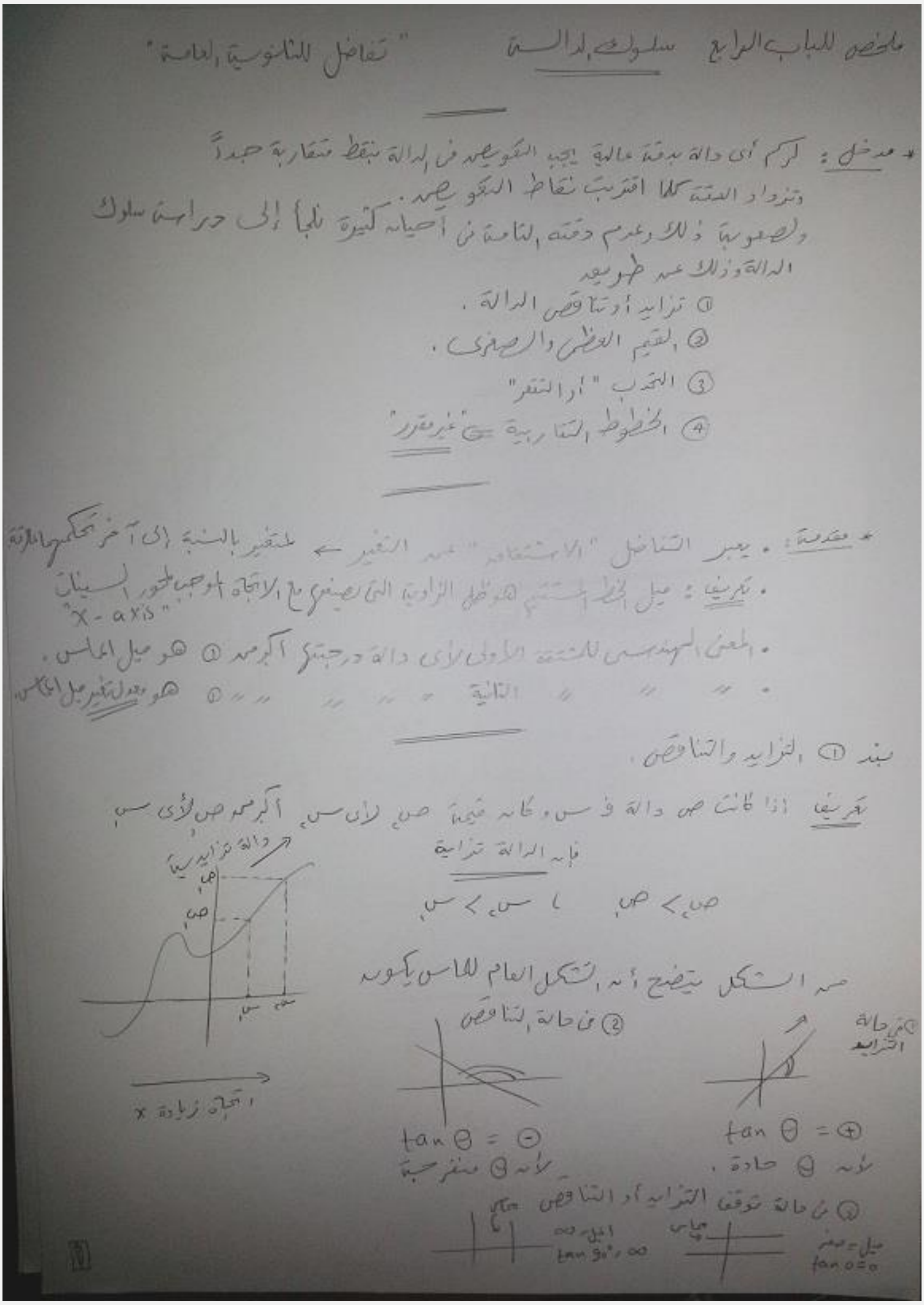


ملخص للباب الرابع سلوك الدالة "تفاضل للثانوية العامة"

* مدخل : لرسم أى دالة بدقة عالية يجب التعويض فى الدالة بنقط متقاربة جداً وتزداد الدقة كلما اقتربت نقاط التعويض. ولصعوبة ذلك وعدم دقته التامة فى أحيان كثيرة نلجأ إلى دراسة سلوك الدالة وذلك عن طريق

① تزايد أو تناقص الدالة.
② القيم العظمى والصغرى.
③ التحدب "أو التقعر"
④ الخطوط التقاربية ← "غير مقرر"

* مقدمة : • يعبر التفاضل "الاشتقاق" عن معدل التغير ← لمتغير بالنسبة إلى آخر تحكمهما علاقة

• تعريف : ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات "X-axis"

• المعنى الهندسى للمشتقة الأولى لأى دالة درجتها أكبر من ① هو ميل المماس.

• " " " " الثانية " " " " " ① هو معدل تغير ميل المماس

بند ① التزايد والتناقص.

تعريف إذا كانت ص دالة فى س، وكانت قيمة ص٢ لأى س٢ أكبر من ص١ لأى س١ فإن الدالة تزايدية

ص٢ > ص١ ، س٢ > س١

من الشكل يتضح أن الشكل العام للماس يكون

① فى حالة التزايد

tan θ = ⊕
لأن θ حادة.

② فى حالة التناقص

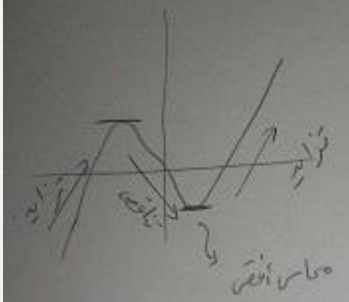
tan θ = ⊖
لأن θ منفرجة

③ فى حالة توقف التزايد أو التناقص

ميل = صفر
tan 0 = 0

الميل ∞
tan 90° = ∞

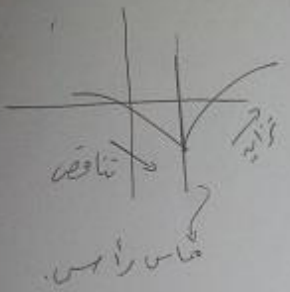
• ولما كانت المشتقة الأولى تعبر عن ميل المماس فإن بحث إشارتها يعبر عن تزايد أو تناقص الدالة.



• ويلاحظ أنه : يفصل بين مناطق التزايد والتناقص نقط يكون عندها المماس أفقي أو رأسي

ميله = صفر ميله = ∞

وهي القيم التي تكون عندها المشتقة الأولى = صفر ، = ∞ ⇐ غير معرفة

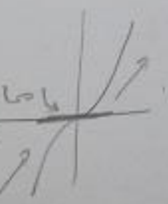


⟸ تعريفاً النقاط الحرجة : critical Points

هي النقاط التي يكون ميل المماس عندها = صفر أو غير معرف "أي أن المشتقة الأولى = صفر أو غير معرفة"

وقد يتغير على طرفيها سلوك الدالة من حيث التزايد أو التناقص أو لا يتغير.

↙ مثال $ص = س^٣$



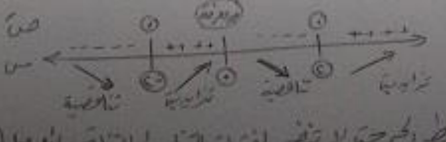
مماس أفقي عند س = صفر

"تزايدية قبل وبعد س = صفر"

مثال ابحث تزايد وتناقص الدالة $ص = س^{\frac{٢}{٣}} (س^٢ - ١٦)$

الحل ⟸ $ص = س^{\frac{٨}{٣}} - ١٦ س^{\frac{٢}{٣}}$ ⟵ $صَ = \frac{٨ س^٢ - ٣٢}{٣ \sqrt[٣]{س}}$

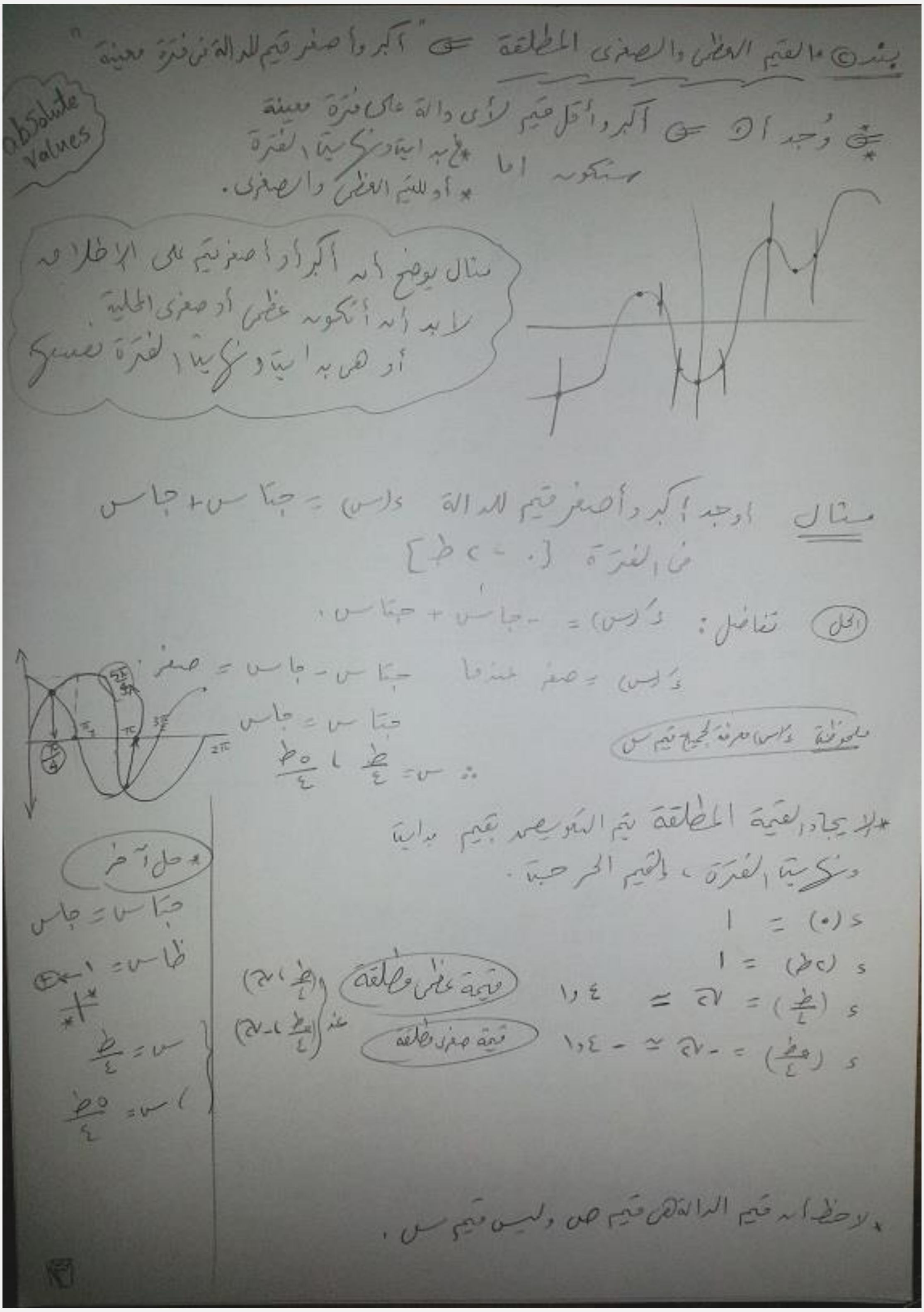
صَ = صفر عندما س = ± ٢ ، صَ غير معرفة عند س = صفر



∴ تزايدية على]−٢ ، صفر[∪]٢ ، ∞[

∴ تناقصية على]−∞ ، −٢[∪]صفر ، ٢[

⟸ ملحوظة : النقط الحرجة لا تنضم لفترات التزايد أو التناقص لأن ميل المماس عندها = صفر أو غير معرف ① أو ②



بند ⑥ القيم العظمى والصغرى المطلقة ⟵ "أكبر وأصغر قيم للدالة في فترة معينة"

absolute values

* وُجد ا⑤ ⟵ أكبر وأقل قيم لأي دالة على فترة معينة ستكون إما
* عند بداية ونهاية الفترة
* أو للقيم العظمى والصغرى.

مثال يوضح أن أكبر أو أصغر قيم على الإطلاق لا بد أن تكون عظمى أو صغرى المحلية أو عند بداية ونهاية الفترة نفسها

مثال: أوجد أكبر وأصغر قيم للدالة د(س) = جتا س + جا س في الفترة [٠ ، ٢ط]

الحل: تفاضل: د'(س) = -جا س + جتا س ،

د'(س) = صفر عندما جتا س - جا س = صفر ،

جتا س = جا س

∴ س = ط/٤ ، ٥ط/٤

ملحوظة: د(س) معرفة لجميع قيم س

* لإيجاد القيمة المطلقة يتم التعويض بقيم بداية ونهاية الفترة، والقيم الحرجة.

د(٠) = ١

د(٢ط) = ١

د(ط/٤) = √٢ ≃ ١,٤ — قيمة عظمى مطلقة (ط/٤ ، √٢)

د(٥ط/٤) = -√٢ ≃ -١,٤ — قيمة صغرى مطلقة عند (٥ط/٤ ، -√٢)

* حل آخر

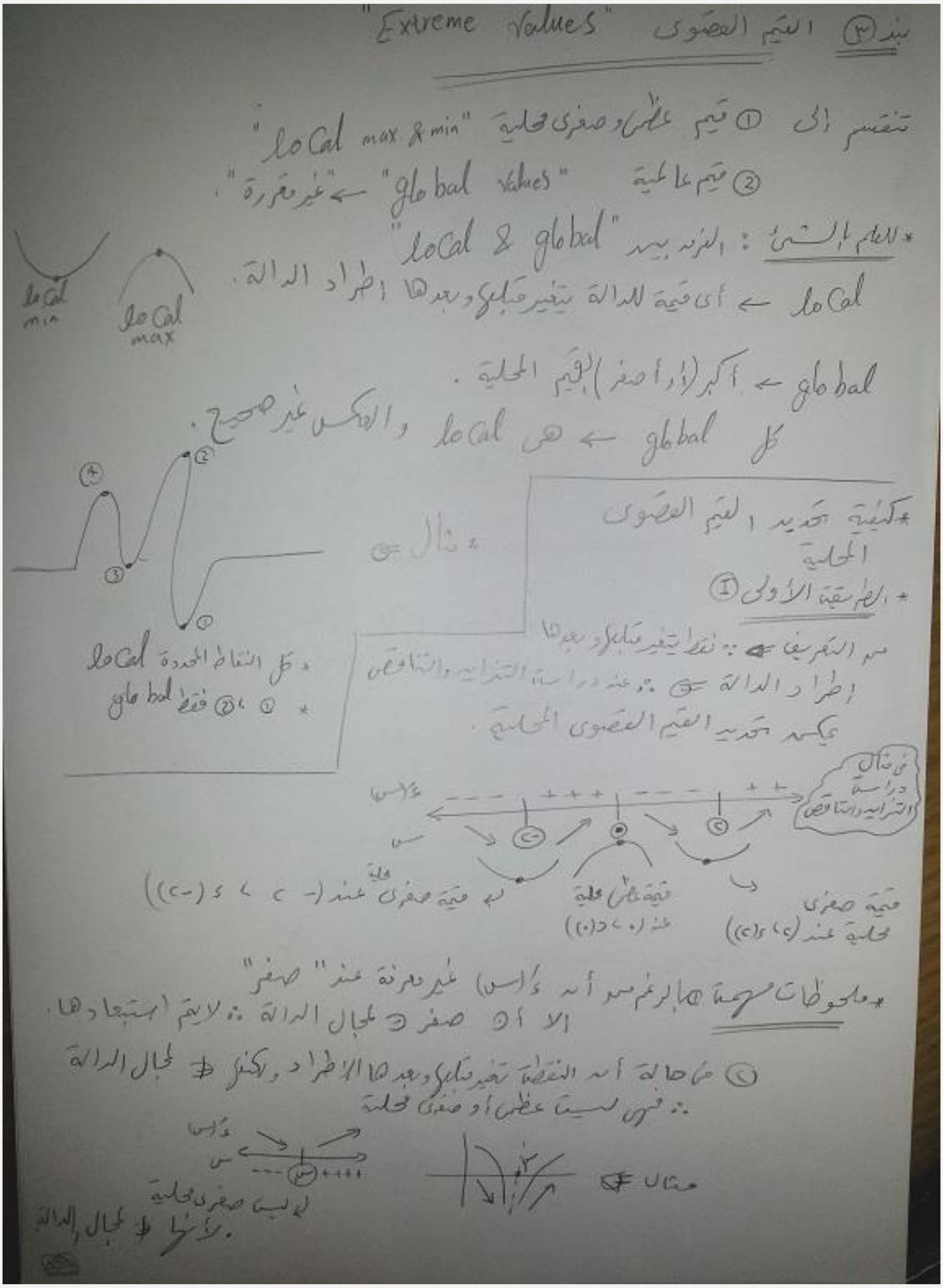
جتا س = جا س

ظا س = ١ ⟵ ①

س = ط/٤

س = ٥ط/٤

* لاحظ أن قيم الدالة هي قيم ص وليس قيم س.



بند ③ القيم القصوى "Extreme Values"

تنقسم إلى ① قيم عظمى وصغرى محلية "local max & min"

② قيم عالمية "global values" ← "غير مقررة".

* للعلم بالشيء: المزيد بين "local & global"

local ← أي قيمة للدالة يتغير قبلها وبعدها اطراد الدالة.

global ← أكبر (أو أصغر) القيم المحلية.

كل global ← هي local والعكس غير صحيح.

* مثال ←

* كل النقاط المحددة local
* ①، ② فقط global

* كيفية تحديد القيم القصوى المحلية

* الطريقة الأولى (I)

من التعريف ⇐ ∴ نقط التغير قبلها وبعدها اطراد الدالة ← ∴ عند دراسة التزايد والتناقص يمكن تحديد القيم القصوى المحلية.

له قيمة صغرى محلية عند (-٢ ، د(-٢))

قيمة عظمى محلية عند (٠ ، د(٠))

قيمة صغرى محلية عند (٢ ، د(٢))

* ملحوظات مهمة ① بالرغم من أنه د'(س) غير معرفة عند "صفر" إلا أن صفر ∈ لمجال الدالة ∴ لا يتم استبعادها.

② حالة أنه النقطة تغير قبلها وبعدها الاطراد ولكن ∉ لمجال الدالة ∴ فهي ليست عظمى أو صغرى محلية

مثال ∉

له ليست صغرى محلية لأنها ∉ لمجال الدالة.

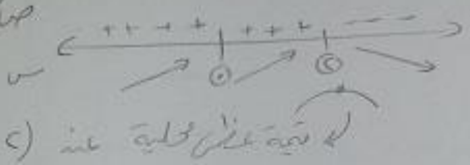
مثال ③ : أوجد جميع القيم القصوى للدالة ص = $\sqrt[3]{س}$ (٨ − س)

$$ص = ٨\sqrt[3]{س} - س^{\frac{٤}{٣}}$$

$$ص' = \frac{٨ - ٤س}{٣ س^{\frac{٢}{٣}}}$$

ص' = صفر عند س = ٢

ص' غير معرفة عند س = صفر



قيمة عظمى محلية عند $(٢ ، ٦\sqrt[3]{٢})$

عند (٢ ، ٧٫٥٦)

---

* الطريقة الثانية Ⅱ

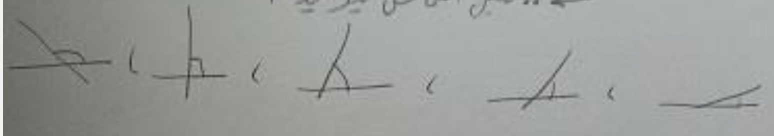
* اختبار المشتقة الثانية ← بعد إيجاد النقط الحرجة يتم إيجاد المشتقة الثانية وحساب إشارتها عند تلك النقط

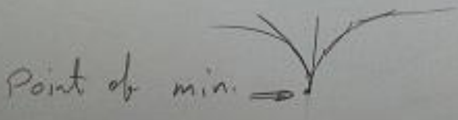
فإذا كانت د''(س) ←
- ⊕ ← ∴ قيمة صغرى محلية .
- ⊖ ← ∴ قيمة عظمى محلية .
- ⊙ أو ∞ ← اختبار غير صالح ويتم اللجوء للطريقة الأولى .

← المنحنى المرسوم ← د''+ ∴ معدل تغير ميل المماس ⊕

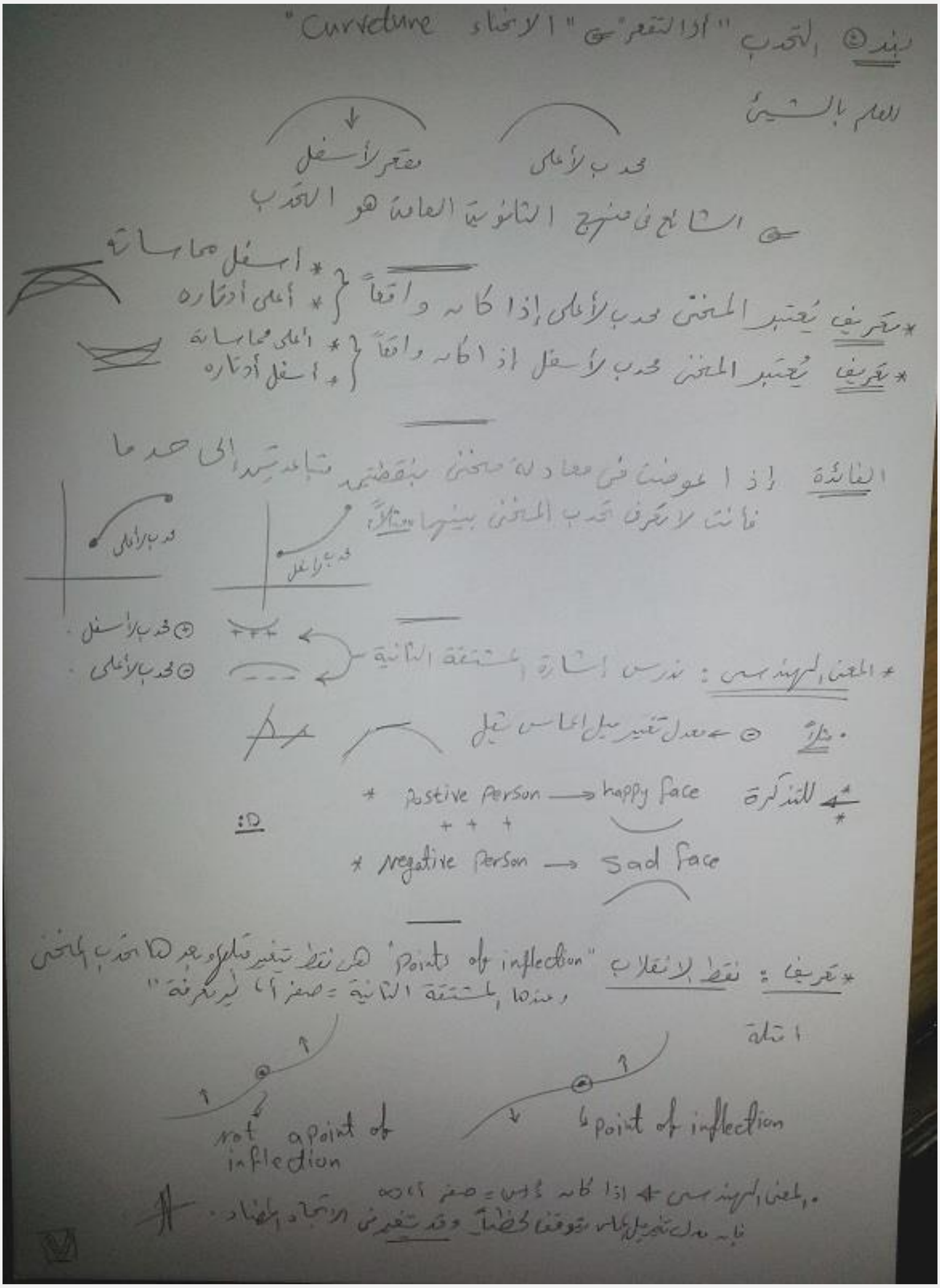
← ∴ ميل المماس يتزايد .

← شكل توضيحي





\# والعكس صحيح بالنسبة د'' ← ⊖



بند ⑤ التحدب "أو التقعر" ← "الانحناء Curvature"

العلم بالشيء

مقعر لأسفل

محدب لأعلى

← الشائع في منهج الثانوية العامة هو التحدب

* تعريف يُعتبر المنحنى محدب لأعلى إذا كان واقعاً { * أعلى أوتاره
  * أسفل مماساته }

* تعريف يُعتبر المنحنى محدب لأسفل إذا كان واقعاً { * أعلى مماساته
  * أسفل أوتاره }

الفائدة إذا عوضنا في معادلة منحنى بنقطتين متباعدتين إلى حد ما فإننا لا نعرف تحدب المنحنى بينهما مثلاً

محدب لأعلى

محدب لأسفل

⊕ محدب لأسفل .

⊖ محدب لأعلى .

+ + +

− − −

* المعنى الهندسي : ندرس إشارة المشتقة الثانية

• مثلاً ⊖ ← معدل تغير ميل المماس يقل

* للتذكرة

* Postive Person → happy face

+ + +

* Negative Person → sad face

:D

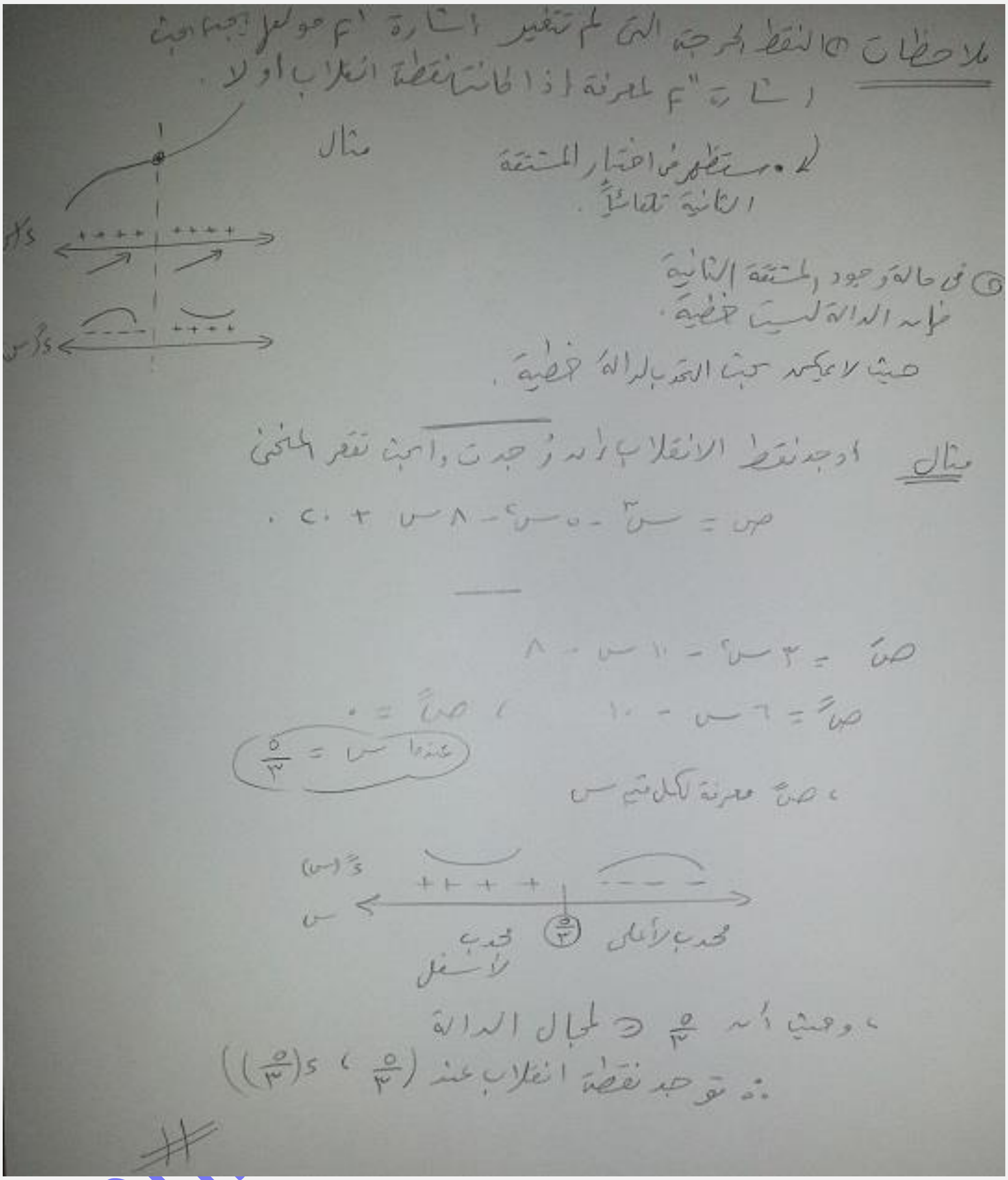
* تعريف : نقط الانقلاب "points of inflection" هي نقط تغير قبلها وبعدها تحدب المنحنى "وعندها المشتقة الثانية = صفر أو ليس معرفة"

أمثلة

not a point of inflection

point of inflection

• المعنى الهندسي ← إذا كان د''(س) = صفر فإن معدل تغير ميل المماس يتوقف لحظياً وقد يتغير في الاتجاه المضاد.



ملاحظات ① النقط الحرجة التي لم تتغير إشارة f' حولها يجب دراسة إشارة f'' لمعرفة إذا كانت نقطة انقلاب أو لا .

مثال

لا • يستطيع من اختبار المشتقة الثانية تماماً .

② في حالة وجود المشتقة الثانية فإن الدالة ليست خطية .

حيث لا يمكن حساب التحدب للدالة خطية .

مثال أوجد نقط الانقلاب إن وجدت وابحث تقعر المنحنى

ص = س^{٣} − ٥ س^{٢} − ٨ س ٣ ٢٠ .

ص' = ٣ س^{٢} − ١٠ س − ٨

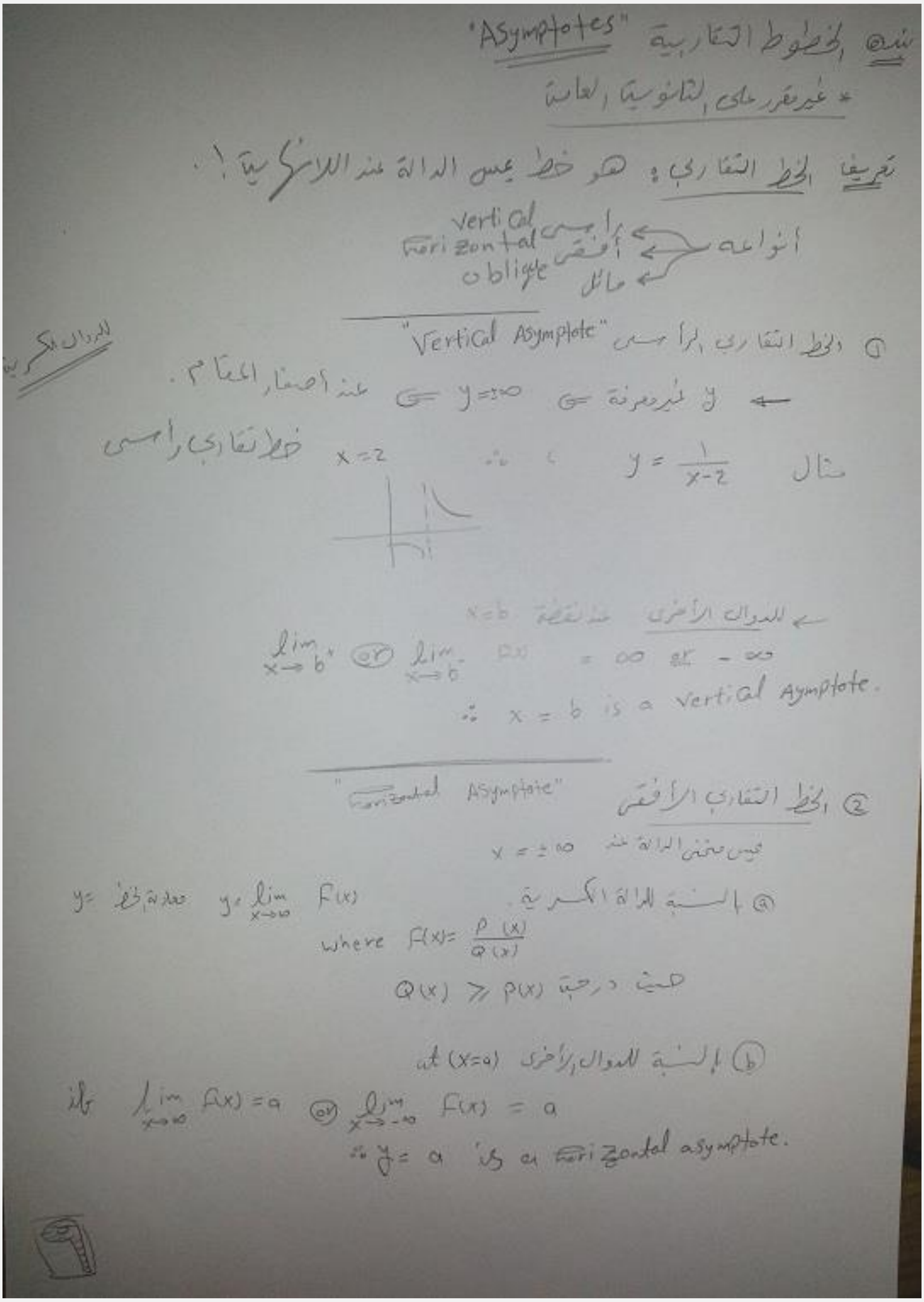
ص'' = ٦ س − ١٠ ، ص'' = ٠

عندما س = $\frac{٥}{٣}$

، ص'' معرفة لكل قيم س

، وحيث أن $\frac{٥}{٣}$ ∈ لمجال الدالة

∴ توجد نقطة انقلاب عند ($\frac{٥}{٣}$ ، د($\frac{٥}{٣}$))



شرح الخطوط التقاربية "Asymptotes"

* غير مقرر على الثانوية العامة

تعريف الخط التقاربي: هو خط يمس الدالة عند اللانهائية !.

أنواعه:
- رأسي vertical
- أفقي horizontal
- مائل oblique

① الخط التقاربي الرأسي "Vertical Asymptote"

للدوال الكسرية

← y غير معرفة ⇐ $y = \pm\infty$ ⇐ عند أصفار المقام.

مثال $y = \frac{1}{x-2}$ ∴ $x = 2$ خط تقاربي رأسي

← للدوال الأخرى عند النقطة $x = b$

$\lim_{x \to b^+}$ or $\lim_{x \to b^-}$ $f(x) = \infty$ or $-\infty$

∴ $x = b$ is a vertical Asymptote.

② الخط التقاربي الأفقي "Horizontal Asymptote"

يمس منحنى الدالة عند $x = \pm\infty$

ⓐ بالنسبة للدالة الكسرية. $y = \lim_{x \to \infty} f(x)$ معادلة خط $y =$

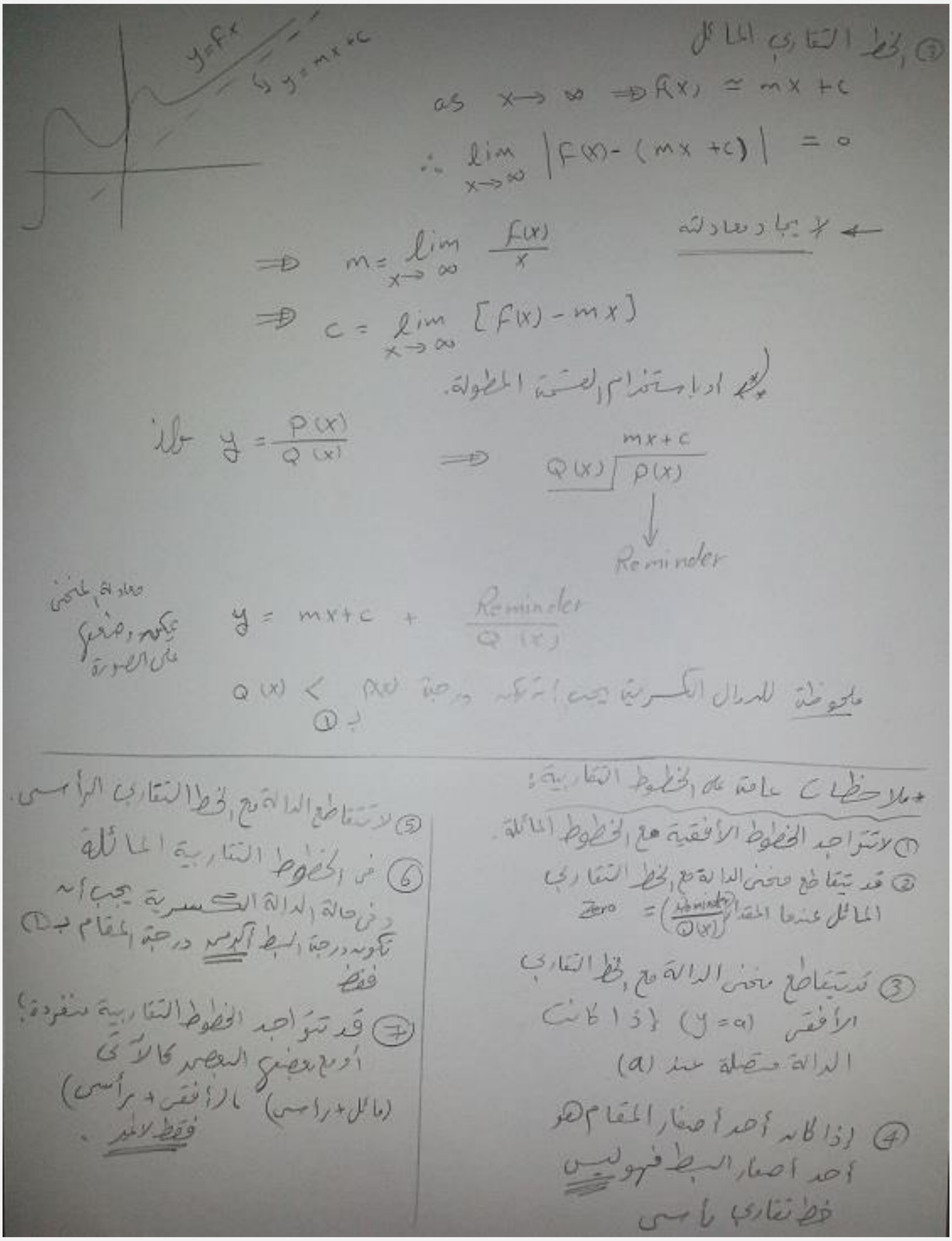
where $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

حيث درجة $Q(x) \geq P(x)$

ⓑ بالنسبة للدوال الأخرى at $(x=a)$

if $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$ or $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

∴ $y = a$ is a horizontal asymptote.



③ الخط التقاربي المائل

as $x \to \infty \Rightarrow f(x) \simeq mx + c$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \left| f(x) - (mx+c) \right| = 0$$

← لإيجاد معادلته

$$\Rightarrow m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\Rightarrow c = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

أو باستخدام القسمة المطولة.

مثلاً $y = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow Q(x)\overline{\big)\,P(x)}$ $\overset{mx+c}{}$ ↓ Reminder

معادلة المنحنى بكبير وصغير على الصورة $y = mx + c + \frac{Reminder}{Q(x)}$

ملحوظة للدوال الكسرية يجب أن تكون درجة $Q(x) < P(x)$ بـ ①

---

* ملاحظات عامة على الخطوط التقاربية:

① لا تتواجد الخطوط الأفقية مع الخطوط المائلة.

② قد يتقاطع منحنى الدالة مع الخط التقاربي المائل عندما المقدار $\left(\frac{Reminder}{Q(x)}\right) = Zero$

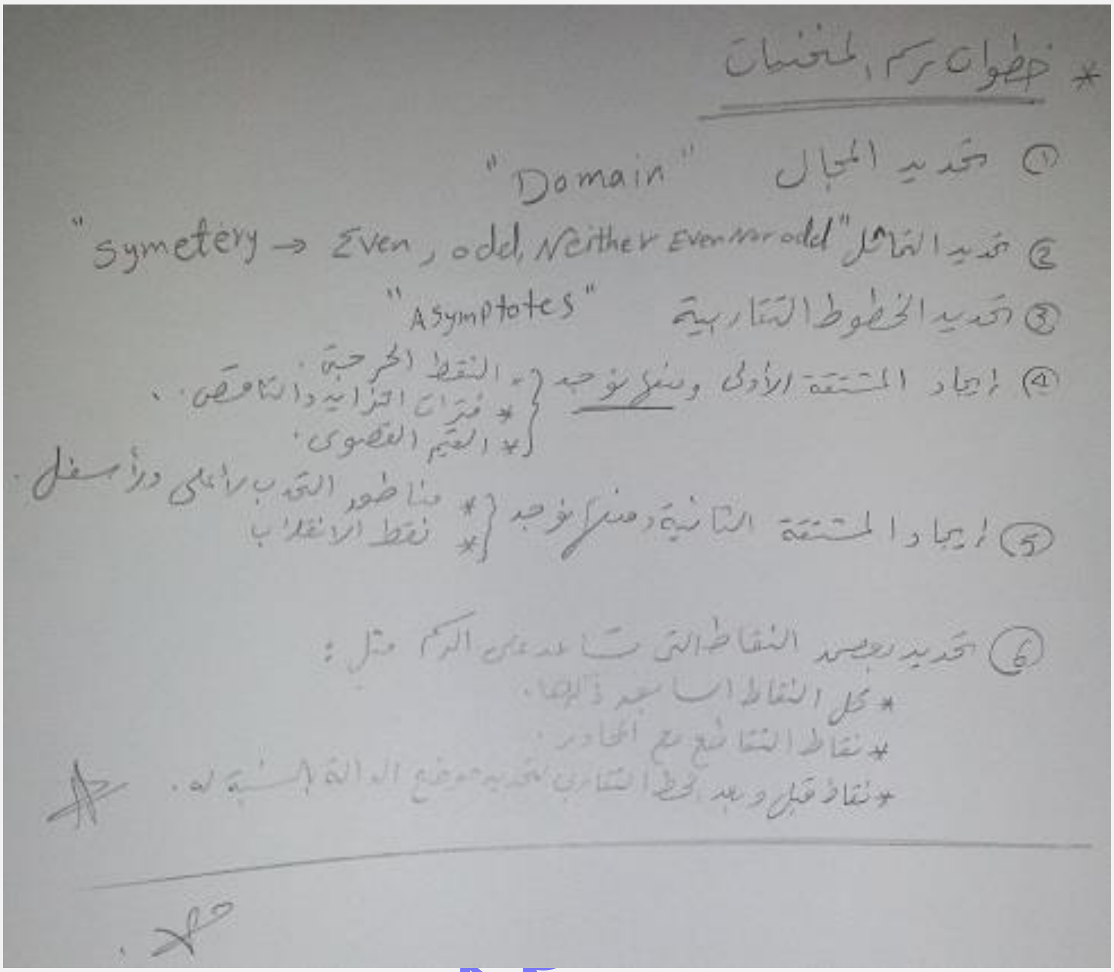
③ قد يتقاطع منحنى الدالة مع الخط التقاربي الأفقي $(y = a)$ إذا كانت الدالة متصلة عند (a)

④ إذا كان أحد أصفار المقام هو أحد أصفار البسط فهو ليس خط تقاربي رأسي

⑤ لا تتقاطع الدالة مع الخط التقاربي الرأسي.

⑥ في الخطوط التقاربية المائلة في حالة الدالة الكسرية يجب أن تكون درجة البسط أكبر من درجة المقام بـ ① فقط

⑦ قد تتواجد الخطوط التقاربية منفردة، أو مع بعضها البعض كالآتي (مائل + رأسي) ، (أفقي + رأسي) فقط لا غير.



* خطوات رسم المنحنيات

① تحديد المجال "Domain"

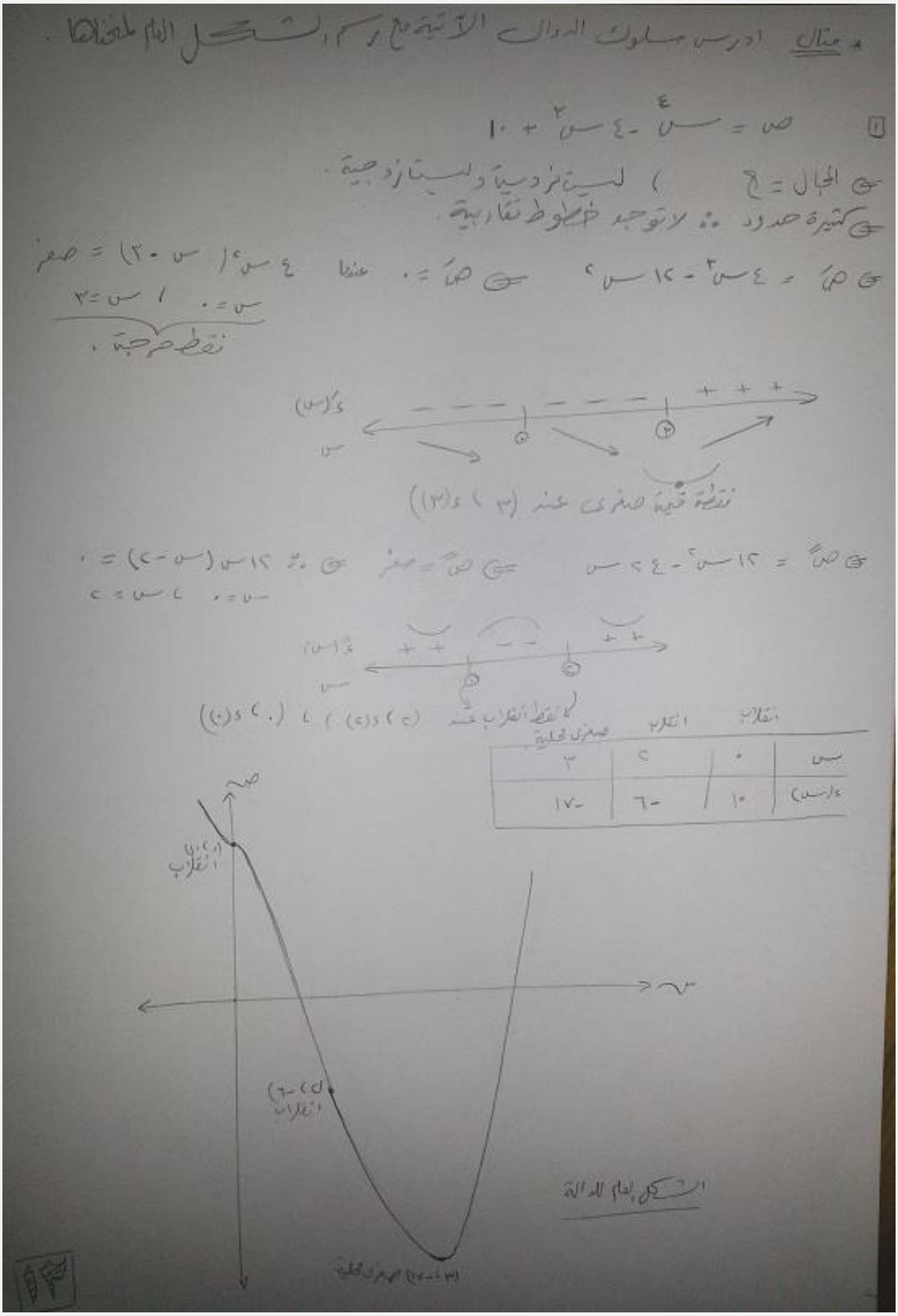
② تحديد التماثل "symetery → Even , odd, Neither Even nor odd"

③ تحديد الخطوط التقاربية "Asymptotes"

④ إيجاد المشتقة الأولى ومنها نوجد
- * النقط الحرجة.
- * فترات التزايد والتناقص.
- * القيم القصوى.

⑤ إيجاد المشتقة الثانية ومنها نوجد
- * مناطق التحدب لأعلى ولأسفل.
- * نقط الانقلاب

⑥ تحديد بعض النقاط التي تساعد على الرسم مثل:
- * كل النقاط السابق ذكرها.
- * نقاط التقاطع مع المحاور.
- * نقاط قبل وبعد الخط التقاربي لتحديد موضع الدالة بالنسبة له.



* **مثال** ادرس سلوك الدوال الآتية مع رسم الشكل العام لمنحناها .

١ ص = س^٤ - ٤ س^٣ + ١٠

∵ المجال = ح) ليست فردية وليست زوجية .

∵ كثيرة حدود ∴ لا توجد خطوط تقاربية .

∵ ص' = ٤ س^٣ - ١٢ س^٢ ∵ ص' = ٠ عندما ٤ س^٢ (س - ٣) = صفر

س = ٠ ، س = ٣

نقط حرجة .

نقطة قيمة صغرى عند (٣ ، د(٣))

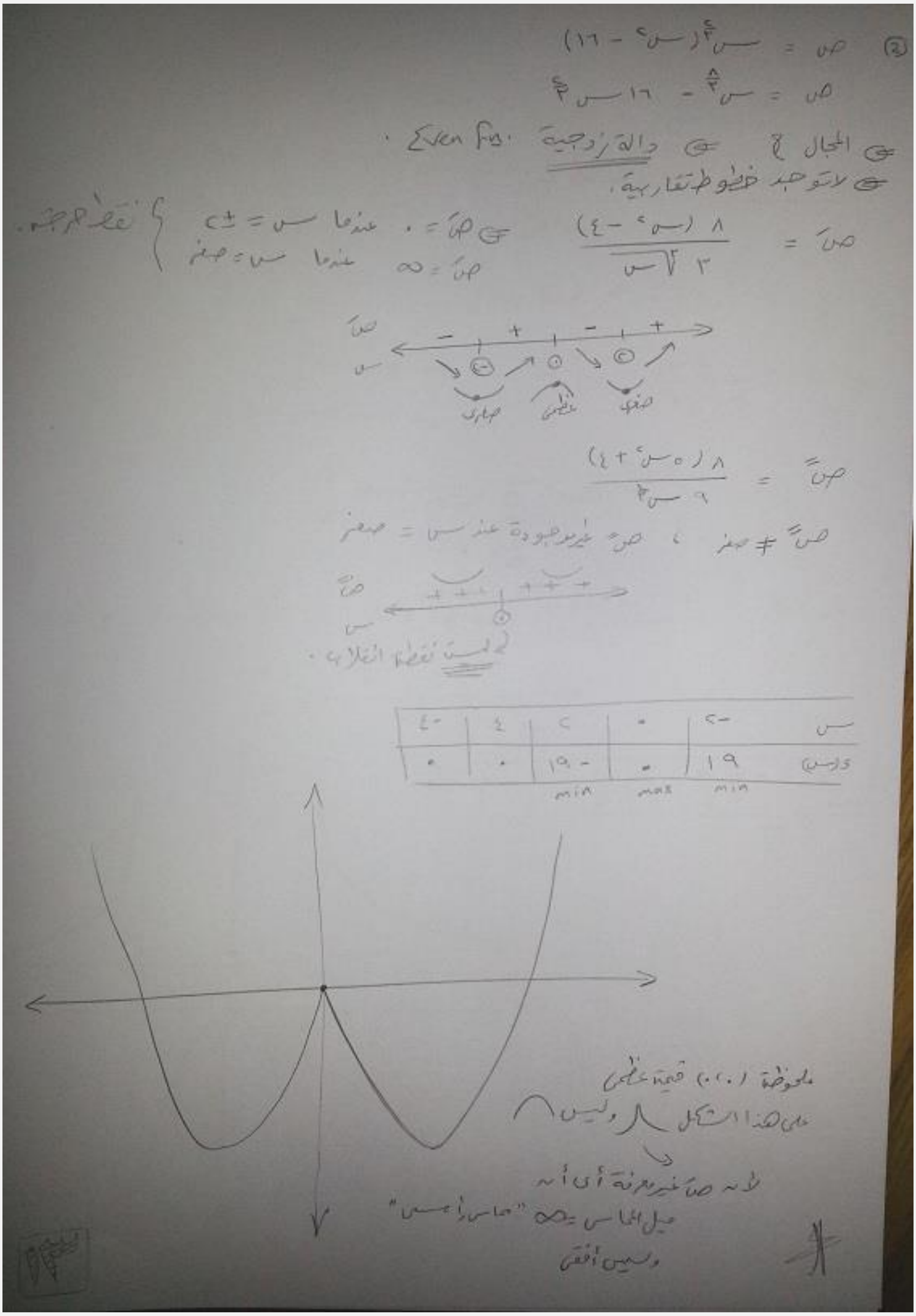
∵ ص'' = ١٢ س^٢ - ٢٤ س ∵ ص'' = صفر ∴ ١٢ س (س - ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

نقط انقلاب عند (٢ ، د(٢)) ، (٠ ، د(٠))

	انقلاب	انقلاب	صغرى محلية
س	٠	٢	٣
د(س)	١٠	-٦	-١٧

الشكل العام للدالة



② $ص = س^{\frac{٤}{٣}}(س^{٢} - ١٦)$

$ص = س^{\frac{١٠}{٣}} - ١٦ س^{\frac{٤}{٣}}$

- المجال ح
- دالة زوجية. Even Fn.
- لاتوجد خطوط تقاربية.

$ص' = \frac{٨(س^{٢} - ٤)}{٣ \sqrt[٣]{س}}$

- $ص' = ٠$ ، عندما $س = \pm ٢$ } نقط حرجة.
- $ص' = \infty$ عندما $س = صفر$

ص': − + − +

س: ⊝٢ ٠ ٢

صغرى عظمى صغرى

$ص'' = \frac{٨(٥س^{٢} + ٤)}{٩ س^{\frac{٤}{٣}}}$

$ص'' \neq صفر$ ، ص'' غيرموجودة عند س = صفر

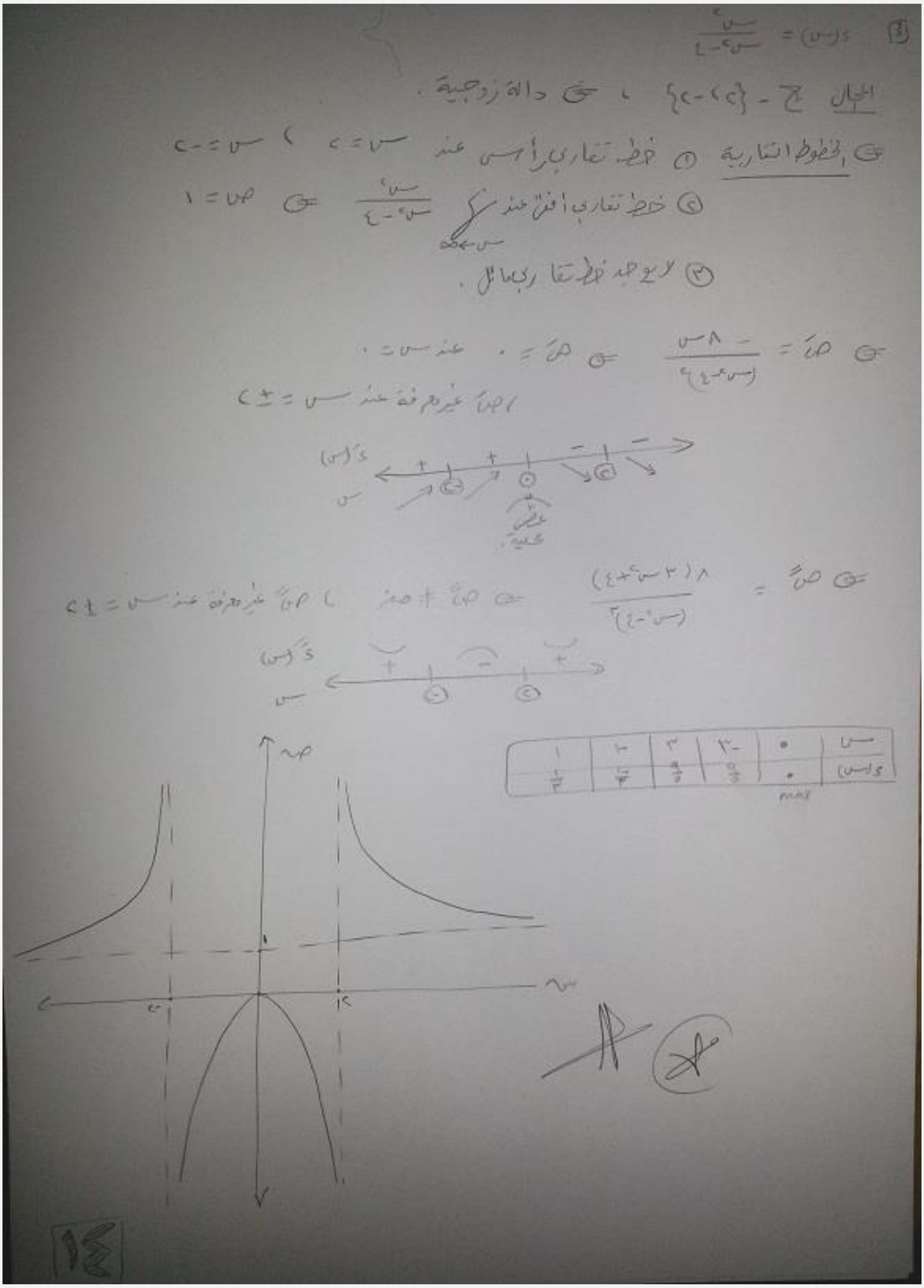
ص'': + + + + + +

س: ٠

ليست نقطة انقلاب.

س	٢−	٠	٢	٤	٤−
د(س)	١٩	٠	١٩−	٠	٠
	min	max	min		

ملحوظة (٠،٠) قيمة عظمى على هذا الشكل ⋀ وليس ⌒ لأنه صَ غير معرفة أي أنه ميل المماس = ∞ "مماس رأسي" وليس أفقي



③ $د(س) = \frac{س^2}{س^2 - ٤}$

الحل المجال ح − {٢، −٢} ، ⇐ د دالة زوجية .

⇐ الخطوط التقاربية ① خط تقارب رأسي عند س = ٢ ، س = −٢

② خط تقارب أفقي عند $\lim_{س \to \infty} \frac{س^2}{س^2 - ٤}$ ⇐ ص = ١

③ لا يوجد خط تقارب مائل .

⇐ $ص' = \frac{-٨س}{(س^2 - ٤)^2}$ ⇐ ص′ = ٠ عند س = ٠

، ص′ غير معرفة عند س = ±٢

⇐ $ص'' = \frac{٨(٣س^2 + ٤)}{(س^2 - ٤)^3}$ ⇐ ص″ ≠ صفر ، ص″ غير معرفة عند س = ±٢

س	٠	−٣	٣	−١	١
د(س)	٠	$\frac{٩}{٥}$	$\frac{٩}{٥}$	$\frac{١}{-٣}$	$\frac{١}{-٣}$

max

لا تنسونا من صالح دعائكم

وبالتوفيق ,,