ص عن س = ٥ ، ١

عند س = ٥ ∴ ص = ١٢٥ – ٢٢٥ + ٧٥ + ١٠ = - ١٥

عند س = ١ ∴ ص = ١- ٩ + ١٥ + ١٠ = ١٧

∴ (٥ ، - ١٥) صغرى محلية ، (١ ، ١٧) عظمى محلية

٣) ص = س^{٤} – ٤س^{٣} + ٤س^{٢} - ١٥

الإجابة صَ = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٨ س ، صً = ١٢س^{٢} – ٢٤س + ٨

وبوضع صَ = ٠

∴ ٤ س^{٣} – ١٢س^{٢} + ٨ س = ٠ ∴ ٤ س (س^{٢} – ٣س + ٢) = ٠

∴ ٤ س (س – ٢) (س – ١)= ٠

∴ س = صفر ، س = ٢ ، س = ١

وبالتعويض فى صً

∴ دً (٠) = ٨ > ٠ صغرى محلية

، دً (١) = ١٢- ٢٤ + ٨ = - ٤ < ٠ عظمى محلية

، دً (٢) = ٤٨ - ٤٨ + ٨ = ٨ > ٠ صغرى محلية

ثم بالتعويض فى ص فإن

د (٠) = - ١٥ ، د (١) = - ١٤ ، د (٢) = - ١٥

∴ (٠ ، - ١٥) صغرى محلية ، (١ ، - ١٤) عظمى محلية

، (٢ ، - ١٥) صغرى محلية

مثال إذا كانت د (س) = (س – ٢)^{٤} + ٣ فاثبت أن للدالة نقطة حرجة عند س = ٢ ثم بين أن عندها قيمة صغرى محلية للدالة ؟

الإجابة ∵ الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق لأنها كثيرة حدود

∴ دَ (س) = ٤(س – ٢)^{٣} ، دً (س) = ١٢(س – ٢)^{٢}

وبوضع دَ (س) = ٠ ∴ س – ٢ = ٠

∴ **س = ٢** وعندها توجد نقطة حرجة وبالتعويض فى صً

∴ دً (٢) = ٠

∴لا يصلح هذا الاختبار . ولذلك نبحث إشارة دَ (س) على يسار ويمين س = ٢

عندما س < ٢ **يكون دَ (س) < صفر**

عندما س > ٢ **يكون دَ (س) > صفر**

∴ **عند س = ٢ توجد قيمة صغرى محلية**

٥) د (س) = (س – ٣)^{٣} + ٢

الإجابة دَ (س)= ٣(س – ٣)^{٢} ، دً (س) = ٦(س – ٣)

وبوضع دَ (س) = ٠ ∴ **س = ٣**

وهذه هى النقطة الحرجة وبالتعويض عن س = ٣ فى **دً (س)**

∴ دً (٣) = ٠

∴ **لا يصلح هذا الاختبار ولذلك نبحث إشارة دَ (س) على يسار ويمين س = ٣**

عندما س < ٣ **يكون دَ (س) > صفر**

عندما س > ٣ **يكون دَ (س) > صفر**

∴ الإشارة لم تتغير ∴ لا توجد قيم عظمى أو صغرى محلية فى هذه الدالة

٦) د (س) = $\begin{cases} ٥ - ٢ س & س < ٠ \\ ٣ س + ٥ & س \geq ٠ \end{cases}$

الإجابة

دَ (س) = $\begin{cases} - ٢ & س < ٠ \\ ٣ & س > ٠ \end{cases}$ **∵ دً (س) = ٠**

∴ لا يصلح هذا الاختبار ولذلك نبحث إشارة دَ (س) على يمين ويسار س = صفر

عندما س > ٠ **∴ دَ (س) > صفر**

عندما س < ٠ **∴ دَ (س) < صفر**

∴ عند س = ٠ توجد قيمة صغرى محلية

من قال سبحان الله وبحمده .. سبحان الله العظيم .. غرست له نخلة فى الجنة

٧) أوجد قيم أ ، ب ، جـ ، د إذا علم أن المنحنى الذى معادلته ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د يمر بالنقطة (٠، ٠) وله نقطة حرجة عند س = ٢ ، قيمة صغرى محلية دَ (٤) والمماس عند س =١ معادلته ٩ س - ص + ٧ = ٠

الإجابة ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

دَ (س)= ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

∵ المنحنى يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

∴ ٠ = ٠ + ٠ + ٠ + د ∴ **د = ٠**

∵ المنحنى له نقطة حرجة عند س = ٢

∴ **دَ (٢) = ٠** **أو** **دَ (س) غير معرفة**

∵ **الدالة كثيرة حدود** ∴ **دَ (٢) = ٠**

∴ **٠ = ١٢ أ + ٤ ب + جـ** ❶

∵ دَ (٤) صغرى محلية ∴ **دَ (٤) = ٠**

∴ **٠ = ٤٨ أ + ٨ ب + جـ** ❷

عند س = ١ معادلة المماس ٩ س – ص + ٧ = ٠

∴ م المماس = $\frac{\text{ـ معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = ٩

∴ ٩ = ٣ أ + ٢ب + جـ ❸

∴ ١٢ أ + ٤ ب + جـ = ٠

∴ ٤٨ أ + ٨ ب + جـ = ٠

∴ ٣ أ + ٢ب + جـ = ٩ **بالطرح**

∴ ٤٥ أ + ٦ ب = - ٩ ❹

بالقسمة على ٣ فإن

١٥ أ + ٢ب = - ٣ ❺

وبطرح ❺ من ❹

∴ - ٦ أ = - ٦ ∴ أ = ١

∴ ٩ + ٢ب = - ٩ ∴ ب = - ٩

∴ ١٢ – ٣٦ + جـ = ٠ ∴ جـ = ٢٤

الواجب :

١) أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية

أ) د (س) = س^{٤} ـ ١٨ س^{٢}

ب) د (س) = س + $\frac{٤}{\text{س ـ ١}}$ حيث س ≠ ١

جـ) د (س) = س^{٤} ـ ١٨س^{٢}

د) د (س) = $\begin{cases} \text{٢س + س}^{٢} & \text{س} \geq ٠ \\ \text{٢ س ـ س}^{٢} & \text{س} < ٠ \end{cases}$

٢) إذا كان منحنى الدالة ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٦) وله نقطة حرجة عند (٢ ، ٢) فأوجد أ ، ب ، جـ ، د وبين نوع النقطة الحرجة ؟

٣) عين القيم العظمى والصغرى المحلية وفترات التزايد والتناقص إن وجدت للدالة الآتية د (س) = س^{٣} ـ ٣س^{٢} ـ ٩س

٤) أوجد مواقع القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = ٢س^{٣} ـ ٣س^{٢} ؟

٥) إدرس تزايد وتناقص الدالة د (س) = س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٩س + ١ ثم عين القيم العظمى والصغرى المحلية لها ؟

القيم العظمى والصغرى المطلقة

القيمة العظمى المطلقة للدالة على [أ ، ب] هى أكبر قيمة من قيم الدالة على هذه الفترة .

القيمة الصغرى المطلقة للدالة على [أ ، ب] هى أصغر قيمة من قيم الدالة على الفترة [أ ، ب]

عند تعيين القيم المطلقة على [أ ، ب] نتبع الآتى :ـ

١) نوجد دَ (س)

٢) نوجد قيم س التى عندها دَ (س) = ٠ أو الغير معرفة ∍ [أ ، ب]

٣) نوجد قيم د(س) عند هذه النقط

٤) نوجد د(أ) ، د (ب) قيم الدالة عند الطرفين

٥) أكبر هذه القيم هى عظمى مطلقة وأصغر هذه القيم هى صغرى مطلقة

أمثلة محلولة :ـ

عين القيم العظمى والصغرى المطلقة للدوال الآتية فى الفترة المحددة لها

١) د (س) = ٢س^{٣} – ٣س^{٢} - ١٢س + ١ فى [- ١، ٥]

الإجابة دَ (س) = ٦س^{٢} – ٦س – ١٢ بالقسمة على ٦

∴ س^{٢} – س – ٢ = ٠ ∴ (س – ٢)(س + ١) = ٠

∴ س = ٢ ، س = - ١ ∍ [-١ ، ٥]

بالتعويض فى د (س) عن س = ٢ ، -١ ، ٥

د (٢) = ١٦- ١٢- ٢٤ + ١= - ١٩ **صغرى مطلقة**

د (- ١) = - ٢- ٣ + ١٢+ ١= ٨

د (٥) = ٢٥٠ ـ ٧٥ ـ ٦٠ + ١= ١١٦ **عظمى مطلقة**

---

٢) ص = س + $\frac{١}{س + ٢}$ فى [- ١، ٣]

الإجابة

دَ (س) = ١ ـ $\frac{١}{(س + ٢)^٢}$ = $\frac{(س + ٢)^٢ - ١}{(س + ٢)^٢}$

وبوضع دَ (س) = ٠

∴ س^٢ + ٤ س + ٤ ـ ١= ٠ ∴ س^٢ + ٤ س + ٣ = ٠

∴(س + ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = - ٣ ∌ [- ١، ٣] ، س = - ١ ∍ [- ١ ، ٣]

، دَ (س) غير معرفة عند **(س + ٢)^٢ = ٠**

∴ س = - ٢ ∌ [- ١، ٣] ∴ **نوجد د (- ١) ، د (٣)**

∴ د (- ١) = - ١+ $\frac{١}{-١ + ٢}$ = - ١+ ١ = ٠ **صغرى مطلقة**

د (٣) = ٣ + $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١٦}{٥}$ **عظمى مطلقة**

د (س) = { س^{٣} + ٣ س^{٢} س ≤ ٠ ، س^{٢} ـ ٢ س س >٠ } فى [ـ ٣ ، ٣]

الإجابة

دَ (س) = { ٣س^{٢} + ٦س س < ٠ ، ٢ س ـ ٢ س >٠ }

دَ (س) غير معرفة عند س = ٠ ∍ [- ٣ ، ٣]

وبوضع دَ (س) = ٠ عندما س < ٠ ∴ ٣ س^{٢} + ٦س = ٠

∴ ٣ س (س + ٢) = ٠ ∴ **س = ٠ ، س = - ٢ ∍ [- ٣ ، ٣]**

وعندما س > ٠ ∴ ٢س – ٢ = ٠

∴ س = ١ ∍ [- ٣ ، ٣]

∴ نوجد د (٠) ، د (- ٢) ، د (١) ، د (- ٣) ، د (٣)

د (٠) = ٠ د (١) = ١- ٢ = - ١

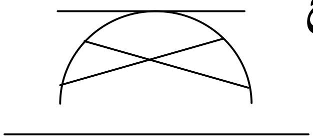
د (٣) = ٩ – ٦ = ٣ د (- ٢) = - ٨ + ١٢= ٤

د (- ٣) = - ٢٧ + ٢٧ = ٠ ∴ **د (١) = - ١ صغرى مطلقة**

، د (- ٢) = ٤ عظمى مطلقة

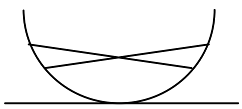
التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب

تعريف(١) :.



يقال لجزء من المنحنى أنه محدب لأعلى إذا كان يقع أعلى جميع الأوتار التى تصل بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء أو أسفل المماسات

تعريف(٢) :.



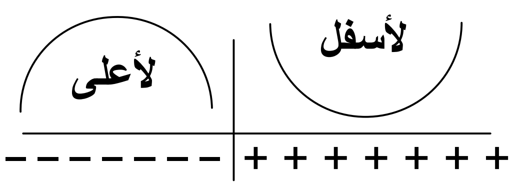
ويقال أنه محدب لأسفل إذا كان المنحنى يقع أسفل الأوتار أو أعلى المماسات

نظرية :.

إذا كانت <u>دً (س) < صفر</u> فى منطقة ما فإن المنحنى يكون محدباً <u>لأعلى</u>

وإذا كانت <u>دً (س) > صفر</u> فى منطقة ما فإن المنحنى يكون محدباً <u>لأسفل</u>

نقط الانقلاب :.



هى النقط التى تفصل بين فترات التحدب لأعلى ولأسفل أو هى النقط التى عندها المنحنى يغير من شكل تحدبه

لتحديد فترات التحدب ونقط الانقلاب نتبع الآتى :-

١) نوجد دَ (س) ، دً (س)

٢) نضع دً (س) = صفر ومنها نوجد قيم س

٣) نبحث إشارة دً (س) حول هذه النقط ومنها نحدد نقط الانقلاب إن وجدت

٤) نعوض فى الدالة لإيجاد ص ونحدد النقط

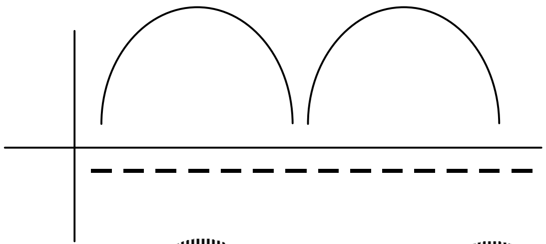
أمثلة محلولة :-

عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب إن وجدت للمنحنيات الآتية :-

١) د (س) = ٧ + ٣س - $س^{٢}$

الإجابة دَ (س) = ٣ – ٢س ، دً (س) = - ٢ **ثابتة**

∴ المنحنى محدباً لأعلى فى ح

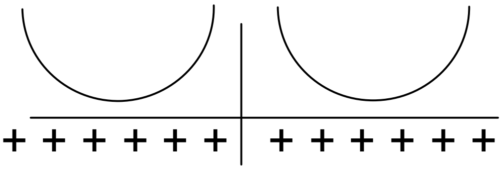


٢) د (س)= $(س – ٣)^{٤}$

الإجابة دَ (س)= ٤$(س – ٣)^{٣}$ ، دً (س) = ١٢$(س – ٣)^{٢}$

بوضع دً (س) = ٠ ∴ $(س – ٣)^{٢}$ = ٠ ∴ **س = ٣**

المنحنى محدباً لأسفل فى ح ولا توجد
نقطة انقلاب عند س = ٣ لان المنحنى
لم يغير من شكل تحدبه



٣) د (س) = س^{٣} – ٩س^{٢} + ٢٤س – ٧

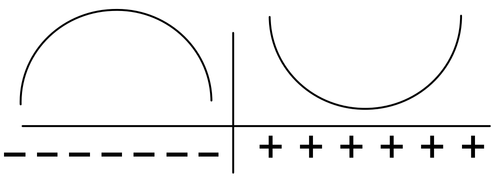
الإجابة دَ (س) = ٣س^{٢} – ١٨س + ٢٤ ، دً (س) = ٦س – ١٨

وبوضع دً (س) = ٠ ∴ ٦ س – ١٨ = ٠ ∴ **س = ٣**

∴ المنحنى محدباً لأعلى]- ∞ ، ٣ [ولأسفل] ٣ ، ∞ [

المنحنى غير من شكل تحدبه عند

س = ٣ ∴ س = ٣ نقطة انقلاب



∴ ص = ٢٧ – ٨١ + ٧٢ - ٧ = ١١

∴ (٣، ١١) نقطة انقلاب

٤) ص = س^{٤} – ٦ س^{٢}

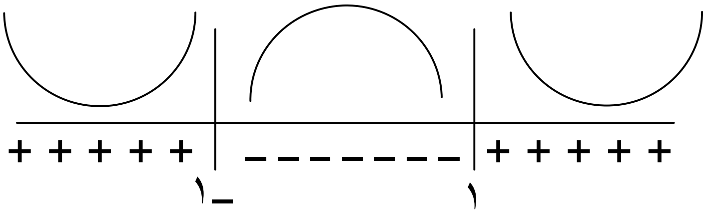
الإجابة صَ = ٤س^{٣} – ١٢س ، صً = ١٢س^{٢} – ١٢

بوضع صً =٠ ∴ ١٢ س^{٢} – ١٢= ٠

∴ س^{٢} = ١ ∴ **س = ١ ، س = - ١**

المنحنى محدباً لأسفل فى ح - [- ١، ١]

المنحنى محدب لأعلى فى]- ١ ، ١ [



عند س = - ١ ∴ ص = ١ – ٦ = - ٥

عند س = ١ ∴ ص = ١ – ٦ = - ٥

∴ **(- ١، - ٥) ، (١، - ٥) نقط انقلاب**

٥) فى الدالة د (س) = س^{٣} – ٩س^{٢} + ٢٤س – ٤ عين

أ) القيم العظمى والصغرى المحلية

ب) فترات التحدب ونقط الانقلاب إن وجدت

جـ) القيم العظمى والصغرى المطلقة فى [- ١، ٥]

الإجابة

∵ د (س) = س^{٣} – ٩ س^{٢} + ٢٤س – ٤

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} – ١٨س + ٢٤ ، دً (س) = ٦س – ١٨

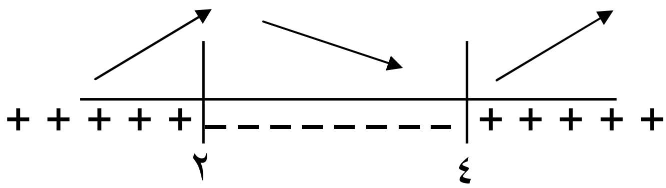
أ) لتعيين القيم العظمى والصغرى المحلية نضع دَ (س) = ٠

∴ ٣س^{٢} – ١٨س + ٢٤ = ٠   ∴ س^{٢} – ٦س + ٨ = ٠

∴ (س – ٢) (س – ٤)= ٠   **∴ س = ٢ ، س = ٤**

تزايدية فى ح - [٢ ، ٤] ، تناقصية فى [٢ ، ٤]

د (٢) = ٨ – ٣٦ + ٤٨ – ٤ = ١٦



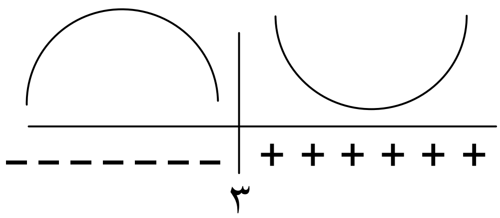
∴(٢ ، ١٦) عظمى محلية

د(٤) = ٦٤- ١٤٤+ ٩٦ – ٤ = ١٢

∴(٤ ، ١٢) صغرى محلية

ب) فترات التحدب والانقلاب :- نضع دً (س) = ٠

∴ ٦س – ١٨ = ٠   **∴ س = ٣**



محدباً لأعلى فى] - ∞ ، ٣ [،

لأسفل فى] ٣ ، ∞ [

د (٣) = ٢٧ – ٨١ + ٧٢ – ٤ = ١٤

(٣ ، ١٤) نقطة انقلاب

جـ) القيم العظمى والصغرى المطلقة :- بوضع دَ (س) = ٠

∴ س = ٢ ، س = ٤ ∈ [- ١ ، ٥]

فنوجد د (٢) ، د (٤) ، د (- ١) ، د (٥)

∴ د (٢) = ١٦ ، د (٤) = ١٢ ، د (- ١) = - ٣٨ **صغرى مطلقة**

د (٥) = ١٦ **عظمى مطلقة**

رسم المنحنيات

لرسم المنحنى ص = د (س) نتبع الآتى :-

١) نوجد دَ (س) ، دً(س)

٢) نضع دَ (س)= ٠ ومنها نحدد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية ومناطق التزايد والتناقص إن وجدت

٣) نضع دً (س) = ٠ ومنها نحدد نوع التحدب ونقط الانقلاب إن وجدت

٤) نعين بعض النقط الأضافية التى تساعد فى الرسم مثل بوضع ص = ٠ أو س = ٠ أو أى قيم أخرى وتفضل حول القيم العظمى والصغرى المحلية

٥) نضع هذه القيم فى جدول ثم نرسم المحاور والدالة

مثال **ارسم منحنى الدالة د (س) = $س^{٣}$ – $٦س^{٢}$ +٩ س +٢**

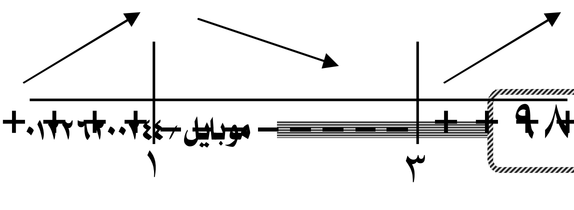
الإجابة

دَ (س) = ٣ $س^{٢}$ – ١٢س + ٩ ، دً (س)= ٦س - ١٢

١) القيم العظمى والصغرى المحلية بوضع دَ (س) = ٠

∴ $٣س^{٢}$ – ١٢س + ٩ = ٠ **بالقسمة على ٣**

∴ $س^{٢}$ – ٤س + ٣ = ٠ ∴ (س – ٣)(س – ١)= ٠



∴ س = ٣ ، س = ١

د (٣) = ٢٧ – ٥٤ + ٢٧ + ٢ = ٢ ∴ (٣ ، ٢) **صغرى محلية**

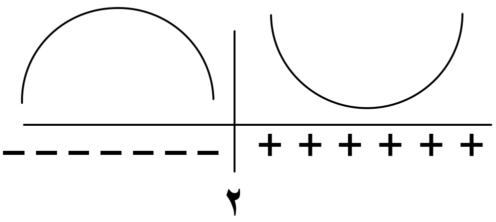
د (١) = ١ – ٦ + ٩ + ٢ = ٦ ∴ (١، ٦) **عظمى محلية**

٢) التحدب والانقلاب بوضع دً (س) = ٠

∴ ٦س – ١٢ = ٠ ∴ س = ٢

د (٢) = ٨ – ٢٤ + ١٨ + ٢ = ٤

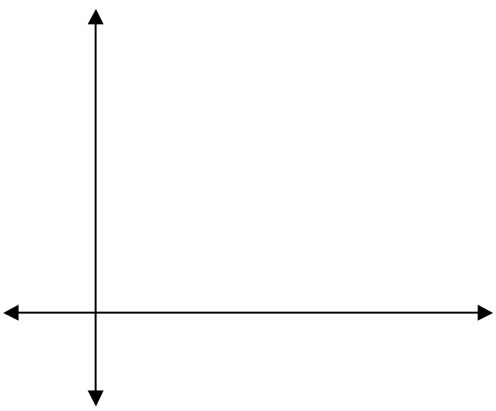
∴ (٢ ، ٤) **نقطة انقلاب**



٣) نقط اضافية

عند س = صفر ∴ ص = ٢ **(٠ ، ٢)**

عند س = ٤ ∴ ص = ٦ **(٤ ، ٦)**



✪ **خطط يومك كل صباح بكتابة الأشياء التى يجب أن تعملها ٠**

✪ **خطط أوقات الراحة وحاول أن تجعلها تتفق مع أوقات الصلاة ٠**

✪ **استفد من وقت الفراغ بالقراءة أو بحفظ القرآن الكريم ٠**

✪ **وفر كل المواد و التلخيصات اللازمة قبل أن تبدأ المذاكرة ٠**

الواجب :

١) احسب القيم العظمى والصغرى المطلقة فى كل مما يأتى : -

أ) د (س) = س^{٣} ـ ١٢ س + ٨ على الفترة [ـ ٣ ، ٥]

ب) د (س) = س^{٣} ـ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ـ ٢ س على الفترة [ـ ١ ، ٢]

٢) ادرس تحدب المنحنى ٢ ص = ٢ س^{٣} ـ ٢٧ س^{٢} + ١٢٠ س

وبين نقط القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الإنقلاب ؟

٣) أوجد قيم أ ، ب ، جـ بحيث يحقق المنحنى

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س الشروط الآتية

أ) للمنحنى نقطة انقلاب عند س = $\frac{١}{٢}$

ب) للمنحنى مماس أفقى عند س = ـ ١

جـ) يمر المنحنى بالنقطة (١ ، ١٣)

٤) عين قيم أ ، ب ، جـ ، د بحيث يكون للمنحنى

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د مماس أفقى عند (١ ، ٣) ، نقطة انقلاب عند (٢ ، ١)

٥) ارسم منحنى كل من الدوال التالية مع تفصيل خطوات الحل

أ) د (س) = س^{٣} ـ ٣ س^{٢} + ٤ ب) د (س) = (س^{٢} ـ ١)^{٢}

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى المطلقة

الهدف هو إيجاد أكبر أو أصغر قيمة لشئ معين (مساحة – حجم – ربح – طول – مجموع) لذلك نتبع الآتى :-

١) نوجد علاقة بين المتغير المراد ايجاد أكبر أو أصغر قيمة له ومتغيرات المسألة

٢) نجعل هذه العلاقة بين المتغير ومتغير واحد من متغيرات المسألة

٣) نحدد مجال هذا المتغير فنحصل على الفترة التى ∍ متغير المسألة

٤) نوجد مشتقة هذا المتغير بالنسبة لمتغير المسألة

٥) نضع هذه المشتقة = صفر ومنها نوجد النقط الحرجة والتى تنتمى إلى الفترة المحددة

٦) نوجد قيمة هذا المتغير عند هذه القيم وعند الأطراف ومنها نحدد أكبر أو أصغر القيم

أمثلة محلولة :-

مثال سلك طوله ١٥سم يراد تقسيمه إلى جزأين بحيث يكون مجموع مربع الأول وأربعة أمثال مكعب الأخر أقل مايمكن . فما طول كل جزء ؟

الإجابة

نفرض أن السلك انقسم إلى جزأين أحدهما **س** ، الأخر **١٥ ـ س** ،

نفرض أن **المجموع = م**

∴ $\text{م} = ٤\,\text{س}^{٣} + (١٥ - \text{س})^{٢}$ حيث $\text{س} \in [\,٠ \text{ ، } ١٥\,]$

∴ $\frac{\text{ء م}}{\text{ء س}} = ١٢\text{س}^{٢} + ٢(١٥ - \text{س}) \times -١$

$= ١٢\text{س}^{٢} - ٢(١٥ - \text{س}) = ١٢\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣٠$

وبوضع $\frac{\text{ء م}}{\text{ء س}} = \text{صفر}$ ∴ $١٢\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ٣٠ = ٠$

∴ $٦\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٥ = ٠$ ∴ $(٢\text{س} - ٣)(٣\text{س} + ٥) = ٠$

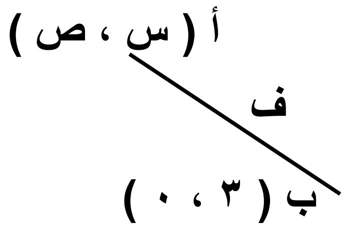
∴ $\text{س} = \frac{٣}{٢}$ ، $\text{س} = \frac{-٥}{٣}$ **مرفوض**

∴ الأجزاء طولها ١,٥سم ، ١٣,٥ سم

مثال **أوجد نقطة على المنحنى $\text{ص}^{٢} = ٢\,\text{س} + ١$ بحيث تكون المسافة بينهما وبين النقطة (٣ ، ٠) أقل ما يمكن ؟**

الإجابة **نفرض أن احداثيا النقطة هى (س ، ص) والبعد بينهما = ف**

$\text{ف} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$



∴ $ف^2 = (س - ٣)^2 + (ص - ٠)^2$

∴ $ف^2 = س^2 - ٦س + ٩ + ص^2$ **وبالتعويض عن ص**

∴ $ف^2 = س^2 - ٤س + ١٠$ **بالتفاضل**

∴ $٢ف \frac{ءف}{ءس} = ٢س - ٤$ وبوضع $\frac{ءف}{ءس} =$ صفر

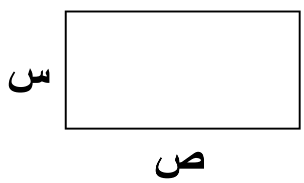
∴ $٢س - ٤ = ٠$ ∴ **س = ٢**

∴ $ص^2 = ٤ + ١ = ٥$ ∴ $ص = \pm \sqrt{٥}$

∴ **النقط هى $(٢ ، \sqrt{٥})$ ، $(٢ ، -\sqrt{٥})$**

مثال **سلك طوله ٢٠٠سم . ثنى ليكون أضلاع مستطيل . أوجد أبعاد المستطيل لكى تكون مساحته أكبر مايمكن ؟**

الإجابة **نفرض أن الطول = ص ، العرض = س**



والمساحة = م ∴ **م = س ص**

محيط المستطيل = طول السلك = ٢٠٠ سم

∴ **محيط المستطيل = ٢ (س + ص)**

∴ ٢س + ٢ص = ٢٠٠ ∴ س + ص = ١٠٠

∴ **ص = ١٠٠ - س** **وبالتعويض فى م**

∴ م = س (١٠٠- س) = ١٠٠س – س^{٢} **وبالتفاضل**

∴ $\frac{ء م}{ء س}$ = ١٠٠- ٢ س وبوضع $\frac{ء م}{ء س}$ = صفر

∴ ١٠٠ – ٢س = ٠ ∴ ١٠٠ = ٢ س

∴ س = ٥٠ ، ص = ٥٠

∴ بعدى المستطيل = ٥٠ سم ، ٥٠ سم

∴ أكبر مساحة = ٥٠ × ٥٠ = ٢٥٠٠ سم^{٢}

مثال **إذا كانت تكاليف الوحدة من إنتاج مصنع ما هى ٥٠ جنيها فإذا بيعت الوحدة بسعر س جنيها فإن عدد الوحدات المباعة = ٩ (١٠٠- س) + $\frac{٣٠٠}{س - ٥٠}$ أوجد ثمن الوحدة للحصول على أكبر ربح ممكن ؟**

الإجابة

∵ التكاليف = ٥٠ جنيها ، ثمن البيع = س

∴ الربح فى الوحدة = س – ٥٠

الربح الكلى = ربح الوحدة × عدد الوحدات المباعة

∴ ر = (س – ٥٠) [٩ (١٠٠ - س) + $\frac{٣٠٠}{س - ٥٠}$]

∴ ر = ٩(س – ٥٠) (١٠٠- س) + ٣٠٠

$\therefore$ ر = ٩٠٠ س ـ ٩س^{٢} ـ ٤٥٠٠٠ + ٤٥٠ س +٣٠٠

$\therefore$ ر = ١٣٥٠س ـ ٩س^{٢} ـ ٤٤٧٠٠ **وبالتفاضل**

$\therefore \frac{ء ر}{ء س}$ = ١٣٥٠ ـ ١٨ س وبوضع $\frac{ء ر}{ء س}$ = صفر

$\therefore$ ١٣٥٠ = ١٨س $\therefore$ **س = ٧٥ جنيهاً**

مثال **قطعة من السلك طولها ١٠٠سم قسمت إلى جزأين ثم ثنى الجزء الأول على شكل مربع والثانى على شكل دائرة . أوجد طول كل جزء بحيث يكون مجموع مساحتى سطحى الشكلين أقل ما يمكن ؟**

الإجابة

نفرض أن طول ضلع المربع = ل ، نصف قطر الدائرة = نق

$\therefore$ م = ل^{٢} + ط نق^{٢}

$\because$ **محيط المربع + محيط الدائرة = ١٠٠**

$\therefore$ ٤ ل + ٢ ط نق = ١٠٠ $\therefore$ ٢ ل + ط نق = ٥٠

$\therefore$ ل = $\frac{\text{٥٠ ـ ط نق}}{٢}$ ، $\therefore$ م = $\left(\frac{\text{٥٠ ـ ط نق}}{٢}\right)^{٢}$ + ط نق^{٢}

$\therefore$ م = (٢٥ ـ $\frac{ط}{٢}$ نق)^{٢} + ط نق^{٢}

$\therefore$ م = ٦٢٥ ـ ٢٥ ط نق + $\frac{ط^{٢}}{٤}$ نق^{٢} + ط نق^{٢} **بالتفاضل**

∴ $\frac{\text{ء م}}{\text{ء نق}}$ = ـ ٢٥ ط + $\frac{١}{٢}$ ط^{٢} نق + ٢ ط نق وبوضع $\frac{\text{ء م}}{\text{ء نق}}$ = صفر

∴ صفر = - ٢٥ + $\frac{\text{ط}}{٢}$ نق + ٢ نق ∴ $\frac{\text{ط}}{٢}$ نق + ٢ نق = ٢٥

∴ نق ($\frac{\text{ط}}{٢}$ + ٢) = ٢٥

∴ نق = $\frac{٥٠}{\text{ط} + ٤}$ ، ل = $\frac{١٠٠}{\text{ط} + ٤}$

مثال **إذا كانت تكاليف استهلاك الوقود لقاطرة تتناسب مع مربع سرعتها وكانت هذه التكاليف ٢٥ جنيه فى الساعة عندما تكون السرعة ٢٥ كم / ساعة كما أن هناك تكلفة أضافية تقدر بمائة جنيه فى الساعة بصرف النظر عن سرعتها . أوجد سرعة القاطرة لتكون تكلفة الكيلو متر الواحد أقل ما يمكن ؟**

الإجابة **نفرض أن التكاليف = ت ، السرعة = ع**

∵ ت $\propto$ ع^{٢} ∴ **ت = أ ع^{٢}**

∵ ت = ٢٥ عندما ع = ٢٥ ∴ أ = $\frac{١}{٢٥}$

∴ ت = $\frac{\text{ع}^{٢}}{٢٥}$ ، ت فى الساعة = $\frac{\text{ع}^{٢}}{٢٥}$ + ١٠٠

∵ السيارة تقطع مسافة = ع كم فى الساعة

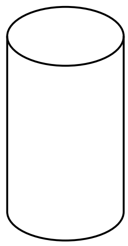
$\therefore$ ت للكيلو الواحد $= \dfrac{\text{ت الكلية}}{\text{المسافة}} = \dfrac{\text{ت الكلية}}{\text{ع}}$

$\therefore$ ت للكيلو الواحد $= \dfrac{\text{ع}}{٢٥} + \dfrac{١٠٠}{\text{ع}}$ **وبالتفاضل**

$\therefore \dfrac{\text{ء ت}}{\text{ء ع}} = \dfrac{١}{٢٥} - \dfrac{١٠٠}{\text{ع}^٢}$ وبوضع $\dfrac{\text{ء ت}}{\text{ء ع}} =$ صفر

$\therefore \dfrac{\text{ع}^٢ - ٢٥٠٠}{٢٥\,\text{ع}^٢} =$ صفر ، $\therefore$ ع$^٢ = ٢٥٠٠$ $\therefore$ **ع = ٥٠ كم / ساعة**

مثال **إناء أسطواني الشكل بدون غطاء مساحته الكلية ٤٦٢ سم^٢**
أوجد نصف قطر قاعدته عندما تكون السعة نهاية عظمى ؟



الإجابة **نفرض أن نصف قطر الأسطوانة = نق ،**

ارتفاعها = ع ، مساحته السطحية = م

م = ط نق^٢ + ٢ ط نق ع

٤٦٢ = ط نق^٢ + ٢ط نق ع

$\therefore$ ع $= \dfrac{٤٦٢ - \text{ط نق}^٢}{٢\ \text{ط نق}}$ ، **ونفرض أن الحجم = ح**

$\therefore$ ح = ط نق^٢ ع = ط نق^٢ $\left(\dfrac{٤٦٢ - \text{ط نق}^٢}{٢\ \text{ط نق}}\right)$

$\therefore$ ح = ٢٣١نق $- \dfrac{\text{ط نق}^٣}{٢}$ **وبالتفاضل**

$\therefore \dfrac{\text{ء ح}}{\text{ء نق}} = ٢٣١ - \dfrac{٣}{٢}$ ط نق^٢ وبوضع $\dfrac{\text{ء ح}}{\text{ء نق}} =$ صفر

∴ $\frac{٣}{٢}$ ط نق^{٢} = ٢٣١ ∴ $\frac{٣}{٢} \times \frac{٢٢}{٧}$ نق^{٢} = ٢٣١

∴ نق^{٢} = ٤٩ سم ∴ نق = ٧ سم

مثال عددان غير سالبين مجموعهما = ١٦ أوجد العددين إذا كان مجموع مربعيهما أصغر مايمكن ؟

الإجابة نفرض أن العددين هما س ، ١٦- س

ومجموع مربعيهما = ص ∴ ص = س^{٢} + (١٦- س)^{٢}

∴ ص = س^{٢} + ٢٥٦ – ٣٢ س + س^{٢}

∴ ص = ٢س^{٢} – ٣٢ س + ٢٥٦ ، س ∍ [٠ ، ١٦]

∴ صَ = ٤ س – ٣٢ وبوضع صَ = صفر

∴ ٤ س – ٣٢ = ٠ ∴ ٤ س = ٣٢ ∴ س = ٨

∴ د (٠) = ٢٥٦ ، د (٨) = ١٢٨ ، د (١٦) = ٢٥٦

∴ أصغر قيمة لمجموع المربعين = ١٢٨ ونحصل عليه عندما س = ٨

أى عندما يكون العددان هما ٨ ، ٨

الواجب :

١) أوجد عددين موجبين مجموعهما ١٢ بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟

٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل محاطة بسور طوله ١٢٠ سم . أوجد بعديها إذا كان مساحة سطحها أكبر ما يمكن ؟

٣) صفيحة معدنية على شكل مستطيل بعداه ١٠ سم ، ١٦ سم . قطعت من أركانها الأربعة ٤ مربعات متساوية ثم ثنيت الأجزاء البارزة لتكون صندوقاً على شكل متوازى مستطيلات بدون غطاء . أوجد طول ضلع المربع المقطوع ليكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن ؟

٤) أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة إذا كانت المساحة الكلية لسطحها تساوى ٢٤ ط سم^{٢} ؟

٥) قطعة معدنية على شكل قطاع دائرى محيطه ٣٠ سم . أوجد طول نصف قطر دائرته الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن ؟

٦) نافذة على هيئة مستطيل يعلوه مثلث متساوى الساقين تنطبق قاعدته على أحد بُعدى المستطيل فإذا كان ارتفاع المثلث $\frac{٣}{٨}$ طول قاعدته ومحيط النافذة ١٢٠ سم فأوجد بعدى المستطيل التى تجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن ؟

التكامل وتطبيقاته

التكامل عملية عكسية للتفاضل

أى أن   ص = د (س) $\rightleftarrows$ دَ (س)

قاعدة :ـ

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\ \text{د س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$$
حيث ن ≠ ـ ١ ، ث يسمى ثابت التكامل

مثال :ـ $\int \text{س}^{5}\ \text{د س} = \frac{\text{س}^{6}}{6} + \text{ث}$

أمثلة محلولة :ـ   أوجد قيمة التكاملات الآتية : ـ

١) $\int 7\ \text{د س} = 7\ \text{س} + \text{ث}$

٢) $\int 14\ \text{س}^{-8}\ \text{ء س} = \frac{14\ \text{س}^{-7}}{-7} + \text{ث} = -2\ \text{س}^{-7} + \text{ث}$

٣) $\int \sqrt[3]{\text{ع}^{2}}\ \text{ءع} = \int \text{ع}^{\frac{2}{3}}\ \text{ء ع} = \frac{3}{5}\ \text{ع}^{\frac{5}{3}} + \text{ث}$

تكامل مجموع وفرق الدوال :ـ

$$\int \text{د (س)} \pm \text{ر (س) ء س} = \int \text{د (س) ء س} \pm \int \text{ر (س) ء س}$$

تكامل حاصل الضرب وخارج القسمة :ـ

لا يوجد وإنما تحول إلى مجموع وفرق دوال

أمثلة محلولة :.

أوجد قيمة التكاملات الآتية : -

١) $\int$ (٤ س^{٣} ـ ٣ س^{٢} + ٢ س ـ ١) ء س

الإجابة

$\int$ (٤ س^{٣} ـ ٣ س^{٢} + ٢ س ـ ١) ء س = س^{٤} ـ س^{٣} + س^{٢} ـ س + ث

٢) $\int$ (٤ س$^{-٥}$ + ٢ س$^{-٣}$ ـ س$^{-٢}$ + ١) ء س

= ـ س$^{-٤}$ ـ س$^{-٢}$ + س$^{-١}$ + س + ث

٣) $\int$ (٣ $\sqrt{\text{س}}$ + س + $\frac{٣}{\sqrt{\text{س}}}$) ء س = $\int$ (٣ س$^{\frac{١}{٢}}$ + س + ٣ س$^{\frac{-١}{٢}}$) ء س

= ٢ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ س$^{\frac{١}{٢}}$ + ث

٤) $\int$ (٧ س ـ ٣) (س + ١) ء س = $\int$ (٧ س^{٢} + ٤ س ـ ٣) ء س

= $\frac{٧}{٣}$ س^{٣} + ٢ س^{٢} ـ ٣ س + ث

٥) $\int$ (٢ س ـ ٥) (س^{٢} ـ ٥ س + ٣) ء س

= $\int$ (٢ س^{٣} ـ ١٠ س^{٢} + ٦ س ـ ٥ س^{٢} + ٢٥ س ـ ١٥) ء س

$= \int (٢ س^٣ - ١٥ س^٢ + ٣١ س - ١٥)\ ء س$

$= \frac{١}{٢} س^٤ - ٥ س^٣ + \frac{٣١}{٢} س^٢ - ١٥ س + ث$

---

٦) $\int \frac{(٥ س^٣ - ١٥ س)^٢}{٢٥ س^٢}\ ء س$

$= \int \frac{[٥ س (س^٢ - ٣)]^٢}{٢٥ س^٢}\ ء س = \int \frac{٢٥ س^٢ (س^٢ - ٣)^٢}{٢٥ س^٢}\ ء س$

$= \int (س^٤ - ٦ س^٢ + ٩)\ ء س = \frac{١}{٥} س^٥ - ٢ س^٣ + ٩ س + ث$

---

٧) $\int س^٢ \left(\frac{س^٣ - ١}{س^٢ + س + ١}\right)^٢ ء س$ بالتحليل

$= \int س^٢ \left(\frac{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{س^٢ + س + ١}\right)^٢ ء س$

$= \int س^٢ (س^٢ - ٢ س + ١)\ ء س = \frac{١}{٥} س^٥ - \frac{١}{٢} س^٤ + \frac{١}{٣} س^٣ + ث$

---

٨) $\int \frac{\sqrt{س}\ (س - ١)}{\sqrt{س} + ١}\ ء س$ بتحليل القوس

$= \int \frac{\sqrt{س}\ (\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)}{\sqrt{س} + ١}\ ء س = \int (س - س^{\frac{١}{٢}})\ ء س$

$= \frac{١}{٢} س^٢ - \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

قاعدة :. $\int (أ س + ب)^{ن} \, ء س = \frac{(أ س + ب)^{ن + ١}}{(ن + ١) \times أ} + ث$

أمثلة محلولة :.

أوجد قيمة التكاملات الآتية : -

١) $\int (٢ س + ٣)^{٧} \, ء س = \frac{(٢ س + ٣)^{٨}}{١٦} + ث$

٢) $\int (٧ + ٤ س)^{-٣} \, ء س = \frac{-١}{٨} (٧ + ٤ س)^{-٢} + ث$

٣) $\int \sqrt{(٤ - ٧ س)^{٣}} \, ء س = \int (٤ - ٧ س)^{\frac{٣}{٢}} \, ء س$

$= \frac{-٢ (٤ - ٧ س)^{\frac{٥}{٢}}}{٣٥} + ث$

٤) $\int (٤ س^{٢} - ١٢ س + ٩)^{\frac{٧}{٢}} \, ء س = \int [(٢ س - ٣)^{٢}]^{\frac{٧}{٢}} \, ء س$

$= \int (٢ س - ٣)^{٧} \, ء س = \frac{(٢ س - ٣)^{٨}}{١٦} + ث$

٥) $\int \frac{س + ٣}{(س + ١)^{٥}} \, ء س$ **بتجزيئ البسط مثل المقام**

$= \int \frac{س + ١ + ٢}{(س + ١)^{٥}} \, ء س = \int \frac{س + ١}{(س + ١)^{٥}} \, ء س + \int \frac{٢}{(س + ١)^{٥}} \, ء س$

$= \int [(س + ١)^{-٤} + ٢ (س + ١)^{-٥}]$ ء س

$= \frac{-١}{٣} (س + ١)^{-٣} - \frac{١}{٢} (س + ١)^{-٤} +$ ث

---

٦) $\int س^{١٤} (\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س})^{٧}$ ء س

$= \int [س^{٢} (\frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س})]^{٧}$ ء س $= \int (٢ - ٣ س)^{٧}$ ء س

$= \frac{(٢ - ٣ س)^{٨}}{٨ \times -٣} +$ ث $= \frac{-١}{٢٤} (٢ - ٣ س)^{٨} +$ ث

---

٧) $\int (٢ - ٣ س) \sqrt[٣]{(٢ - ٣ س)^{٣}}$ ء س

$= \int (٢ - ٣ س) (٢ - ٣ س)^{\frac{٣}{٢}}$ ء س $= \int (٢ - ٣ س)^{\frac{٥}{٢}}$ ء س

$= \frac{-٢}{٢١} (٢ - ٣ س)^{\frac{٧}{٢}} +$ ث

---

٨) $\int \frac{٢ س - ٥}{(س - ٥)^{٣}}$ ء س بأخذ ٢ عامل مشترك من البسط

$= ٢ \int \frac{س - ٢,٥}{(س - ٥)^{٣}}$ ء س بإضافة $\pm ٢,٥$

$= ٢ \int \frac{س - ٥ + ٢,٥}{(س - ٥)^{٣}}$ ء س $= ٢ \int (س - ٥)^{-٢} + \frac{٥}{٢} (س - ٥)^{-٣}$ ء س

$= ٢ [-(س - ٥)^{-١} - \frac{٥}{٤} (س - ٥)^{-٢}] +$ ث

$= -2\,(س - ٥)^{-١} - \frac{٥}{٢}(س - ٥)^{-٢} + ث$

** **لتعيين ثابت التكامل نتبع الآتى :ـ**

١) نوجد تكامل المشتقة ونكون علاقة بين **س ، ص**

٢) التعويض بالقيمة المعطاه لهما معاً فنوجد ثابت التكامل

مثال **أوجد الدالة التى مشتقتها الأولى = $٣ - ٢\,س^{-٢} + ٢\,س^{-٣}$**
حيث س ≠ صفر علماً بأن الدالة تساوى ٢ عندما س = $\frac{١}{٢}$ ؟

الإجابة **نفرض أن الدالة هى ص**

$\therefore$ ص $= \int (٣ - ٢\,س^{-٢} + ٢\,س^{-٣})\,ء\,س$

$\therefore$ ص $= ٣\,س + ٢\,س^{-١} - س^{-٢} + ث$

$\therefore$ ص $= ٣\,س + \frac{٢}{س} - \frac{١}{س^{٢}} + ث$

$\because$ ص = ٢ عندما س = $\frac{١}{٢}$ **بالتعويض فى المعادلة ص**

$\therefore ٢ = \frac{٣}{٢} + ٤ - ٤ + ث \qquad \therefore ث = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ ص $= ٣\,س + \frac{٢}{س} - \frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{٢}$

مثال **إذا كانت** $\frac{ء\,ص}{ء\,س} = \frac{٢\,س + ٧}{٣ - ٢\,ص}$ **وكانت ص = ٣ عندما س = ١**

فاوجد العلاقة بين ص ، س ؟

الإجابة بالتكامل بفصل المتغيرات

$\therefore$ ∫ (٣ ـ ٢ ص) ء ص = ∫ (٢ س + ٧) ء س

$\therefore$ ٣ ص ـ ص^{٢} = س^{٢} + ٧ س + ث ❶

$\because$ ص = ٣ عند س = ١ بالتعويض فى ❶

$\therefore$ ٩ ـ ٩ = ١ + ٧ + ث $\therefore$ ث = ـ ٨

$\therefore$ العلاقة هى ٣ ص ـ ص^{٢} = س^{٢} + ٧ س ـ ٨

$\therefore$ س^{٢} + ص^{٢} + ٧ س ـ ٣ ص ـ ٨ = صفر

مثال إذا كانت $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ = ٦ س^{٢} ـ ٥ وكانت $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ـ ٣ ،

ص = ٢ عندما س = ١ فأوجد قيمة ص عندما س = ٢ ؟

الإجابة $\because$ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ∫ دً (س) ء س = ∫ (٦ س^{٢} ـ ٥) ء س

$\therefore$ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٢ س^{٣} ـ ٥ س + ث ، $\because$ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ـ ٣ ، س = ١

$\therefore$ ـ ٣ = ٢ ـ ٥ + ث $\therefore$ ث = صفر

$\therefore$ ص = ∫ (٢ س^{٣} ـ ٥ س) ء س

$\therefore$ ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٤} ـ $\frac{٥}{٢}$ س^{٢} + ث $\because$ ص = ٢ عندما س = ١

$\therefore\ ٢ = \frac{١}{٢} - \frac{٥}{٢} + \text{ث}$ $\qquad$ $\therefore$ ث = ٤

$\therefore\ \text{ص} = \frac{١}{٢}\text{س}^{٤} - \frac{٥}{٢}\text{س}^{٢} + ٤$ وعند س = ٢ فإن

$\therefore$ ص = ٨ ـ ١٠ + ٤ = ٢

الواجب :

احسب قيمة التكاملات الآتية : ـ

١) $\int ٥\ \text{ءس}$ $\qquad$ ٢) $\int (\text{س}^{٢} - ٥\ \text{س}^{٣} + ٣)\ \text{ءس}$

٣) $\int (\text{س}^{\frac{٣}{٤}} - \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ١)\ \text{ءس}$

٤) $\int \frac{٨\ \text{س}^{٣} - ٢٧}{٢\ \text{س} - ٣}\ \text{ءس}$ $\qquad$ ٥) $\int \frac{(\text{س}^{٢} - ٥\ \text{س} + ٦)}{\text{س} - ٢}\ \text{ءس}$

٦) $\int (٣\ \text{س} - ٧)^{٦}\ \text{ءس}$ $\qquad$ ٧) $\int \text{س}^{٢}\ (\text{س} + ٤)^{٢}\ \text{ءس}$

٨) $\int \text{س}\sqrt{\frac{٣}{\text{س}^{٢}} - \frac{٥}{\text{س}}}\ \text{ءس}$ $\qquad$ ٩) $\int \text{س}^{٥}\ (٣ - \frac{٢}{\text{س}})^{٥}\ \text{ءس}$

١٠) $\int (٢٥ - ٢٠\text{س} + ٤\text{س}^{٢})^{\frac{٢}{٥}}\ \text{ءس}$

التطبيقات الهندسية

∵ ميل المماس للمنحنى = دَ (س) = $\frac{ء ص}{ء س}$

∴ ص = ∫ دَ (س) ء س = ∫ ميل المماس ء س

وتسمى بمعادلة عائلة المنحنيات لأنها تختلف باختلاف ثابت التكامل .

ولتعيين المنحنى المطلوب لابد من معرفة نقطة ($س_١$ ، $ص_١$) تحقق معادلته .

مثال أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (ـ ٢ ، ٨) وميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى (٣ س ـ ٢) (س + ٢) ؟

الإجابة ∵ $\frac{ء ص}{ء س}$ = (٣ س ـ ٢) (س + ٢)

∴ ص = ∫ (٣ س ـ ٢) (س + ٢) ء س = ∫ (٣ $س^٢$ + ٤ س ـ ٤) ء س

∴ ص = $س^٣$ + ٢ $س^٢$ ـ ٤ س + ث

∵ (ـ ٢ ، ٨) ∈ للمنحنى ∴ تحقق معادلته

∴ ٨ = ـ ٨ + ٨ + ٨ + ث ∴ ث = صفر

∴ معادلة المنحنى هى ص = $س^٣$ + ٢ $س^٢$ ـ ٤ س

مثال إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى ٣ س^{٢} ـ ٦ س ـ ٩ فأوجد معادلة المنحنى إذا علمت أن الإحداثى الصادى لنقطة القيمة العظمى المحلية له هى ١٥ ثم أوجد نقطة القيمة الصغرى المحلية للمنحنى ؟

الإجابة ∵ دَ (س) = ٣ س^{٢} ـ ٦ س ـ ٩

∴ دً (س) = ٦ س ـ ٦

ونضع دَ (س) = صفر لأن المنحنى له قيمة عظمى محلية

∴ ٣ س^{٢} ـ ٦ س ـ ٩ = ٠ ÷ ٣

∴ س^{٢} ـ ٢ س ـ ٣ = ٠ ∴ (س ـ ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ ، س = ـ ١

وعندما س = ٣ فإن دً (٣) = ١٢ > ٠

∴ عند س = ٣ توجد قيمة صغرى محلية

وعندما س = ـ ١ فإن دً (ـ ١) = ـ ١٢ < ٠

∴ عند س = ـ ١ توجد قيمة عظمى محلية

∵ الإحداثى الصادى لنقطة القيمة العظمى المحلية = ١٥

∴ (ـ ١ ، ١٥) ∋ للمنحنى ∵ دَ (س) = ٣ س^{٢} ـ ٦ س ـ ٩

∴ د (س) = ∫ (٣ س^{٢} ـ ٦ س ـ ٩) ء س

∴ ص = $س^٣$ ـ ٣ $س^٢$ ـ ٩ س + ث

∵ (ـ ١ ، ١٥) ∍ للمنحنى فهى تحقق معادلته

∴ ١٥ = ـ ١ ـ ٣ + ٩ + ث ∴ ث = ١٠

∴ معادلة المنحنى هى ص = $س^٣$ ـ ٣ $س^٢$ ـ ٩ س + ١٠

∵ س = ٣ عند نقطة القيمة العظمى المحلية

∴ ص = $(٣)^٣$ ـ ٣ $(٣)^٢$ ـ ٩ × ٣ + ١٠ = ـ ١٧

∴ (٣ ، ـ ١٧) هى نقطة القيمة الصغرى المحلية

مثال أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بنقطة الأصل إذا عُلم أن

١) ميل المماس له عند أى نقطة عليه = ٣ أ $س^٢$ + ٢ ب س + ٩

حيث أ ، ب ثابتان

٢) المماس له عند س = ـ ٣ يوازى محور السينات

٣) عند س = ـ ٢ توجد نقطة انقلاب

الإجابة ∵ ميل المماس = ٣ أ $س^٢$ + ٢ ب س + ٩

∵ الانقلاب عند دً (س) ∴ دً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

∵ س = ـ ٢ نقطة انقلاب ∴ دً (ـ ٢) = صفر

∴ ـ ١٢ أ + ٢ ب = ٠ ∴ ب = ٦ أ ❶

∵ عند س = ـ ٣ ∴ المماس // محور السينات

أى أن دَ (ـ ٣) = ٠ ∴ ٢٧ أ ـ ٦ ب + ٩ = ٠ ❷

وبالتعويض من ❶ ∴ ٢٧ أ ـ ٣٦ أ + ٩ = ٠ ∴ ٩ أ = ٩

∴ أ = ١ ∴ ب = ٦

∴ م المماس = ٣ س^{٢} + ١٢ س + ٩

∴ ص = ∫ (٣ س^{٢} + ١٢ س + ٩) ء س

∴ ص = س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٩ س + ث

∵ (٠ ، ٠) ∋ للمنحنى فهى تحقق معادلته

∴ ٠ = ٠ + ٠ + ٠ + ث ∴ ث = ٠

∴ المعادلة هى ص = س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٩ س

مثال إذا كان معدل التغير فى مساحة مستطيل (م) بالنسبة للزمن (ن) يعطى من العلاقة $\frac{ء م}{ء ن}$ = ٠,٠٦ ن ـ ٠,٥ وكانت مساحة الصفيحة عند بداية التغير = ٥٠ م^{٢} أوجد مساحة المستطيل بعد ١٠ ثوانى ؟

الإجابة ∵ $\frac{ء م}{ء ن}$ = ٠,٠٦ ن ـ ٠,٥ بالتكامل

∴ م = ∫ (٠,٠٦ ن ـ ٠,٥) ء ن = ٠,٠٣ ن^{٢} ـ ٠,٥ ن + ث

وعند بدء التغير أى عند ن = ٠ فإن م = ٥٠

∴ ٥٠ = ٠ ـ ٠ + ث ∴ ث = ٥٠

∴ م = ٠,٠٣ ن^{٢} ـ ٠,٥ ن + ٥٠ وعند ن = ١٠ فإن

م = ٠,٠٣ × ١٠ ^{٢} ـ ٠,٥ × ١٠ + ٥٠ = ٤٨ م^{٢}

مثال اشتركت متسابقتان لمدة أربعة دقائق فى الكتابة على الآلة الكاتبة فكانت سرعة المتسابقة الأولى تعطى من العلاقة

$\frac{ءس}{ءن}$ = ـ ٦ ن^{٢} + ١٢ ن + ٩٠ كلمة / دقيقة حيث س عدد الكلمات التى تكتبها خلال زمن ن دقيقة ، سرعة المتسابقة الثانية تعطى من العلاقة $\frac{ءص}{ءن}$ = ـ ٦ ن^{٢} + ١٥ ن + ٨٥ كلمة / دقيقة حيث ص عدد الكلمات التى تكتبها المتسابقة الثانية خلال زمن ن دقيقة . أى المتسابقتين تكتب كلمات أسرع من الأخرى ؟

الإجابة ∵ $\frac{ءس}{ءن}$ = ـ ٦ ن^{٢} + ١٢ ن + ٩٠

∴ س = ∫ (ـ ٦ ن^{٢} + ١٢ ن + ٩٠) ء ن

∴ س = ـ ٢ ن^{٣} + ٦ ن^{٢} + ٩٠ ن + ث$_{١}$

∵ عند ن = ٠ تكون س = ٠ ∴ ث$_{١}$ = ٠

∴ س = ـ ٢ ن^{٣} + ٦ ن^{٢} + ٩٠ ن

∵ $\frac{ءص}{ءن}$ = ـ ٦ ن^{٢} + ١٥ ن + ٨٥

∴ ص = ∫ (ـ ٦ ن^{٢} + ١٥ ن + ٨٥) ء ن

∴ ص = ـ ٢ ن^{٣} + $\frac{١٥}{٢}$ ن^{٢} + ٨٥ ن + ث$_{٢}$

∵ عند ن = ٠ تكون ص = ٠ ∴ ث$_{٢}$ = صفر

∴ ص = ـ ٢ ن^{٣} + $\frac{١٥}{٢}$ ن^{٢} + ٨٥ ن وعند ن = ٤

∴ س = ـ ٢ × ٦٤ + ٦ × ١٦ + ٩٠ × ٤ = ٣٢٨ كلمة

∴ ص = ـ ٢ × ٦٤ + $\frac{١٥}{٢}$ × ١٦ + ٨٥ × ٤ = ٣٣٢ كلمة

∴ المتسابقة الثانية أسرع من المتسابقة الأولى

الواجب :

١) أوجد معادلة المنحنى للدالة ص = د (س) الذى ميله عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى ـ س^{٢} إذا كان د (٠) = ٦

٢) إذا كان ميل المنحنى ص = د (س) عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى س (٢ س ـ ١) فأوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (١ ، ـ ٣)

٣) إذا كان $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ = س^{٢} ـ ١ عند كل نقطة (س ، ص) من منحنى

ما فأوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١ ، ١) ويمس المستقيم س + ٢ ص = ٣ عند النقطة (١ ، ١)

٤) إذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = د (س) هو ٦ $س^٢$ ــ ٣٠ س + ٣٦ فأوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن قيمة ص عند نقطة القيمة العظمى المحلية له تساوى ٢٨ . وأوجد كذلك نقطة القيمة الصغرى المحلية ؟

٥) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س - ٣}{٥ - ٢ص}$$ وكانت د (١) = ٢

٦) منحنى ميل العمودى عند أى نقطة عليه إحداثيها السينى س هو $\frac{-١}{٢س - ٦}$ أوجد معادلته إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (٤ ، ٥)

تكامل الدوال المثلثية

١) ∫ جا س ء س = ـ جتا س + ث

٢) ∫ جتا س ء س = جا س + ث

٣) ∫ قا^{٢} س ء س = ظا س + ث

٤) ∫ جا (أ س + ب) ء س = $\frac{-١}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث

٥) ∫ جتا (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث

٦) ∫ قا^{٢} (أ س + ب) ء س = $\frac{١}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث

ملحوظات هامة جداً :ـ

١) جا ٢ س = ٢ جا س جتا س

٢) جتا ٢ س = ٢ جتا^{٢} س ـ ١ ∴ جتا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢ س)

٣) جتا ٢ س = جتا^{٢} س ـ جا^{٢} س

٤) جتا ٢ س = ١ ـ ٢ جا^{٢} س ∴ جا^{٢} س = $\frac{١}{٢}$ (١ ـ جتا ٢ س)

٥) ١ + ظا^{٢} س = قا^{٢} س ∴ ظا^{٢} س = قا^{٢} س ـ ١

٦) ١ + ظتا^{٢} س = قتا^{٢} س ∴ ظتا^{٢} س = قتا^{٢} س ـ ١

٧) جتا^{٢} س + جا^{٢} س = ١

أمثلة محلولة :ـ

أوجد قيمة التكاملات الآتية : ـ

١) $\int \text{جا } ٢ \text{ س ء س} = \frac{-١}{٢} \text{ جتا } ٢ \text{ س} + \text{ث}$

---

٢) $\int (\text{قا}^٢ \; ٤ \text{ س} - ٢ \text{ جتا } ٥ \text{ س}) \text{ ء س}$

$= \frac{١}{٤} \text{ ظا } ٤ \text{ س} - \frac{٢}{٥} \text{ جا } ٥ \text{ س} + \text{ث}$

---

٣) $\int \text{جا س جتا س ء س}$

بالضرب $\times \frac{٢}{٢}$ لتحويلها إلى ضعف الزاوية

$\therefore \int \text{جا س جتا س ء س} = \frac{١}{٢} \int ٢ \text{ جا س جتا س ء س}$

$= \frac{١}{٢} \int \text{جا } ٢ \text{ س ء س} = \frac{-١}{٤} \text{ جتا } ٢ \text{ س} + \text{ث}$

---

٤) $\int \text{جتا}^٢ \frac{\text{س}}{٢} \text{ ء س}$

بالتعويض عن $\text{جتا}^٢ \frac{\text{س}}{٢}$ بدلالة ضعف الزاوية

نجد أن $\text{جتا}^٢ \frac{\text{س}}{٢} = \frac{١}{٢} (١ + \text{جتا س})$

$\therefore \int \text{جتا}^٢ \frac{\text{س}}{٢} \text{ ء س} = \int \frac{١}{٢} (١ + \text{جتا س}) \text{ ء س} = \frac{١}{٢} \int (١ + \text{جتا س}) \text{ ء س}$

$= \frac{١}{٢} (\text{س} + \text{جا س}) + \text{ث}$

٥) ∫ (١ + جا س)^{٢} ء س

= ∫ (١ + ٢ جا س + جا^{٢} س) ء س

= ∫ (١ + ٢ جا س + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س) ء س

= ∫ ($\frac{٣}{٢}$ + ٢ جا س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س) ء س

= $\frac{٣}{٢}$ س − ٢ جتا س − $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + ث

---

٦) ∫ (جا ٣ س + جتا ٣ س)^{٢} ء س

= ∫ (جا^{٢} ٣ س + ٢ جا ٣ س جتا ٣ س + جتا^{٢} ٣ س) ء س

= ∫ (١ + جا ٦ س) ء س

= س − $\frac{١}{٦}$ جتا ٦ س + ث

---

٧) ∫ $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ + جتا س}}$ ء س = ∫ $\frac{\text{١ − جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ + جتا س}}$ ء س   بالتحليل

= ∫ $\frac{\text{(١ − جتا س) (١ + جتا س)}}{\text{١ + جتا س}}$ ء س = ∫ (١ − جتا س) ء س

= س − جا س + ث

---

٨) ∫ ظا^{٢} س ء س = ∫ (قا^{٢} س − ١) ء س = ظا س − س + ث

٩) $\int \frac{\text{١+ جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ ـ جا}^{٢}\text{ س}}$ ء س

بالتعويض عن المقام بدلالة جتا^{٢} س

$\therefore \int \frac{\text{١+ جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{١ ـ جا}^{٢}\text{ س}}$ ء س $= \int \frac{\text{١+ جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ ء س $= \int \left(\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}} + \text{١} \right)$ ء س

$= \int$ (قا^{٢} س + ١) ء س = ظا س + س + ث

مثال إذا كانت $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جا ٢ س + جتا س فأوجد العلاقة بين س ، ص

علماً بأن ص = ١ عندما س = $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ ؟

الإجابة $\because \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جا ٢ س + جتا س

$\therefore$ ص $= \int$ (جا ٢ س + جتا س) ء س $= \frac{\text{ـ ١}}{\text{٢}}$ جتا ٢ س + جا س + ث

$\because$ ص = ١ عندما س = $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ بالتعويض

$\therefore$ ١ $= \frac{\text{ـ ١}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{ط}}{\text{٣}}$ + جا $\frac{\text{ط}}{\text{٦}}$ + ث $\therefore$ ١ = ـ $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ + $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ + ث

$\therefore$ ث $= \frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ $\therefore$ ص $= \frac{\text{ـ ١}}{\text{٢}}$ جتا ٢ س + جا س + $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$

مثال إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د (س) عند أى نقطة عليه = جتا س + ٢ جا ٢ س أوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة ($\frac{٥ ط}{٦}$ ، ١) ؟

الإجابة ∵ $\frac{ء ص}{ء س}$ = جتا س + ٢ جا ٢ س

∴ ص = ∫ (جتا س + ٢ جا ٢ س) ء س = جا س ـ جتا ٢ س + ث

∵ ($\frac{٥ ط}{٦}$ ، ١) ∍ للمنحنى ∴ تحقق معادلته

∴ ١ = جا $\frac{٥ ط}{٦}$ ـ جتا $\frac{٥ ط}{٣}$ + ث ∴ ١ = $\frac{١}{٢}$ ـ $\frac{١}{٢}$ + ث

∴ ث = ١ ∴ ص = جا س ـ جتا ٢ س + ١

مثال إذا كانت $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{جا^٢ س}{جتا^٢ ص}$ وكانت ص = ط عندما س = $\frac{ط}{٢}$

فأوجد العلاقة بين ص ، س ؟

الإجابة بفصل المتغيرات

∴ ∫ جتا^٢ ص ء ص = ∫ جا^٢ س ء س

∴ $\frac{١}{٢}$ ∫ (١ + جتا ٢ ص) ء ص = $\frac{١}{٢}$ ∫ (١ ـ جتا ٢ س) ء س

∴ ص + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ ص = س ـ $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + ث

$\because$ ص = ط عند س = $\frac{ط}{٢}$ بالتعويض

$\therefore$ ط + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ ط = $\frac{ط}{٢}$ ـ $\frac{١}{٢}$ جا ط + ث

$\therefore$ ط + ٠ = $\frac{ط}{٢}$ ـ ٠ + ث $\therefore$ ث = $\frac{ط}{٢}$

$\therefore$ ص + $\frac{١}{٢}$ جا ٢ ص = س ـ $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + $\frac{ط}{٢}$ بالضرب × ٢

$\therefore$ ٢ ص + جا ٢ ص = ٢ س ـ جا ٢ س + ط

مثال أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بنقطة الأصل وميل المماس عند أى نقطة عليه = ٢ جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ ؟

الإجابة $\because$ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$

$\therefore$ ص = ∫ ٢ جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$ ء س = ∫ ٢ × $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا س) ء س

= ∫ (١ + جتا س) ء س

$\therefore$ ص = س + جا س + ث

$\because$ المنحنى يمر بنقطة الأصل فإن

٠ = ٠ + جا ٠ + ث $\therefore$ ث = ٠

$\therefore$ ص = س + جا س

الواجب : ** أوجد قيمة التكاملات التالية : -

١) $\int$ (جا س ـ ٣ قا^{٢} ٢ س) ء س ٢) $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} ء س

٣) $\int$ ظا^{٢} (٤ ـ ٢ س) ء س ٤) $\int$ جتا^{٢} ٣ س ء س

---

١) إذا كان $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ص}} = \frac{\text{١ ـ جا}^{٢}\text{ ص}}{\text{١ ـ جا}^{٢}\text{ ٢ س}}$ أوجد العلاقة بين س ، ص علماً بأن ص = ٣ ط / ٤ عندما س = ط / ٨

٢) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) وميل المماس عند أى نقطة عليه = (جا س ـ جتا س)^{٢}

٣) إذا كانت ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + جا ٢ س أوجد قيمة $\int$ ص ء س

٤) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا عُلم أن معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠ ، ٢) الواقعة عليه هى ص = ٢ (س + ١)

وكان $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ = ـ ٢ جا ٢ س

٦) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١ ، ـ ٢) وميل المماس له عند أى نقطة عليه هو (٣ ط جتا ط س ـ ٢ ط جا ط س)

تمارين عامة

١) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \dfrac{|\text{س} - ١|}{\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٣}$

٢) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\,\text{س} + \dfrac{|\text{س} - ٢|}{٢ - \text{س}} & \text{س} < ٢ \\ ٤\,\text{س} - ١ & \text{س} \leq ٢ \end{cases}$

أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س})$ **؟**

٣) إذا كان للدالة $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{أ}\,\text{س} + \text{ب} & \text{س} < ٢ \\ \text{أ}\,\text{س}^{٢} - \text{ب} & \text{س} > ٢ \end{cases}$ **نهاية = ٣**

عندما س ← ٢ أوجد قيمة أ ، ب ؟

٤) إذا كان للدالة $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} - ١}{\text{س} - ١} & \text{س} < ١ \\ \dfrac{٢\,\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٢} & \text{س} > ١ \end{cases}$

نهاية عند س = ١ فأوجد قيمة ن ؟ ثم أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}\ \text{د}(\text{س})$ **؟**

٥) ابحث اتصال الدالة عند س = ١ إذا كان

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٥}(٢س^{٢} + ٣) & س \le ١ \\ ٦ - ٥س & س > ١ \end{cases}$$

٦) إذا كانت $$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ب\,س + ٣ & س < ١ \\ أ & س = ١ \\ أ\,س + ب & س > ١ \end{cases}$$

متصلة عند س = ١ فما قيمة أ ، ب ؟

٧) ابحث اتصال الدالة $$د(س) = \begin{cases} س\,|س| + ٤ & س \le ٠ \\ \frac{|س|}{س} + ٣ & س > ٠ \end{cases}$$

وذلك عند س = ٠ ؟

٨) ابحث اتصال الدالة $$د(س) = \begin{cases} \frac{٥س^{٢} + جا^{٢}\,٢س}{س\,ظا\,٣س} & س < ٠ \\ \frac{س + ٣}{س + ١} & س \ge ٠ \end{cases}$$

عند س = ٠ ؟

٩) أوجد قيمة ك التي تجعل الدالة الآتية متصلة

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - (ك + ١)\,س + ك}{س - ١} & س \neq ١ \\ ٢ & س = ١ \end{cases}$$

عند س = ١؟

١٠) إذا كانت د (س) =

$$\begin{cases} س^{٢} + أ\,س + ٣ & س < ١ \\ \dfrac{س^{٢} - ١}{س - ١} & س > ١ \end{cases}$$

أوجد قيمة أ لكى يكون $\lim_{س \to ١}$ د (س) لها وجود . ثم اعد تعريف الدالة لكى تكون متصلة عند س = ١

١١) إذا كانت الدالة د حيث د (س) =

$$\begin{cases} أ\,س^{٢} + ١ & س \leq ٢ \\ ٢\,س + ١ & س > ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ أوجد قيمة الثابت أ ؟

١٢) ابحث اتصال الدالة د (س) =

$$\begin{cases} جا\,س - جتا\,س & ٠ \leq س \leq ط \\ ٢\,جتا^{٢}\,س - ١ & س > ط \end{cases}$$

١٣) إذا كانت د (س) =

$$\begin{cases} ٤\,س & س \leq -٢ \\ أ\,س + ب & -٢ < س < ٣ \\ -٢\,س & س \geq ٣ \end{cases}$$

متصلة على ح فما قيمة أ ، ب ؟

١٤) ابحث قابلية اشتقاق الدوال الآتية عند النقط المعطاه

أ) د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + س + ٣ & س > ١ \\ ٣ س + ٢ & س \le ١ \end{cases}$ عند س = ١

ثم ابحث كذلك اتصال هذه الدالة عندما س = ١

ب) د (س) = ٣ ـ | س ـ ١ | عند س = ١

جـ) د (س) = $\sqrt[٣]{س + ٢}$ عند أى نقطة من مجالها ؟

---

١٥) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} ٢ س^{٤} & س \ge ١ \\ أ س + ب & س > ١ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ١ فأوجد قيمتى أ ، ب ؟

١٦) إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} أ س^{٢} + ١ & س \le ٢ \\ ٢ س + ١ & س > ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ . أوجد قيمة الثابت أ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة

عند س = ٢

١٧) أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ إذا كان س^{٣} + ص^{٣} + ٢ س^{٢} ص ـ ٣ س ص^{٢} = ٢

١٨) إذا كان س = (ص^{٢} ـ ١)^{٤} فاثبت أن $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{ص^{٢} ـ ١}{٨ س ص}$

١٩) إذا كان $\text{٢ ص}^{\text{٣}} = \text{٣ س}^{\text{٢}}$ فاثبت أن

$$\text{ص}\ \frac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{٢}}} + \text{٢}\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{ص}}$$

٢٠) إذا كانت $\text{ص} = \frac{\text{٣ س} + \text{١}}{(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}}}$ اثبت أن

$$(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}}\ \frac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{٢}}} + \text{٤}\ (\text{س} - \text{١})\ \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + \text{٢ ص} = \text{٠}$$

٢١) إذا كان $\text{د}(\text{س}) = \text{أ س}^{\text{٢}} + \text{ب س} + \text{جـ}$ حيث أ ، ب ، جـ ثوابت حقيقية وكان $\text{د}(\text{٠}) = \text{٣}$ ، $\text{دَ}(\text{٢}) = \text{٣}$ ، $\text{دَ}(\text{٠}) = \text{٥}$

فأوجد $\text{د}(\text{١})$ ، $\text{دَ}(-\text{٢})$ ؟

٢٢) إذا كان $\text{س}^{\text{٢}} - \text{س ص} = \text{٣}$

أوجد قيمة المقدار $\text{س}\left(\frac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{٢}}}\right) + \text{٢}\left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)$

٢٣) إذا كان $\text{ص} = \text{٣ جا}(\text{٢ س} + \text{١})$ اثبت أن

$$\frac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{٢}}} + \text{٤ ص} = \text{٠}$$

٢٤) إذا كان ص = ٢ جا س ـ س جتا س اثبت أن

$$\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} + ص = ٢ \text{ جا س}$$

٢٥) اثبت أن المنحنيين ص = ٣ س^٢ ـ ٥ س ـ ٢ ، ص = س^٢ ـ ٣ س ـ ٢ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، ـ ٤)

٢٦) أوجد معادلة المماس للمنحنى ٣ س^٢ + ٣ ص^٢ ـ ٢ س = ٤ عند النقطة (١ ، ـ ١)

٢٧) أوجد معادلة المماس والعمودى للمنحنى س^٢ + ص^٢ = ٢ عند النقطة التى إحداثيها السينى يساوى ١ ؟

٢٨) أوجد معادلتى المماسين للمنحنى س ص = ٨ والذى يوازى المستقيم ص + ٢ س = ٩

٢٩) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة د (س) = جا س + جتا س عند النقطة (٠ ، ١) على هذا المنحنى ؟

٣٠) تتحرك نقطة على المنحنى س^٢ + س ص + ص^٢ = ٧ وكان معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (ـ ١ ، ٣) يساوى ٠,١ أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن عند نفس النقطة ؟

٣١) تتحرك نقطة (س ، ص) على الدائرة س^٢ + ص^٢ + ٤س ـ ٨ص = ١٠٨

عين موضع النقطة عند اللحظة التى يكون فيها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساوياً لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن ؟

٣٢) قطعة من المعدن مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٢٠ سم تنكمش بالتبريد بحيث يظل طولها يزيد عن عرضها بمقدار ٢٠ سم ، فإذا كان الطول ينكمش بمعدل ٠,٠٢٥ سم / ث عندما يكون العرض ٨٠ سم ، احسب معدل تغير المساحة عند هذه اللحظة ؟

٣٣) سقط حجر فى ماء ساكن فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢ سم / ث أوجد معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجة فى ١٠ ثوانى ؟

٣٤) يستند سلم طوله ٦,٥ متر بأحد طرفيه على أرض أفقية وبطرفه الأخر على حائط رأسى . فإذا انزلق الطرف السفلى للسلم مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم / دقيقة عندما يكون على بعد ٢,٥ متر من الحائط أوجد عندئذ معدل انخفاض الطرف العلوى للسلم . ثم أوجد بُعد الطرف العلوى للسلم عن الأرض عندما يتحرك الطرف العلوى والطرف السفلى بنفس المعدل ؟

٣٥) وضع مصباح كشاف على ارتفاع ٨ أمتار فوق طريق يسير عليه رجل طوله ١,٦ متر مبتعداً عن الضوء بسرعة ٢ متر / دقيقة . أوجد

أ) معدل ازدياد طول ظل الرجل　　　ب) سرعة تحرك نهاية ظل الرجل

٣٦) فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما

٨ سم ، ٦ سم . إذا كان الضلع الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة وكان الضلع الثانى يزداد بمعدل ٢ سم / دقيقة فأوجد معدل التغير فى مساحة المثلث بعد دقيقتين ؟

٣٧) عين فترات التزايد والتناقص لكل من الدوال الآتية : ـ

أ) د (س) = ٢ $س^{٣}$ ـ ٣ $س^{٢}$ ـ ١٢ س ـ ٥

ب) د (س) = س + $\frac{١}{س}$ حيث س ≠ ٠

جـ) د (س) = ٢ ـ | س ـ ١ |

٣٨) اثبت أن الدالة ص = $س^{٣}$ ـ ٣ $س^{٢}$ ـ ٥ س + ١٠ تناقصية عند النقطة (١ ، ٣) وتزايدية عند النقطة (٣ ، ـ ٥) ؟

٣٩) أوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية لكل من الدوال الآتية

أ) د (س) = $س^{٤}$ ـ ١٨ $س^{٢}$

ب) د (س) = س + $\frac{٤}{س ـ ١}$ حيث س ≠ ١

٤٠) إذا كان منحنى الدالة ص = أ $س^{٣}$ + ب $س^{٢}$ + جـ س + د يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٦) وله نقطة حرجة عند (٢ ، ٢) فأوجد أ ، ب ، جـ ، د وبين نوع النقطة الحرجة ؟

٤١) احسب القيم العظمى والصغرى المطلقة فى كل مما يأتى : ـ

أ) د (س) = س^{٣} ـ ١٢ س + ٨ على الفترة [ـ ٣ ، ٥]

ب) د (س) = س^{٣} ـ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ـ ٢ س على الفترة [ـ ١ ، ٢]

٤٢) ادرس تحدب المنحنى ٢ ص = ٢ س^{٣} ـ ٢٧ س^{٢} + ١٢٠ س

وبين نقط القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الإنقلاب ؟

٤٣) أوجد قيم أ ، ب ، جـ بحيث يحقق المنحنى

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س الشروط الآتية

أ) للمنحنى نقطة انقلاب عند س = $\frac{١}{٢}$

ب) للمنحنى مماس أفقى عند س = ـ ١

جـ) يمر المنحنى بالنقطة (١ ، ١٣)

٤٤) عين قيم أ ، ب ، جـ ، د بحيث يكون للمنحنى

ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د مماس أفقى عند (١ ، ٣) ، نقطة انقلاب عند (٢ ، ١)

٤٥) ارسم منحنى كل من الدوال التالية مع تفصيل خطوات الحل

أ) د (س) = س^{٣} ـ ٣ س^{٢} + ٤

ب) د (س) = (س^{٢} ـ ١)^{٢}

٤٦) أوجد عددين موجبين مجموعهما ١٢ بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن ؟

٤٧) قطعة أرض مستطيلة الشكل محاطة بسور طوله ١٢٠ سم . أوجد بعديها إذا كان مساحة سطحها أكبر ما يمكن ؟

٤٨) صفيحة معدنية على شكل مستطيل بعداه ١٠ سم ، ١٦ سم . قطعت من أركانها الأربعة ٤ مربعات متساوية ثم ثنيت الأجزاء البارزة لتكون صندوقاً على شكل متوازى مستطيلات بدون غطاء . أوجد طول ضلع المربع المقطوع ليكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن ؟

٤٩) أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة إذا كانت المساحة الكلية لسطحها تساوى ٢٤ ط سم^{٢} ؟

٥٠) قطعة معدنية على شكل قطاع دائرى محيطه ٣٠ سم . أوجد طول نصف قطر دائرته الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن ؟

٥١) أوجد نقطة على المنحنى ص^{٢} = ٤ س + ٥ بحيث تكون المساحة بينها وبين النقطة (٣ ، ٠) أقل ما يمكن ؟

٥٢) نافذة على هيئة مستطيل يعلوه مثلث متساوى الساقين تنطبق قاعدته على أحد بُعدى المستطيل فإذا كان ارتفاع المثلث $\frac{٣}{٨}$ طول قاعدته ومحيط النافذة ١٢٠ سم . فأوجد بعدى المستطيل التى تجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن ؟

احسب قيمة التكاملات الآتية : -

١) $\int \text{٥ ء س}$ ٢) $\int (\text{س}^{٢} - \text{٥ س}^{٣} + \text{٣})\ \text{ء س}$

٣) $\int (\text{س}^{\frac{٣}{٤}} - \sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + \text{١})\ \text{ء س}$

٤) $\int \frac{\text{٨ س}^{٣} - \text{٢٧}}{\text{٢ س} - \text{٣}}\ \text{ء س}$ ٥) $\int \frac{(\text{س}^{٢} - \text{٥ س} + \text{٦})}{\text{س} - \text{٢}}\ \text{ء س}$

٦) $\int (\text{٣ س} - \text{٧})^{٦}\ \text{ء س}$ ٧) $\int \text{س}^{٢}\ (\text{س} + \text{٤})^{٢}\ \text{ء س}$

---

١) أوجد معادلة المنحنى للدالة ص = د (س) الذى ميله عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى $-\text{س}^{٢}$ إذا كان د (٠) = ٦

٢) إذا كان ميل المنحنى ص = د (س) عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه يساوى س (٢ س ـ ١) فأوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (١ ، ـ ٣)

٣) إذا كان $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}} = \text{س}^{٢} - \text{١}$ عند كل نقطة (س ، ص) من منحنى ما فأوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١ ، ١) ويمس المستقيم س + ٢ ص = ٣ عند النقطة (١ ، ١)

٤) إذا كان ميل المماس عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = د (س) هو ٦ س^{٢} ـ ٣٠ س + ٣٦ فأوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأن قيمة ص عند نقطة القيمة العظمى المحلية له تساوى ٢٨ .

وأوجد كذلك نقطة القيمة الصغرى المحلية ؟

٥) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{٢ س ـ ٣}}{\text{٥ ـ ٢ ص}}$$ وكانت د (١) = ٢

٦) منحنى ميل العمودى عند أى نقطة عليه إحداثيها السينى س هو $\frac{\text{ـ ١}}{\text{٢ س ـ ٦}}$ أوجد معادلته إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (٤ ، ٥)

** أوجد قيمة التكاملات التالية : ـ

١) $\int$ (جا س ـ ٣ قا^{٢} ٢ س) ء س ٢) $\int$ (جا س + جتا س)^{٢} ء س

٣) $\int$ ظا^{٢} (٤ ـ ٢ س) ء س ٤) $\int$ جتا^{٢} ٣ س ء س

---

١) إذا كان $\frac{\text{ء س}}{\text{ء ص}} = \frac{\text{١ ـ جا}^{٢}\text{ ص}}{\text{١ ـ جا}^{٢}\text{ ٢ س}}$ أوجد العلاقة بين س ، ص علماً

بأن ص = ٣ ط / ٤ عندما س = ط / ٨

٢) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) وميل المماس عند أى نقطة عليه = $(\text{جا س} - \text{جتا س})^{٢}$

٣) إذا كانت ص = $\frac{١}{٢}$ $\text{س}^{٢}$ + جا ٢ س أوجد قيمة $\int$ ص ء س

٤) أوجد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا عُلم أن معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (٠ ، ٢) الواقعة عليه هى ص = ٢ (س + ١)

وكان $\frac{\text{ء}^{٢}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}^{٢}}$ = ـ ٢ جا ٢ س

٥) إذا كان ص = ٢ جا س ـ س جتا س اثبت أن

$$\frac{\text{ء}^{٢}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}^{٢}} + \text{ص} = ٢\ \text{جا س}$$

٦) أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة (١ ، ـ ٢) وميل المماس له عند أى نقطة عليه هو (٣ ط جتا ط س ـ ٢ ط جا ط س)

تم بحمد الله