تطبيقات على القيم العظمى والصغرى المطلقة:

هذا النظم يعتمد على إيجاد علاقة بين متغيرين فقط لإمكانية إجراء عملية تفاضل أحدهما بالنسبة إلى الآخر،
ثم إيجاد أكبر أو أصغر قيمة لهذا المتغير.
وحيث أن قيم هذا المتغير تكون محصورة في نطاق معين "فترة معينة" فهي تندرج تحت بند القيم العظمى والصغرى المطلقة.

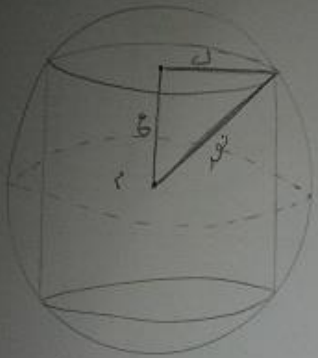
طريقة الحل:

1. اختزال عدد المتغيرات أو المجاهيل المعطاة إلى 2 فقط وذلك يتم عن طريق "إما علاقات مساعدة" إما بالاستعانة أو من هندسة الشكل، أو من معطيات المسألة نفسها.
2. إجراء التفاضل للمرة الأولى وإيجاد جميع النقاط الحرجة.
3. يجب تقييم بداية ونهاية الفترة التي يقع ضمنها هذا المتغير.
4. إيجاد القيم لكل من "بداية ونهاية الفترة - النقاط الحرجة"
5. في معظم الأحيان يكون بديهياً مستحيل أن تقع قيمة المتغير عند بداية ونهاية الفترة، لذلك يتم اختبار القيم الحرجة التي ظهرت لتكون قيم عظمى أو صغرى محلية.

← ويتم ذلك غالباً عن طريق اختبار المشتقة الثانية.

senior007

① قطعة اسطوانة من كرة مصمتة نصف قطرها "نق"
اثبت أن أكبر حجم للاسطوانة هو $\frac{\text{٤ط نق}^{\text{٣}}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}$.



* نصف قطر الكرة = نق
* ارتفاع الاسطوانة = ٢ع
* نصف قطر الاسطوانة = ل

$$\text{ل}^{\text{٢}} + \text{ع}^{\text{٢}} = \text{نق}^{\text{٢}}$$

⇐ حجم الاسطوانة "ح" = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\text{ح} = \text{ط} \times \text{ل}^{\text{٢}} \times \text{٢ع}$$

$$\text{ح} = \text{٢ط ع} \times (\text{نق}^{\text{٢}} - \text{ع}^{\text{٢}})$$

$$\text{ح} = \text{٢ط نق}^{\text{٢}}\text{ع} - \text{٢ط ع}^{\text{٣}}$$

تفاضل الطرفين بالنسبة الى ع .

$$\frac{\text{دح}}{\text{دع}} = \text{٢ط نق}^{\text{٢}} - \text{٦ط ع}^{\text{٢}}$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دع}} = \text{صفر} \Leftarrow \text{٢}\cancel{\text{ط}}\text{نق}^{\text{٢}} = \text{٦}\cancel{\text{ط}}\text{ع}^{\text{٢}}$$

$$\frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{نق}^{\text{٢}} = \text{ع}^{\text{٢}}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}\text{نق}$$

والسالب مرفوض "أطوال"

تفاضل مرة أخرى :

$$\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ح}}{\text{دع}^{\text{٢}}} = -\text{١٢ط ع} \Leftarrow \left[\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ح}}{\text{دع}^{\text{٢}}}\right]_{\text{ع}=\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}\text{نق}} = - \Rightarrow$$

قيمة عظمى محلية

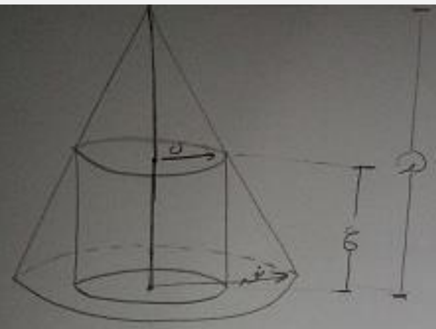
∴ أكبر ما يمكن

$$\text{بالتعويض} \Leftarrow \text{ح} = \text{٢ط نق}^{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}\text{نق} - \text{٢ط}\frac{\text{١}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}\text{نق}^{\text{٣}}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{٦ط نق}^{\text{٣}}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}} - \frac{\text{٢ط نق}^{\text{٣}}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{٤ط نق}^{\text{٣}}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}$$

قطعت اسطوانة من مخروط مصمت كما بالشكل.
أوجد أكبر حجم للاسطوانة.

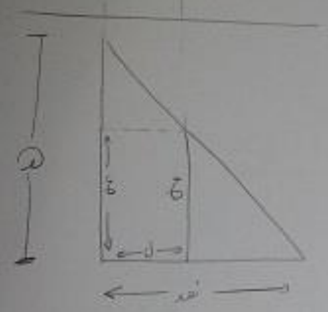


حجم الاسطوانة "ح" = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\text{ح} = \text{ط}\,\text{ل}^{٢} \times \text{ع}$$

$$\text{ح} = \text{ط}\,\text{ل}^{٢} \times \left(\text{هـ} - \frac{\text{هـ}}{\text{نق}}\,\text{ل}\right)$$

$$\text{ح} = \text{ط}\,\text{هـ}\,\text{ل}^{٢} - \frac{\text{ط}\,\text{هـ}}{\text{نق}}\,\text{ل}^{٣}$$



من التشابه

$$\frac{\text{ع}}{\text{هـ}} = \frac{\text{نق} - \text{ل}}{\text{نق}}$$

$$\text{ع}\,\text{نق} = \text{هـ}\,\text{نق} - \text{هـ}\,\text{ل}$$

$$\text{ع} = \text{هـ} - \frac{\text{هـ}}{\text{نق}}\,\text{ل}$$

لاحظ أن أبعاد المخروط تعتبر ثابتة بينما أبعاد الاسطوانة متغيرة إلى أن تعطي أكبر حجم.

تفاضل

$$\frac{\text{دح}}{\text{دل}} = ٢\text{ط}\,\text{هـ}\,\text{ل} - \frac{٣\text{ط}\,\text{هـ}}{\text{نق}}\,\text{ل}^{٢}$$

$$\frac{\text{دح}}{\text{دل}} = \text{صفر} \Leftarrow ٢\text{ط}\,\text{هـ}\,\text{ل} - \frac{٣\text{ط}\,\text{هـ}}{\text{نق}}\,\text{ل}^{٢} = \text{صفر}$$

$$\text{ل}\left(٢ - \frac{٣}{\text{نق}}\,\text{ل}\right) = \text{صفر}$$

ل = صفر مرفوضة من المعطيات

أو $\text{ل} = \frac{٢}{٣}\,\text{نق}$

تفاضل

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ح}}{\text{دل}^{٢}} = ٢\text{ط}\,\text{هـ} - \frac{٦\text{ط}\,\text{هـ}}{\text{نق}}\,\text{ل}$$

$$\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ح}}{\text{دل}^{٢}}\right|_{\frac{٢}{٣}\text{نق}} = ٢\text{ط}\,\text{هـ} - \frac{٦\text{ط}\,\text{هـ}}{\text{نق}} \times \frac{٢}{٣}\,\text{نق}$$

$$= ٢\text{ط}\,\text{هـ} - ٤\text{ط}\,\text{هـ} = - \Rightarrow$$

عظمى محلية
من أكبر ما يمكن

بالتعويض

$$\text{ح} = \text{ط}\,\text{هـ} \times \frac{٤}{٩}\,\text{نق}^{٢} - \frac{\text{ط}\,\text{هـ}}{\text{نق}} \times \frac{٨}{٢٧}\,\text{نق}^{٣}$$

$$\text{ح} = \frac{٤}{٩}\,\text{ط}\,\text{هـ}\,\text{نق}^{٢} - \frac{٨}{٢٧}\,\text{ط}\,\text{هـ}\,\text{نق}^{٢}$$

$$\text{ح} = \frac{٤}{٢٧}\,\text{ط}\,\text{هـ}\,\text{نق}^{٢}$$

ملحوظة: من الممكن الوصول لنفس الناتج عن طريق:
حجم المخروط − حجم الاسطوانة = أصغر ما يمكن

$\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

٣) مثلث قائم الزاوية محيطه ٢ل ، جد أبعاد هذا المثلث عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن.

$$\sqrt{س^2+ص^2} + س + ص = ٢ل$$

$$\sqrt{س^2+ص^2} = (٢ل - س - ص) \quad \text{بالتربيع}$$

$$\cancel{س^2+ص^2} = ٤ل^2 - ٢ل\,س - ٢ل\,ص + \cancel{س^2} - ٢ل\,س + س\,ص + \cancel{ص^2} - ٢ل\,ص + س\,ص$$

$$٤ل^2 - ٤\underline{ل\,س} - ٤ل\,ص + ٢\underline{س\,ص} = \text{صفر} \qquad (\div ٢)$$

$$س\,(ص - ٢ل) = -٢ل^2 + ٢ل\,ص$$

$$س = \frac{٢ل\,ص - ٢ل^2}{ص - ٢ل} \quad \leftarrow (1)$$

$$م = \tfrac{1}{2}\,س\,ص = \tfrac{1}{2}\,ص \times \frac{٢ل\,ص - ٢ل^2}{ص - ٢ل} = \frac{ل\,ص^2 - ل^2\,ص}{ص - ٢ل}$$

* تفاضل الطرفين بالنسبة إلى ص.

$$\frac{دم}{دص} = \frac{(ص - ٢ل)(٢ل\,ص - ل^2) - (ل\,ص^2 - ل^2\,ص)(1)}{(ص - ٢ل)^2}$$

$\frac{دم}{دص}$ غير معرفة عندما $(ص - ٢ل)^2 =$ صفر ، $\boxed{ص = ٢ل}$ مرفوض

$\frac{دم}{دص} =$ صفر عندما $(ص - ٢ل)(٢ل\,ص - ل^2) = (ل\,ص^2 - ل^2\,ص)$ ÷ ل حيث ل ≠ صفر

$$(ص - ٢ل)(٢ص - ل) = (ص^2 - ل\,ص)$$

$$٢ص^2 - ٥ل\,ص + ٢ل^2 = ص^2 - ل\,ص$$

$$ص^2 - ٤ل\,ص + ٢ل^2 = \text{صفر}$$

القانون العام لحل المعادلة التربيعية
الجذور $= \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أجـ}}{٢أ}$
حيث أس² + ب س + جـ = صفر

$$ص_{1,2} = \frac{٤ل \pm \sqrt{١٦ل^2 - ٨ل^2}}{٢} = \frac{٤ل \pm ٢\sqrt{٢}\,ل}{٢} = ٢ل \pm \sqrt{٢}\,ل = ل(٢ \pm \sqrt{٢})$$

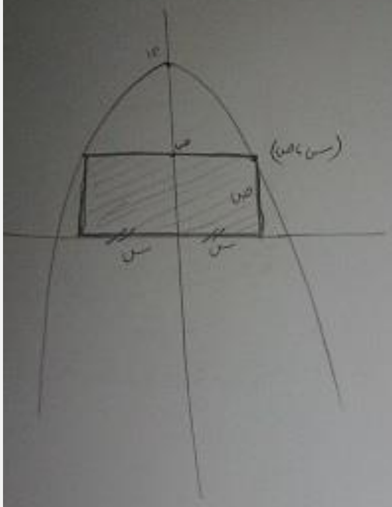
حيث $(٢+\sqrt{٢})ل \approx ٣,٤\,ل$ مرفوض "أكبر من طول المحيط نفسه".

$∴ ص = (٢ - \sqrt{٢})ل$ بالتعويض في (1)

$$س = (٢ - \sqrt{٢})ل$$

الضلع الثالث "الوتر" $= ٢ل - ٢(٢ - \sqrt{٢})ل = ٢ل - ٤ل + ٢\sqrt{٢}ل = ل(٢\sqrt{٢} - ٢)$

(٤) مستطيل تقع قاعدته السفلى على محور السينات ورأساه الآخران "طرفا قاعدته العليا" يقعان على المنحنى ص = ١٢ − $س^{٢}$ ، أوجد أكبر مساحة لسطحه.



$م = ٢ س ص$

من العلاقة المعطاة حيث (س، ص) ∈ للمنحنى

$م = ٢ س (١٢ - س^{٢})$

$م = ٢٤ س - ٢ س^{٣}$

$\frac{دم}{دس} = ٢٤ - ٦ س^{٢}$

$\frac{دم}{دس}$ = صفر ⇐ $س^{٢} = ٤$

$\boxed{س = ٢}$

$\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}} = -١٢ س$ ⇐ $\left.\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}}\right|_{س=٢}$ = −٢٤ ⇐ سالبة

∴ أكبر ما يمكن.

المساحة = $٢٤ س - ٢ س^{٣}$

م = ٤٨ − ١٦ = ٣٢ وحدة مربعة.

برهن أن ① أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة معلومة عندما يكون مربعاً وأوجد مساحة هذا المربع بدلالة طول نصف قطرها نق.

$س^2 + ص^2 = ٤ نق^2$

$م = س ص$

$م = س \left(٤ نق^2 - س^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$م = \left(٤ نق^2 س^2 - س^4\right)^{\frac{1}{2}}$

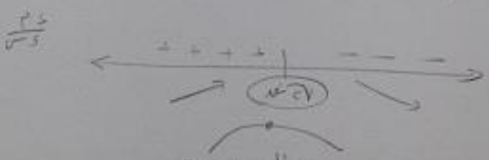
تفاضل الطرفين بالنسبة إلى س.

$$\frac{دم}{دس} = \frac{\cancel{٨}^{٤} نق^2 س - \cancel{٤}^{٢} س^3}{\cancel{٢}\sqrt{٤ نق^2 س^2 - س^4}}$$

$$\frac{دم}{دس} = \frac{٤ نق^2 - ٢ س^2}{\sqrt{٤ نق^2 - س^2}} \qquad \text{حيث } س \neq صفر$$

$\frac{دم}{دس} = صفر \Leftarrow ٤ نق^2 - ٢ س^2 = صفر \Leftarrow ٢ نق^2 = س^2 \Leftarrow \boxed{س = \sqrt{٢}\, نق}$

$\frac{دم}{دس}$ غير معرفة $\Leftarrow س = ٢ نق$ مرفوض.



عظمى محلية.

عندما $س = \sqrt{٢}\, نق \Leftarrow ص = \sqrt{٢}\, نق \Leftarrow$ مربع

المساحة $= س ص = ٢ نق^2$

seni

(٦) شبه منحرف متساوي الساقين، وقاعدته الصغرى تساوي طول كل من ساقيه = ك

اثبت أن طول قاعدته الكبرى = ٢ك عندما تكون مساحته أكبر ما يمكن.

مساحة شبه المنحرف = القاعدة المتوسطة × ع

$$م = \frac{ك + ك + 2س}{2} \times \sqrt{ك^2 - س^2}$$

$$م = (ك + س)(ك^2 - س^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$م = (ك + س)^{\frac{3}{2}}(ك - س)^{\frac{1}{2}}$$

تفاضل.

$$\frac{dم}{dس} = \left[(ك + س)^{\frac{3}{2}} \times \frac{-1}{2\sqrt{ك - س}}\right] + \left[(ك - س)^{\frac{1}{2}} \times \frac{3}{2}(ك + س)^{\frac{1}{2}} \times 1\right]$$

$\frac{dم}{dس}$ غير معرفة ⟸ $\sqrt{ك - س}$ = صفر ⟸ ك = س حرجة

$\frac{dم}{dس}$ = صفر ⟸ $\frac{3}{2}(ك - س)^{\frac{1}{2}}(ك + س)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(ك + س)^{\frac{3}{2}}(ك - س)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{(ك + س)^{\frac{3}{2}}}{(ك + س)^{\frac{1}{2}}}$$

حتماً ك + س ≠ صفر

$$3(ك - س) = ك + س$$

$$3ك - 3س = ك + س$$

$$2ك = 4س$$ ⟸

س = $\frac{1}{2}$ك حرجة

س: + + + | − − −

$\frac{dم}{dس}$: $\frac{ك}{2}$

max.

أكبر مساحة عندما س = $\frac{ك}{2}$

∴ طول القاعدة الكبرى = ك + 2س = ك + ك = 2ك

إذا كان ف هو بعد النقطة (١، ٠) عن النقطة (س، ص) الواقعة على المنحنى ص = $\sqrt{\text{س}}$
أوجد الإحداثيات (س، ص) لهذه النقطة التي يكون عندها ف أصغر ما يمكن.

$$\text{ف}^2 = (\text{س} - 1)^2 + (\text{ص} - 0)^2$$

$$\text{ف}^2 = \text{س}^2 - 2\text{س} + 1 + \text{ص}^2$$

حيث ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، (س، ص) ∋ للمنحنى

$$\therefore \text{ص}^2 = \text{س}$$

$$\text{ف}^2 = \text{س}^2 - 2\text{س} + 1 + \text{س}$$

$$\text{ف}^2 = \text{س}^2 - \text{س} + 1$$

$$\text{ف} = (\text{س}^2 - \text{س} + 1)^{\frac{1}{2}}$$

تفاضل الطرفين بالنسبة إلى س

$$\frac{d\text{ف}}{d\text{س}} = \frac{2\text{س} - 1}{2(\text{س}^2 - \text{س} + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$\frac{d\text{ف}}{d\text{س}}$ = صفر ⟸ $2\text{س} - 1$ = صفر

س = $\frac{1}{2}$ حرجة

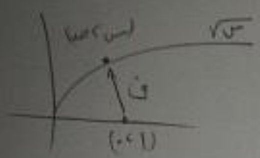
$\frac{d\text{ف}}{d\text{س}}$ غير معرفة عندما $2(\text{س}^2 - \text{س} + 1)^{\frac{1}{2}}$ = صفر "محال" لا حلول حقيقية

local min

بالتعويض ص$|_{\text{س}=\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ النقطة هي $(\frac{1}{2}، \frac{1}{\sqrt{2}})$.

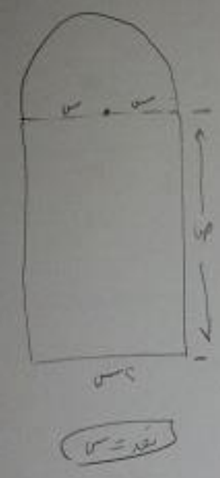
* شكل توضيحي غير ضروري في الحل



* تذكر !!
البعد بين نقطتين:

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$$

(٨) نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها على أحد أبعاد المستطيل، فإذا كان محيط النافذة = (٢ط + ٨) متر، وكانت النافذة تسمح بمرور أكبر كمية من الضوء، أثبت أن طول قطر الدائرة = ٤ متر، وأوجد البعد الآخر للمستطيل عندئذ.



* تسمح بمرور أكبر كمية من الضوء ⟸ مساحتها أكبر ما يمكن.

محيط النافذة = محيط ٣ أضلاع مستطيل + محيط ½ دائرة

$$2\pi + 8 = 2\text{ص} + 2\text{س} + \pi\text{س}$$

$$2\pi + 8 = 2\text{ص} + \text{س}(\pi + 2)$$

$$\boxed{\text{ص} = (\pi + 4) - \tfrac{1}{2}\text{س}(\pi + 2)}$$

⟸ المساحة = مساحة مستطيل + مساحة ½ دائرة.

$$\text{م} = 2\text{س}\text{ص} + \tfrac{1}{2}\pi\text{س}^2$$

$$\text{م} = \text{س}\left[(2\pi + 8) - (\pi + 2)\text{س}\right] + \tfrac{1}{2}\pi\text{س}^2$$

$$\text{م} = \text{س}(2\pi + 8) - \text{س}^2(\pi + 2) + \text{س}^2(\tfrac{1}{2}\pi)$$

تفاضل

$$\frac{d\text{م}}{d\text{س}} = (2\pi + 8) - (2\pi + 4)\text{س} + (\pi)\text{س}$$

$$\frac{d\text{م}}{d\text{س}} = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}(\pi - 4 - 2\pi) = 2\pi + 8$$

$$\text{س} = \frac{-(2\pi + 8)}{-\pi - 4} = \frac{2(\pi + 4)}{(\pi + 4)} = \boxed{2} \text{ متر}$$

⟸ ∴ قطر الدائرة = ٢س = ٤ متر #

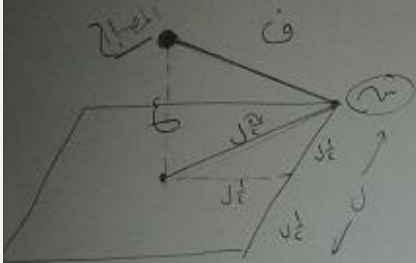
⟸ ص = ٢ متر #

$$\text{ص} = \pi + 4 - (\pi + 2)$$

$$= \cancel{\pi} + 4 - \cancel{\pi} - 2$$

$$= 2$$

٩) مصباح مُعلق رأسياً فوق مركز سطح أفقي مربع، فإذا كانت شدة الاستضاءة عند رؤوس المربع تتناسب طردياً مع بُعد المصباح عن السطح الأفقي، وعكسياً مع مكعب بُعد رأس المربع عن المصباح، برهن أن شدة الاستضاءة عند رؤوس المربع تكون أكبر ما يمكن عندما يكون المصباح على بُعد من السطح الأفقي = ½ طول ضلع المربع



نفرض: ش شدة الاستضاءة.
ع: البُعد العمودي بين المصباح والسطح الأفقي.
ل: طول ضلع المربع.
ف: بُعد المصباح عن رأس المربع

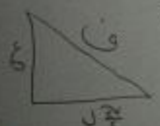
$\text{ش} \propto \text{ع}$ ، $\text{ش} \propto \frac{1}{\text{ف}^{3}}$

$\therefore \text{ش} \propto \frac{\text{ع}}{\text{ف}^{3}}$

$\therefore \text{ش} = \text{م} \cdot \frac{\text{ع}}{\text{ف}^{3}}$

حيث م ثابت التناسب.

* من ∆ القائم



$\text{ف}^{2} = \frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2}$

$\therefore \text{ف}^{3} = (\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})^{\frac{3}{2}}$

$$\text{ش} = \text{م} \cdot \frac{\text{ع}}{\text{ف}^{3}}$$

$$\text{ش} = \text{م} \cdot \frac{\text{ع}}{(\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

بالتفاضل

$$\frac{د\text{ش}}{د\text{ع}} = \text{م} \cdot \frac{(\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})^{\frac{3}{2}} \times 1 - \text{ع} \times \frac{3}{2}(\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})^{\frac{1}{2}} \times 2\text{ع}}{(\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})^{3}}$$

حيث $(\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})^{3} \neq$ صفر

$$\therefore \frac{د\text{ش}}{د\text{ع}} = \text{م} \cdot \frac{\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2} - 3\text{ع}^{2}}{(\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})^{\frac{5}{2}}} = \text{م} \cdot \frac{\frac{1}{2}\text{ل}^{2} - 2\text{ع}^{2}}{(\frac{1}{2}\text{ل}^{2} + \text{ع}^{2})^{\frac{5}{2}}}$$

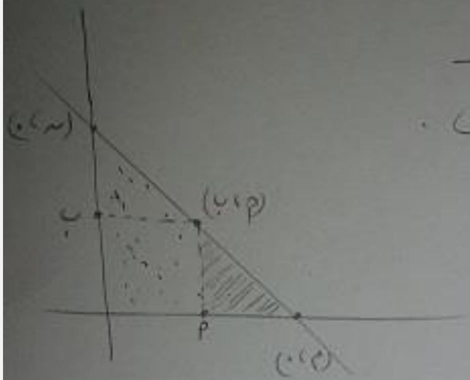
$\frac{د\text{ش}}{د\text{ع}}$ = صفر عندما

$\text{م}\,(\frac{1}{2}\text{ل}^{2} - 2\text{ع}^{2})$ = صفر

$\frac{1}{4}\text{ل}^{2} = \text{ع}^{2} \Leftarrow \text{ع} = \frac{1}{2}\text{ل}$

∴ أكبر ما يمكن عندما: الارتفاع (ع) = ½ طول ضلع المربع

(١٥) رسم مستقيم يمر بالنقطة الثابتة (أ ، ب) ليقطع محوري الإحداثيات في النقطتين (م ، ٠) ، (٠ ، ن) ، أثبت أن أقل مجموع لطولي الجزئين المقطوعين من محوري الإحداثيات $= (\sqrt{أ} + \sqrt{ب})^2$.



نفرض أن مجموع طولي الجزئين المقطوعين = ل .

$\therefore$ ل = م + ن

$ل = م + \frac{م ب}{م - أ}$

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى م ،

$\frac{دل}{دم} = 1 + \frac{(م-أ)(٠) - (م ب)(1)}{(م-أ)^2}$

من تشابه

$\frac{م-أ}{م} = \frac{ب}{ن}$

$ن = \frac{م ب}{م - أ}$

$\frac{دل}{دم}$ غير معرفة عند $(م - أ)^2 =$ صفر ، (م = أ) مرفوضة من رؤوس "المقطع المجال"

$\frac{دل}{دم}$ = صفر عندما $1 - \frac{\cancel{م^2 - م أ} - م ب}{(م - أ)^2} =$

$\therefore$ أ ب $= (م - أ)^2$

$م - أ = \sqrt{أ ب}$ "السالب مرفوض من الطول"

$م = \sqrt{أ ب} - أ$

$\frac{دل}{دم} = 1 + \frac{- أ ب}{(م - أ)^2}$ ← $\frac{د^2ل}{دم^2} = \frac{2 أ ب}{(م - أ)^3}$ عند $م = \sqrt{أ ب} - أ$ ، $\frac{د^2ل}{دم^2} \oplus$ $\therefore$ ل أصغر ما يمكن

← بالتعويض $ل = م + \frac{م ب}{م - أ} = \frac{م^2 - أ م + م ب}{م - أ} = \frac{أ ب + أ^2 + 2 أ \sqrt{أ ب} - أ \sqrt{أ ب} - أ^2 + ب \sqrt{أ ب} + أ ب}{\sqrt{أ ب}}$

$ل = \frac{2 أ ب + (أ + ب)\sqrt{أ ب}}{\sqrt{أ ب}} = 2\sqrt{أ ب} + (أ + ب)$

$= أ + 2\sqrt{أ ب} + ب = (\sqrt{أ} + \sqrt{ب})^2$

لا تنسونا من صالح دعائكم

وبالتوفيق ,,

بوابة الثانوية العامة senior007