الحلول النموذجية لاختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل والتكامل

النموذج الأول الكتاب المدرسى

أجب عن السؤال الآتى :

(١) (أ) إذا كان : د (س) $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & \text{، س} \geqslant ١ \\ ٢ \text{ س} & \text{، س} < ١ \end{cases}$ ابحث إتصال الدالة د عند س ١

وكذلك قابلية إشتقاقها عند س ١

الحل

∵ د (١) $(١)^{٢}$ + ١ ٢ (١)

، ∵ د (١^{+}) $(١)^{٢}$ + ١ ٢ (٢)

، ∵ د (١^{-}) ٢ × ١ ٢ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∵ د (١) د (١^{+}) د (١^{-}) ٢ ∴ الدالة د متصلة عند س ١ أولاً

، ∵ دَ (١^{+}) $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\dfrac{[(١ + \text{هـ})^{٢} + ١] - ٢}{\text{هـ}}$ ٢

$\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\dfrac{١ + ٢ \text{ هـ} + \text{هـ}^{٢} + ١ - ٢}{\text{هـ}}$ ٢

$\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\dfrac{\text{هـ} (٢ + \text{هـ})}{\text{هـ}}$ ٢

، ∵ دَ (١^{-}) $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\dfrac{٢ (١ + \text{هـ}) - ٢}{\text{هـ}}$ ٢

$\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $\dfrac{٢ + ٢ \text{ هـ} - ٢}{\text{هـ}}$ ٢

∵ دَ (١^{+}) دَ (١^{-}) ٢ ∴ الدالة د قابلة للإشتقاق عند س ١ ثانياً

(ب) أوجد ∫ (حتا^{٢}س + حاس) ٠ ى س

الحل

∵ حتا ٢ س ٢ حتا^{٢}س – ١ ⟸ حتا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$

∵ ∫ (حتا^{٢}س + حاس) ٠ ى س = ∫ ($\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ + حاس) ٠ ى س

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س - حتاس + ث

= $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س - حتاس + ث

---

(٢) (أ) المنحنى ص س^{٣}+ أ س^{٢} + ب س له نقطة إنقلاب عند (٣ ، – ٩) أوجد :

أولاً : قيمة كل من أ ، ب ثانياً : موقع القيم العظمى والصغرى المحلية له ٠

الحل

∵ ص س^{٣}+ أ س^{٢}+ ب س (١)

∴ ص َ ٣ س^{٢}+ ٢ أ س + ب (٢)

ص ً ٦ س + ٢ أ (٣)

عند نقطة الإنقلاب تكون ص ً ٠

∴ ٦ س + ٢ أ ٠ عندما س ٣ ∴ $\boxed{\text{أ} \quad -٩}$

∵ النقطة (٣ ، – ٩) ∋ لمنحنى الدالة ص س^{٣}+ أ س^{٢}+ ب س

بالتعويض عن قيمتى س ، ص وبالتعويض كذلك عن قيمة أ – ٩ فى العلاقة (١)

– ٩ ٢٧ – ٩ × ٩ + ٣ ب ∴ $\boxed{\text{ب} \quad ١٥}$

ولمعرفة النقط الحرجة للدالة نضع ص َ = صفر وبالتعويض فى العلاقة (٢)

٣ س^{٢}– ١٨ س + ١٥ = صفر وبالتحليل بإستخدام الآلة الحاسبة

∴ س = ٥ وأ، س = ١

∴ د ً(٥) > ٠ بالتعويض عن س = ٥ فى العلاقة (١) توجد قيمة صعرى محلية = – ٢٥

∴ د ً(١) < ٠ بالتعويض عن س = ١ فى العلاقة (١) توجد قيمة عظمى محلية = ٧

∴ (٥ ، −٢٥) موقع قيمة صغرى محلية ، (١ ، ٧) موقع قيمة عظمى محلية

(ب) إذا كان ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة عليه هو $\frac{٣ + س}{ص}$ فأوجد معادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمُر بالنقطة (−٣ ، ٥)

الحل

∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ + س}{ص}$ ص ٠ ءص = ٣ + س ٠ ءص بتكامل الطرفين

$\int$ ص ٠ ءص = $\int$ ٣ + س ٠ ءص

$\frac{١}{٢}$ ص^{٢} = ٣ س + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ث ، ∵ (−٣ ، ٥) تحقق مُعادلة المنحنى

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٢٥ = ٣ × (−٣) + $\frac{١}{٢}$ × ٩ + ث ∴ $\boxed{ث = ١٧}$

بالتعويض عن قيمة الثابت ∴ $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} = ٣ س + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ١٧ بالضرب × ٢

∴ مُعادلة المنحنى هى ص^{٢} = س^{٢} + ٦ س + ٣٤

(٣) (أ) إذا كان : س^{٢} + ص^{٢} س − ص ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عندما س ١

الحل

∵ س^{٢} + ص^{٢} س − ص بالتعويض عن قيمة س ١ لإيجاد قيمة ص أولاً

∴ ١ + ص^{٢} ١ − ص ص^{٢} − ص ص^{٢} + ص = ٠

ص (ص + ١) ٠ ∴ ص ٠ وأ، ص −١

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} س − ص بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ٢ س + ٢ ص ($\frac{ءص}{ءس}$) ١ − $\frac{ءص}{ءس}$

٢ ص ($\frac{ءص}{ءس}$) + $\frac{ءص}{ءس}$ ١ − ٢ س

($\frac{ءص}{ءس}$) (٢ ص + ١) ١ − ٢ س

($\frac{ءص}{ءس}$) $\frac{١ − ٢ س}{}$ بالتعويض عن النقطتين (١ ، ٠) ، (١ ، −١)

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) \quad \frac{\text{١ – ٢ س}}{\text{٢ ص + ١}}$

عند النقطة (١ ، ٠)

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) \quad \frac{\text{١ – ٢}}{\text{١}} \quad \text{– ١}$

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) \quad \frac{\text{١ – ٢ س}}{\text{٢ ص + ١}}$

عند النقطة (١ ، – ١)

$\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) \quad \frac{\text{١ – ٢}}{\text{– ٢ + ١}} \quad \text{١}$

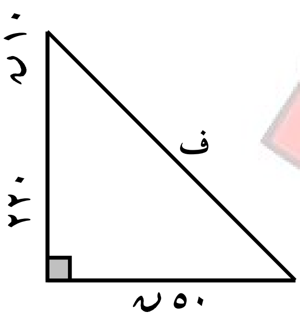
(ب) يرتفع بالون بمُعدل ثابت ١٠ متر / ث ، وعندما كان ارتفاع البالون ٢٢٠ متراً مرت من تحته سيارة تسير بسرعة منتظمة ٥٠ متر / ث ، أوجد سرعة تغير المسافة بينهما بعد ٢ ثانية ٠

الحل

بعد زمن قدره ن ثانية

∴ ارتفاع البالون ٢٢٠ + ١٠ ن ، بُعد السيارة عن مسقط البالون ٥٠ ن

∴ $\text{ف}^{٢}$ (٥٠ ن $)^{٢}$ + (٢٢٠ + ١٠ ن $)^{٢}$ ⟵ (١)



∴ ٢ ف $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}}$ ٢ (٥٠ ن) × ٥٠ + ٢ (٢٢٠ + ١٠ ن) × ١٠

٥٠٠٠ ن + ٤٤٠٠ + ٢٠٠ ن

∴ ٢ ف $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}}$ ٥٢٠٠ ن + ٤٤٠٠ بالقسمة على (٢)

∴ ف $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}}$ ٢٦٠٠ ن + ٢٢٠٠ ⟵ (٢)

و بعد زمن قدره ٢ ثانية

∵ $\text{ف}^{٢}$ (٥٠ ن $)^{٢}$ + (٢٢٠ + ١٠ ن $)^{٢}$

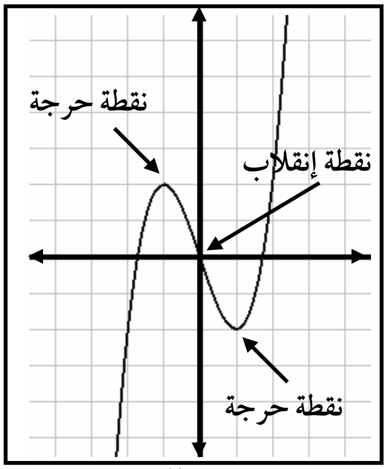
∴ $\text{ف}^{٢}$ (١٠٠ $)^{٢}$ + (٢٢٠ + ٢٠ $)^{٢}$ ومنها $\boxed{\text{ف} \quad \text{٢٦٠ متر}}$

و بالتعويض عن قيمة ف ٢٦٠ فى العلاقة (٢) وذلك للحصول على مُعدل تغير المسافة

∵ ٢٦٠ $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}}$ ٢٦٠٠ × ٢ + ٢٢٠٠ ⟸ ٢٦٠ $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}}$ ٧٤٠٠

∴ $\frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}} \quad \frac{\text{٧٤٠٠}}{\text{٢٦٠}} \quad \frac{\text{٣٧٠}}{\text{١٣}}$ م / ث

(٤) (أ) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د حيث د (س) س (س^{٢} – ٣) ، ثم أرسم شكلاً توضيحياً لمنحنى هذه الدالة ٠



الحل

∵ د (س) س (س^{٢} – ٣) س^{٣} – ٣ س ⟵ (١)

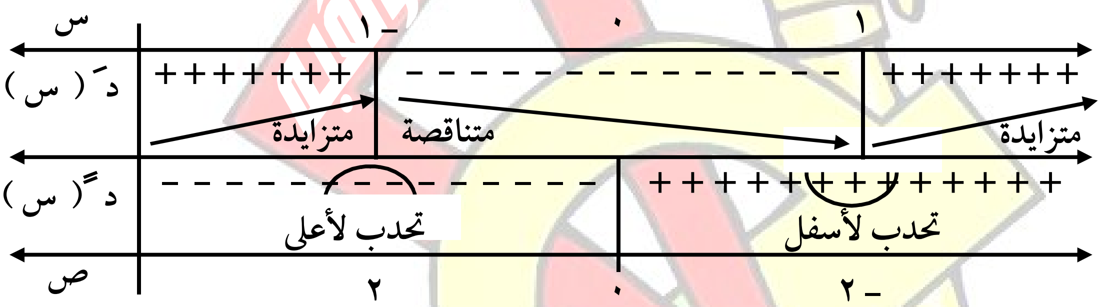
∴ دَ (س) ٣س^{٢} – ٣ ⟵ (٢)

دً (س) ٦ س ⟵ (٣)

∴ دَ (س) ٠ عندما ٣ س^{٢} – ٣ ٠ ⟸ ٣ (س^{٢} – ١) ٠

∴ $\boxed{\text{س ١}}$ وأ، $\boxed{\text{س – ١}}$ نقط حرجة

دً (س) ٠ عندما ٦ س ٠ ⟸ $\boxed{\text{س ٠}}$ نقطة إنقلاب



قيمة عظمى محلية نقطة إنقلاب قيمة صغرى محلية

الدالة تناقصية فى الفترة] – ١ ، ١ [، الدالة تزايدية فى ع –] – ١ ، ١ [

(ب) برهن على أن المماس للمنحنى : ص س^{٣} + س + ٢ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات ، ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة س – ١ ٠

الحل

∵ ص س^{٣} + س + ٢ ⟵ (١)

∴ صَ ٣س^{٢} + ١ ⟵ (٢)

، ∴ صَ موجبة دائماً ∴ المماس يميل بزاوية حادة على الإتجاه الموجب لمحور السينات

بالتعويض عن قيمة س – ١ فى العلاقة (١) للحصول على قيمة ص

∵ ص س^{٣} + س + ٢ ⟸ ص – ١ – ١ + ٢ = ٠

حسام وهبه

∴ نقطة التماس هى (– ١ ، ٠)

، ∵ ص َ   ٣س^٢ + ١   بالتعويض عن قيمة س   – ١ لإيجاد ميل المماس

∴ الميل   ص َ   ٣ + ١   ٤

∵ معادلة المماس هى : ص – ص$_١$ م (س – س$_١$)

∴ معادلة المماس هى : ص – ٠   ٤ (س + ١)   ⟸   ص   ٤ س + ٤

∴ معادلة المماس هى : ٤ س – ص + ٤   ٠

---

(٥) (أ) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى قا^٢س – حا س ، أوجد معادلته إذا علم أنه يمر بالنقطة (ط/٤ ، ١/√٢) ٠

الحل

∵ ءص/ءس   قا^٢س – حا س   بضرب الطرفين × ء س

ء ص   (قا^٢س – حا س) ء س   بالتكامل بالنسبة إلى س

∫ ء ص   ∫ (قا^٢س – حا س) ء س

ص   طا س + حتا س + ث   وبالتعويض عن قيمة س   ٤٥° ، ص   ١/√٢

١/√٢   ١ + ١/√٢ + ث   ∴ $\boxed{\text{ث} \quad – ١}$

∴ مُعادلة المنحنى هى : ص   طا س + حتا س + – ١

(ب) تتحرك نقطة على المنحنى : ص   س – س/(س^٢ + ٢) فإذا كان مُعدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن عند س   √٢ يساوى ٩ ، أوجد عند نفس النقطة مُعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن ٠

الحل

∵ ص   س – س/(س^٢ + ٢)   (س^٣ + س)/(س^٢ + ٢)   بالإشتقاق بالنسبة للزمن

∴ ءص/ءن   (س^٤ + ٥ س^٢ + ٢)/(س^٢ + ٢)^٢ × ءس/ءن   بالتعويض عن قيمة س   √٢ ، ءس/ءن = ٩

∴ ءص/ءن   ٤ + ١٠ × ٢ ... × ٩   ٩

حسام وهبه

الحلول النموذجية لاختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل والتكامل

النموذج الثانى الكتاب المدرسى

<u>أجب عن السؤال الآتى</u> :

(١) (أ) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة: د (س) $\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\text{س} - ١}{\sqrt{٣\text{س} - ٢} - \sqrt{\text{س}}} & \text{عندما س} \neq ١ \\ \text{أ} & \text{عندما س} \quad ١ \end{array} \right.$

متصلة عند س ١

الحل

∵ الدالة متصلة عند س ١

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{د}(\text{س}) \quad \text{د}(١) \quad \text{أ}$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{س} - ١}{\sqrt{٣\text{س} - ٢} - \sqrt{\text{س}}} \times \dfrac{\sqrt{٣\text{س} - ٢} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{٣\text{س} - ٢} + \sqrt{\text{س}}} \quad \text{أ}$

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{(\text{س} - ١)(\sqrt{٣\text{س} - ٢} + \sqrt{\text{س}})}{٣\text{س} - ٢ - \text{س}} \quad \text{أ}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{(\text{س} - ١)(\sqrt{٣\text{س} - ٢} + \sqrt{\text{س}})}{٢\text{س} - ٢} \quad \text{أ}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{(\text{س} - ١)(\sqrt{٣\text{س} - ٢} + \sqrt{\text{س}})}{٢(\text{س} - ١)} \quad \text{أ}$

$\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{(\sqrt{٣\text{س} - ٢} + \sqrt{\text{س}})}{٢} \quad \text{أ}$ ∴ $\boxed{\text{أ} \quad ١}$

(ب) أوجد $\int \text{س} \sqrt[٣]{\dfrac{٦}{\text{س}^٢} + \dfrac{٥}{\text{س}^٣}} \cdot \text{ءس}$ ، $\int \text{حتا}\left(\dfrac{\text{س}}{٢} + ٢\right) \cdot \text{ءس}$

الحل

∵ $\int \text{س} \sqrt[٣]{\dfrac{٦}{\text{س}^٢} + \dfrac{٥}{\text{س}^٣}} \cdot \text{ءس} = \int \text{س} \left(\dfrac{٦}{\text{س}^٢} + \dfrac{٥}{\text{س}^٣}\right)^{\frac{١}{٣}} \cdot \text{ءس}$

$= \int \left[\text{س}^٣ \left(\dfrac{٦}{\text{س}} + \dfrac{٥}{\text{س}} \right) \right]^{\frac{١}{٣}} \cdot \text{ءس}$

$$= \int (٦\text{س} + ٥)^{\frac{١}{٣}} \cdot \text{ءس} = \frac{١}{٦} \left[\frac{(٦\text{س}+٥)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}} \right] + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٦} \times \frac{٣}{٤} \times (٦\text{س}+٥)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٨} (٦\text{س}+٥)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$$

، $\int \text{حتا} \left(\frac{\text{س}}{٢} + ٢ \right) \cdot \text{ءس} = ٢ \,\text{حا} \left(\frac{\text{س}}{٢} + ٢ \right) + \text{ث}$

---

(٢) (أ) أوجد مُعادلة المماس لمنحنى الدالة : ص ٢ حا س + حتا س عند النقطة س ٠

الحل

∵ ص ٢ حا س + حتا س ، س ٠ ∴ ص ٢ حتا ٠ + حا ٠ ١

∴ نقطة التماس هى (٠ ، ١)

، ∵ ص ٢ حا س + حتا س

∴ الميل ص َ ٢ حتا س – حا س ٢ حتا ٠ – حا ٠ ٢

∵ معادلة المماس هى : ص – $\text{ص}_١$ م (س – $\text{س}_١$)

∴ معادلة المماس هى : ص – ١ ٢ (س + ٠) ⟸ ص – ١ ٢ س

∴ معادلة المماس هى : ٢ س – ص + ١ ٠

(ب) إذا عُلم أن : $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ $\text{س}^٢ - ١$ عند أى نقطة من نقط المنحنى ص د (س) أوجد مُعادلة المنحنى إذا عُلم أنه يمس المستقيم : س + ١٢ ص حـ عند النقطة (١ ، ١)

الحل

∵ $\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢}$ $\text{س}^٢ - ١$ بالتكامل بالنسبة إلى س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $\frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \text{س} + \text{ث}_١$ ⟵ (١)

، ∵ س + ١٢ ص حـ بالإشتقاق بالنسبة إلى س ١ + ١٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ٠

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ١ ... (٢)

حسام وهبه

من (١) ، (٢) لتعيين قيمة الثابت ث$_{١}$

$\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س + ث$_{١}$ = − $\frac{١}{١٢}$ وعندما س ١ ∴ $\boxed{ث_{١} \quad \frac{٧}{١٢}}$

∴ $\frac{دص}{دس}$ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س + $\frac{٧}{١٢}$ بالتكامل مرة أخرى بالنسبة إلى س

∴ ص $\frac{١}{١٢}$ س^{٤} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٧}{١٢}$ س + ث$_{٢}$ عند النقطة (١ ، ١) ∴ $\boxed{ث_{٢} \quad \frac{٥}{٦}}$

∴ مُعادلة المنحنى هى : ص $\frac{١}{١٢}$ س^{٤} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{٧}{١٢}$ س + $\frac{٥}{٦}$

---

(٣) (أ) إذا كان : ص^{٢} س^{٢}(١ − س) فأثبت أن : ص $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ + ($\frac{دص}{دس}$)^{٢} + ٣ س ١

الحل

∵ ص^{٢} س^{٢}(١ − س) = س^{٢} − س^{٣} بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ٢ ص $\frac{دص}{دس}$ ٢ س − ٣ س^{٢} بالإشتقاق بالنسبة إلى س مرة أخرى

∴ ٢ × $\frac{دص}{دس}$ × $\frac{دص}{دس}$ + ٢ ص ($\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$) = ٢ − ٦ س بالقسمة على (٢)

($\frac{دص}{دس}$)^{٢} + ص ($\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$) = ١ − ٣ س

∴ ص $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ + ($\frac{دص}{دس}$)^{٢} + ٣ س ١ #

(ب) ابحث تحدُب المنحنى ص س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ١٠ ، وكذلك القيم العظمى والصغرى المطلقة فى الفترة [− ١ ، ٥] .

الحل

∵ ص س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ١٠ (١)

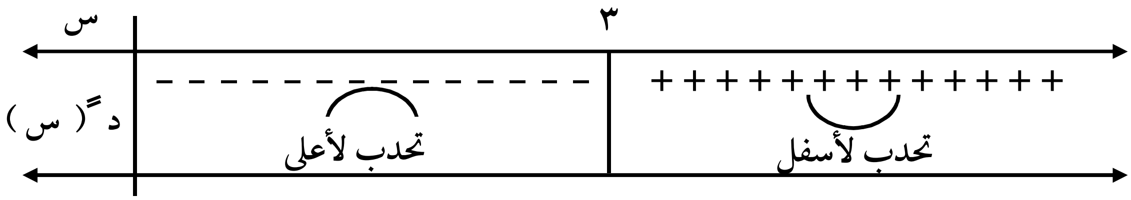
ص$'$ ٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤ (٢)

ص$''$ ٦ س − ١٨ (٣)

ص$'$ ٠ عندما ٣ س^{٢} − ١٨ س + ٢٤ ٠ وبالتحليل لإيجاد قيم س

∴ $\boxed{س \quad ٤}$ وأ $\boxed{س \quad ٢}$ وعندها النقط الحرجة

ص$''$ ٠ عندما ٦ س − ١٨ ٠ ∴ $\boxed{س = ٣}$ وعندها نقطة إنقلاب



ولحساب القيم العظمى والصغرى المطلقة نُعوض عن قيم س −١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ فى العلاقة (١)

∵ ص = د (س) س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ١٠ (١)

∴ د (−١) −١ + ٩ − ٢٤ − ١٠ − ٤٤ قيمة صغرى مطلقة

، د (٢) ٨ − ٣٦ + ٤٨ − ١٠ ١٠ قيمة عظمى مطلقة

، د (٤) ٦٤ − ١٤٤ + ٩٦ − ١٠ ٦

، د (٥) ١٢٥ − ٢٢٥ + ١٢٠ − ١٠ ١٠ قيمة عظمى مطلقة

---

(٤) (أ) إيناء مملوء بسائل يتسرب من ثُقب صغير فإذا كان حجم السائل فى الوعاء يتغير بمُعدل ٤,٠ ن − ٤٠ سم^{٣}/ ث ، وكان حجم السائل بعد ٣٠ ثانية من بدء التسرب ٩٨٠ سم^{٣} ، أوجد سعة الإناء وبين بعد كم ثانية يُصبح الإناء فارغاً ٠

الحل

∵ $\frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ = ٤,٠ ن − ٤٠ بالضرب × دن

دع = (٤,٠ ن − ٤٠) ٠ دن بتكامل الطرفين

∴ ∫ دع = ∫ (٤,٠ ن − ٤٠) ٠ دن

∴ ع = ٢,٠ ن^{٢} − ٤٠ ن + ث ، ∵ ع = ٩٨٠ سم^{٣} بعد ٣٠ ثانية

∴ ٩٨٠ = ٢,٠ (٣٠)^{٢} − ٤٠ × ٣٠ + ث ∴ ث = ٢٠٠٠

∴ ع = ٢,٠ ن^{٢} − ٤٠ ن + ٢٠٠٠

ولإيجاد سعة الإناء نضع ن ٠ ∴ سعة الإناء = ٢٠٠٠ سم^{٣}

ولمعرفة الزمن الذى يفرغ فيه الإناء نضع ع ٠

∴ ٠ = ٢,٠ ن^{٢} − ٤٠ ن + ٢٠٠٠ بالتحليل ∴ ن ١٠٠ ثانية

(ب) إذا عُلم أن : د (س) $\quad$ أ س^{٢} + ب س + ٢ لها نقطة حرجة عند (١ ، ٤) ، أوجد قيمة كل من أ ، ب ، وحدد نوع النقطة .

الحل

∵ د (س) $\quad$ أ س^{٢} + ب س + ٢ ⟵ (١)

∴ دَ(س) $\quad$ ٢ أ س + ب ⟵ (٢)

∵ النقطة (١ ، ٤) هى نقطة حرجة ∴ دَ (١) $\quad$ ٠ ∴ $\boxed{\text{٢ أ + ب} \quad \text{٠}}$ (٣)

، ∵ النقطة (١ ، ٤) ∋ لمنحنى الدالة ∴ $\boxed{\text{أ + ب} \quad \text{٢}}$ (٤)

وبحل المعادلتين (٣) ، (٤) جبرياً ∴ $\boxed{\text{أ} \quad \text{-٢}}$ ، $\boxed{\text{ب} \quad \text{٤}}$

ولمعرفة نوع النقطة نوجد دً (س) ونعوض عن قيمة أ

∴ دً(س) $\quad$ ٢ أ $\quad$ ٢ × (-٢) $\quad$ - ٤ كمية سالبة

∴ النقطة (١ ، ٤) عندها الدالة قيمة عظمى محلية .

---

(٥) (أ) أوجد ميل المماس للمنحنى : س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص - ٨ $\quad$ ٠ عند نقطة تقاطعه مع محور السينات .

الحل

∵ س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص - ٨ $\quad$ ٠ $\quad$ بوضع ص $\quad$ ٠

∴ س^{٢} - ٢ س - ٨ $\quad$ ٠ $\quad$ بالتحليل ∴ س $\quad$ ٤ $\quad$ وأ، س $\quad$ -٢

∴ نقط التقاطع هى (٤ ، ٠) ، (-٢ ، ٠)

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص - ٨ $\quad$ ٠ $\quad$ بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ٢ س + ٢ص ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$) - ٢ + ٤ ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$) $\quad$ ٠

($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$) (٢ص + ٤) $\quad$ ٢ - ٢ س $\quad$ ∴ الميل $\quad$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $\quad$ $\frac{\text{٢ - ٢ س}}{\text{٢ص + ٤}}$

∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (٤ ، ٠) $\quad$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $\quad$ $\frac{\text{٢ - ٢ × ٤}}{\text{٢ × ٠ + ٤}}$ $\quad$ - $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

، ميل المماس للمنحنى عند النقطة (-٢ ، ٠) $\quad$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ $\quad$ $\frac{\text{٢ - ٢ × -٢}}{\text{٢ × ٠ + ٤}}$ $\quad$ $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

(ب) وعاء إسطوانى مفتوح من قاعدته العليا سعته ٨٠٠٠ ط سم^{٣} ، أوجد أبعاده التى تجعل مساحته أقل ما يمكن ٠

الحل

∵ المساحة السطحية   المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة

∴ م   ٢ ط نق ع + ط نق^{٢} ⟵ (١)

∵ حجم الإسطوانة   ٨٠٠٠ ط   ∴ ط نق^{٢}ع   ٨٠٠٠ ط

∴ ع $\frac{\text{٨٠٠٠}}{\text{نق}^{٢}}$ ⟵ (٢)

بالتعويض بالعلاقة (٢) فى العلاقة (١)

∴ م   ٢ ط نق × $\frac{\text{٨٠٠٠}}{\text{نق}^{٢}}$ + ط نق^{٢} ٢ ط × $\frac{\text{٨٠٠٠}}{\text{نق}}$ + ط نق^{٢}

∴ م   ط ($\frac{\text{١٦٠٠٠ + نق}^{٣}}{\text{نق}}$)

∴ م$'$ = ط ($\frac{\text{نق × ٣ نق}^{٢}\text{ – (١٦٠٠٠ + نق}^{٣}\text{) × ١}}{\text{نق}^{٢}}$)

∴ م$'$ = ط ($\frac{\text{٣ نق}^{٣}\text{ – ١٦٠٠٠ – نق}^{٣}}{\text{نق}^{٢}}$)

∴ م$'$ = ط ($\frac{\text{٢ نق}^{٣}\text{ – ١٦٠٠٠}}{\text{نق}^{٢}}$)

م$'$ = ٠ عندما ٢ نق^{٣} – ١٦٠٠٠   ٠ ⟸ ٢ نق^{٣} = ١٦٠٠٠

نق^{٣} = ٨٠٠٠   ∴ $\boxed{\text{نق = ٢٠}}$

وبالتعويض فى العلاقة (٢) عن قيمة نق للحصول على قيمة ع   ∴ ع $\frac{\text{٨٠٠٠}}{\text{٤٠٠}}$ = ٢٠

∵ م$''$ = ط ($\frac{\text{نق}^{٢}\text{ × ٦ نق}^{٢}\text{ – (نق}^{٣}\text{ – ١٦٠٠٠) ٢نق}}{\text{نق}^{٤}}$)

م$''$ = ط ($\frac{\text{٤ نق}^{٤}\text{ + ٣٢٠٠٠ نق}}{\text{نق}^{٤}}$)   عند نق = ٢٠

م$''$ > ٠   ∴ المساحة أصغر مايمكن عندما تكون أبعاده = ٢٠ ، ٢٠ سم

حسام وهبه

الحلول النموذجية لاختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل والتكامل

النموذج الثالث الكتاب المدرسى

<u>أجب عن السؤال الآتى</u> :

(١) (أ) ابحث إتصال الدالة : د (س) $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما س} \geqslant ١ \\ ٢\ س & \text{عندما س} < ١ \end{cases}$

عند س ١ ، ثم قابليتها للإشتقاق عند نفس النقطة .

الحل

∵ د (١) $(١)^{٢} + ١$ ٢ (١)

، ∵ د (١^{+}) $(١)^{٢} + ١$ ٢ (٢)

، ∵ د (١^{-}) ٢ × ١ ٢ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∵ د (١) د (١^{+}) د (١^{-}) ٢ ∴ الدالة د متصلة عند س ١ أولاً

، ∵ د َ(١^{+}) $\lim_{ه \to ٠} \frac{[(١ + ه)^{٢} + ١] - ٢}{ه}$ ٢

$\lim_{ه \to ٠} \frac{١ + ٢ ه + ه^{٢} + ١ - ٢}{ه}$ ٢

$\lim_{ه \to ٠} \frac{ه (٢ + ه)}{ه}$ ٢

، ∵ د َ(١^{-}) $\lim_{ه \to ٠} \frac{٢ (١ + ه) - ٢}{ه}$ ٢

$\lim_{ه \to ٠} \frac{٢ + ٢ ه - ٢}{ه}$ ٢

∵ د َ(١^{+}) د َ(١^{-}) ٢ ∴ الدالة د قابلة للإشتقاق عند س ١ ثانياً

(ب) أوجد $\int \frac{\text{س} - ١}{(٢\text{س} + ١)^{٣}} \cdot \text{ءس}$

الحل

∵ $\int \frac{\text{س} - ١}{(٢\text{س} + ١)^{٣}} \cdot \text{ءس}$ بالضرب بسطاً ومقاماً × (٢)

$$\int \frac{٢\text{س} - ٢}{٢(٢\text{س} + ١)^{٣}} \cdot \text{ءس} = \int \frac{(٢\text{س} + ١) - ٣}{٢(٢\text{س} + ١)^{٣}} \, \text{ءس}$$

$$\int \left[\frac{١}{٢} (٢\text{س} + ١)^{-٢} - \frac{٣}{٢} (٢\text{س} + ١)^{-٣} \right] \cdot \text{ءس}$$

$$= \frac{١}{٤} \times \frac{(٢\text{س} + ١)^{-١}}{-١} - \frac{٣}{٤} \times \frac{(٢\text{س} + ١)^{-٢}}{-٢} + \text{ث}$$

$$- \frac{١}{٤} (٢\text{س} + ١)^{-١} + \frac{٣}{٨} (٢\text{س} + ١)^{-٢} + \text{ث}$$

---

(٢) (أ) أوجد مُعادلة المماس لمنحنى الدالة : ص س حتا ٢ س + حا س عند نقطة الأصل ·

الحل

∵ ص س حتا ٢ س + حا س بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ $\text{ص}'$ حتا ٢ س − ٢ س حا ٢ س + حتا س

عند النقطة (٠ ، ٠)

$\text{ص}'$ حتا ٠ − ٢ × ٠ × حا ٠ + حتا ٠ ١ − ٠ + ١ = ٢

∵ معادلة المماس هى : ص − $\text{ص}_١$ م (س − $\text{س}_١$)

∴ معادلة المماس هى : ص − ٠ ٢ (س + ٠) ⟸ ص ٢ س

∴ معادلة المماس هى : ٢ س − ص ٠

(ب) نقطة تتحرك على المنحنى س ص س + ص − ٥ أوجد موقع النقطة فى اللحظة التى يكون فيها مُعدل تغير أحدثيها السينى بالنسبة للزمن يساوى مُعدل تغير احدثيها الصادى بالنسبة للزمن ·

الحل

∵ س ص س + ص − ٥ ⟵ (١) بالإشتقاق بالنسبة للزمن

∵ س $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right)$ + ص $\left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right)$ $\left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}\right)$ + $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right)$

∵ $\frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ مُعطى بالقسمة الطرفين على كل من $\frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$

∴ س + ص ١ + ١ ⟸ س + ص ٢ ∴ ص = ٢ - س ⟵ (٢)

بالتعويض عن قيمة ص = ٢ - س فى العلاقة رقم (١)

∵ س ص س + ص - ٥ (١)

∴ س (٢ - س) س + ٢ - س - ٥ ⟸ ٢ س - س^{٢} + ٣ ٠

∴ س^{٢} - ٢ س - ٣ ٠ بالتحليل بإستخدام الآلة الحاسبة

∴ س ٣ وأ، س - ١ بالتعويض فى (٢)

∵ ص = ٢ - س ص = ٢ - س

∴ ص = ٢ - ٣ = - ١ ص = ٢ - (- ١)

ص = - ١ ص = ٣

∴ موضع النقط هى (٣ ، - ١) ، (- ١ ، ٣)

---

(٣) (أ) أوجد قيمة $\int$ حا^{٢}س ٠ ءس ٠

الحل

∵ $\int$ حا^{٢}س ٠ ءس = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ - $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س) ٠ ءس بالتكامل بالنسبة إلى س

∴ = $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س + ث = $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{١}{٤}$ حا ٢ س + ث

(ب) عين فترات التزايد والتناقص للمنحنى ص س (س - ٣)^{٢} ثم أرسم الشكل العام للمنحنى موضحاً عليه مواقع القيم العظمى والصغرى المحلية ونقط الإنقلاب إن وجدت ٠

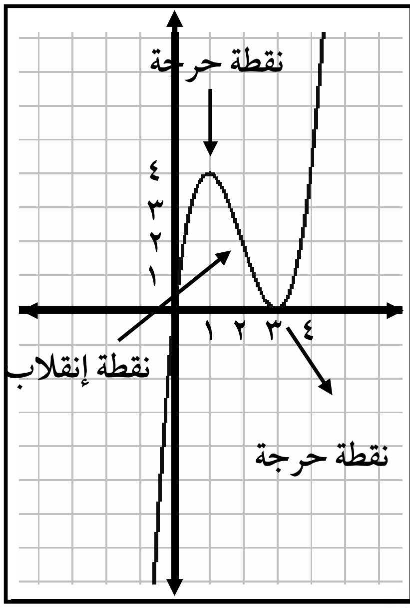
الحل

∵ ص س (س - ٣)^{٢} = س (س^{٢} - ٦ س + ٩) = س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س (١)

∴ صَ ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٩ (٢)

∴ صً ٦ س - ١٢ (٣)

صَ ٠ عندما ٣ س^{٢} - ١٢ س + ٩ ٠ بالتحليل



∴ $\boxed{\text{س} \quad ٣}$ وأ، $\boxed{\text{س} \quad ١}$

∴ صً ٠ عندما ٦ س − ١٢ ٠

∴ $\boxed{\text{س} \quad ٢}$

نقطة مساعدة نقطة مساعدة

Ñ	Ð	Ï	Î	Í	!Ž
Ñ	Í	Ï	Ï	Í	!

نقطة حرجة نقطة حرجة

(٤) (أ) منحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{\sqrt{\text{٢ ص} - ٧}}{\sqrt{\text{٤ س} - ٣}}$ أوجد مُعادلته إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (١ ، ٤)

الحل

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\sqrt{\text{٢ ص} - ٧}}{\sqrt{\text{٤ س} - ٣}} \Longleftarrow \sqrt{\text{٤ س} - ٣}\ \text{ءص} = \sqrt{\text{٢ ص} - ٧}\ \text{ءس}$

∴ $\frac{١}{\sqrt{\text{٢ ص} - ٧}}\ \text{ءص} = \frac{١}{\sqrt{\text{٤ س} - ٣}}\ \text{ءس}$ بتكامل الطرفين

∴ $\int \frac{١}{\sqrt{\text{٢ ص} - ٧}}\ \text{ءص} = \int \frac{١}{\sqrt{\text{٤ س} - ٣}}\ \text{ءس}$

$\int (\text{٢ ص} - ٧)^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءص} = \int (\text{٤ س} - ٣)^{-\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}$

$\frac{١}{٢} \times \frac{(\text{٢ ص} - ٧)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٤} \times \frac{(\text{٤ س} - ٣)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$(\text{٢ ص} - ٧)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} \times (\text{٤ س} - ٣)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

∵ ، النقطة (١ ، ٤) ∋ للمنحنى فهى تحقق مُعادلته وذلك لتعيين قيمة الثابت

$(٨ - ٧)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} \times (٤ - ٣)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث} \Longleftarrow ١ \quad \frac{١}{٢} + \text{ث}$

∴ ث $= \frac{١}{٢}$ ∴ مُعادلة المنحنى هى $(\text{٢ ص} - ٧)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} \times (\text{٤ س} - ٣)^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}$

∴ مُعادلة المنحنى هى : $٢\sqrt{٢ص - ٧} = \sqrt{٤س - ٣} + ١$

(ب) إذا كانت المقاومة بثقل الكيلوجرام المؤثرة على قطار تحرك بسرعة ع كم / ساعة نتعين من العلاقة :

م $\frac{١٠^{٥}}{ع} + ١٠$ ع ، أوجد أصغر قيمة للمقاومة .

الحل

∵ م $\frac{١٠^{٥}}{ع} + ١٠ع$ ∴ $م' = -\frac{١٠^{٥}}{ع^{٢}} + ١٠$

$م' = ٠$ عندما $-\frac{١٠^{٥}}{ع^{٢}} + ١٠ = ٠$ ∴ $\boxed{ع \quad ١٠٠ \text{ كم / س}}$

$م'' = \frac{٢ \times ١٠^{٥}}{ع^{٣}} = \frac{٢ \times ١٠^{٥}}{ع^{٣}} > ٠$ موجب

∴ أصغر قيمة للمقاومة $\frac{١٠^{٤}}{١٠٠} + ١٠ \times ١٠٠ = ٢٠٠٠$ ث كجم

---

(٥) (أ) أوجد قيمة : $\int [\, قا^{٢}(\frac{س}{٢} + ٥) + حتا(٢س + ١) \,]$ ءس

الحل

∵ $\int [\, قا^{٢}(\frac{س}{٢} + ٥) + حتا(٢س + ١) \,]$ ءس

$٢ \, طا(\frac{س}{٢} + ٥) + \frac{١}{٢} حا(٢س + ١) + ث$

(ب) إذا كان مُعدل التغير فى مساحة سطح صفيحة (م بالمتر المربع) بالنسبة للزمن (ن ثانية) يتعين بالعلاقة $م' = ٠,٦ ن - ٠,٥$ وكانت مساحة الصفيحة عند بدء التغير تساوى ٥٠ متراً مربعاً أوجد مساحة سطح الصفيحة بعد ١٠ ثوان .

الحل

∵ $\frac{ءم}{ءن} = ٠,٦ن - ٠,٥$ $\Longleftarrow$ $ءم = (٠,٦ن - ٠,٥)\, ءن$

∴ $\int ءم = \int (٠,٦ن - ٠,٥)\, ءن$ $\Longleftarrow$ $م = ٠,٣ن^{٢} - ٠,٥ن + ث$

عندما ن صفر ، م ٥٠ ∴ ث ٥٠

∴ $م = ٠,٣ن^{٢} - ٠,٥ن + ٥٠$

عندما ن ١٠ ∴ م = ٧٥ متر مربع

حسام وهبه

الحلول النموذجية لاختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل والتكامل

النموذج الرابع الكتاب المدرسى

أجب عن السؤال الآتى :

(١)(أ) أوجد $\int س^{١٠}\left(\frac{٢}{س}+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٥} ء س$ ، $\int (حا س + حتا س)^{٢} ء س$

الحل

$\because \int س^{١٠}\left(\frac{٢}{س}+\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٥} ء س = \int \left[س^{٢}\left(\frac{٢}{س}+\frac{٣}{س^{٢}}\right)\right]^{٥} ء س$

$= \int (٢ س + ٣)^{٥} ء س$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(٢ س + ٣)^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{١}{١٢} (٢ س + ٣)^{٦} + ث$

$\because \int (حا س + حتا س)^{٢} ء س = \int \left[(حا^{٢} س + حتا^{٢} س) + ٢ حا س حتا س\right] ء س$

$= \int (١ + حا ٢ س) ء س = س - \frac{١}{٢} حتا ٢ س + ث$

(ب) عين فترات التحدب لأعلى ولأسفل ومواقع الإنقلاب للمنحنى : $ص = س^{٤} - ٢٤ س^{٢} + ١٠$

الحل

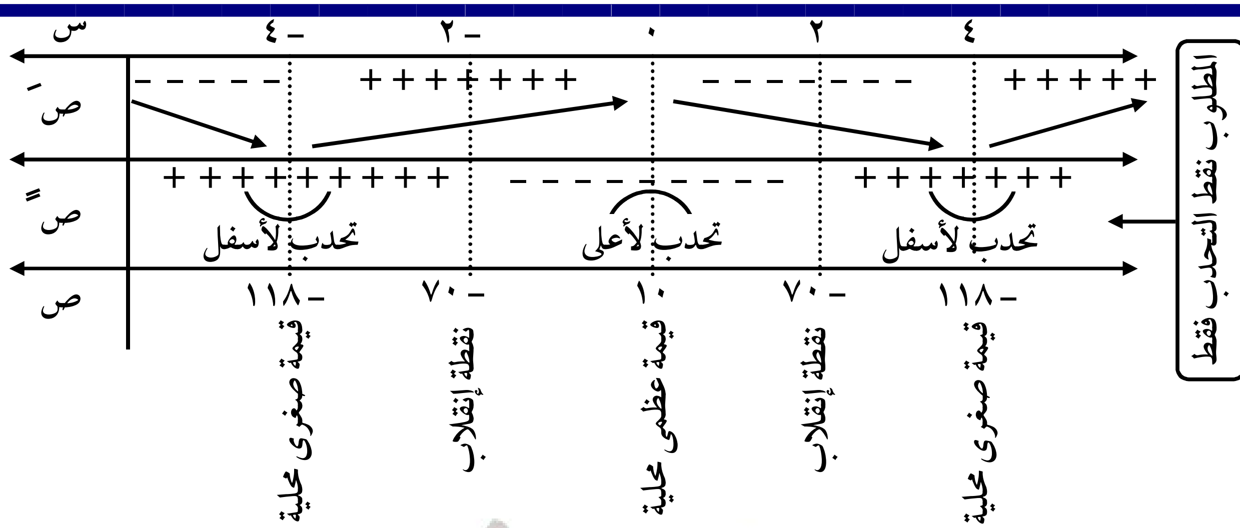
$\because ص = س^{٤} - ٢٤ س^{٢} + ١٠ \Longleftarrow ص' = ٤ س^{٣} - ٤٨ س \Longleftarrow ص'' = ١٢ س^{٢} - ٤٨$

$ص' = ٠$ عندما $٤ س^{٣} - ٤٨ س = ٠ \Longleftarrow ٤ س (س^{٢} - ١٢) = ٠$

$\therefore \boxed{س = ٠}$ و أ $\boxed{س = \sqrt{١٢}}$ و أ $\boxed{س = -\sqrt{١٢}}$

$ص'' = ٠$ عندما $١٢ س^{٢} - ٤٨ = ٠ \Longleftarrow س^{٢} - ٤ = ٠$

$\therefore \boxed{س = ٢}$ و أ $\boxed{س = -٢}$



(٢) (أ) أوجد مُعادلة المماس لمنحنى الدالة : ص $= \frac{\text{٢ طا س}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ س}}$ وكذلك عند النقطة س $= \frac{ط}{٦}$

الحل

∵ ص $= \frac{\text{٢ طا س}}{\text{١ − طا}^{٢}\text{ س}} =$ طا ٢ س ∴ الميل ص َ = ٢ قا^{٢} ٢ س

عندما س $= \frac{ط}{٦} =$ ٣٠° ∴ الميل ص َ = ٢ قا^{٢} ٦٠° = ٨

و عندما س $= \frac{ط}{٦} =$ ٣٠° ∴ ص = $\sqrt{٣}$

∵ معادلة المماس هى : ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

∴ معادلة المماس هى : ص − $\sqrt{٣}$ = ٨ (س − $\frac{ط}{٦}$)

∴ معادلة المماس هى : ص − $\sqrt{٣}$ = ٨ س − $\frac{٤ط}{٣}$

(ب) منحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠) ، وميل العمودى عليه عند أى نقطة عليه يساوى $\sqrt{\text{٢ س + ٥}}$

أوجد مُعادلة المنحنى ·

الحل

∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = - \frac{١}{\sqrt{\text{٢ س + ٥}}} = -(\text{٢ س + ٥})^{-\frac{١}{٢}}$

ءص = − (٢ س + ٥)$^{-\frac{١}{٢}}$ ءس بتكامل الطرفين

ص $= \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{٢ س + ٥})^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} +$ ث $= -(\text{٢ س + ٥})^{\frac{١}{٢}} +$ ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٠) فهى تحقق مُعادلته بالتعويض عن قيمتى س ، ص لإيجاد قيمة ث

٠ = − (٤ + ٥)$^{\frac{١}{٢}}$ + ث ∴ $\boxed{\text{ث} \quad ٣}$

∴ مُعادلة المنحنى هى ص = − ($\sqrt{٢\text{س} + ٥}$) + ٣

---

(٣) (أ) نقطة تتحرك على منحنى س^{٢} + ص^{٢} − ٥ س + ٣ ص − ٦ ٠ فإذا كانت سرعة إحداثيها السينى ٧ سم / ث عند النقطة (١ ، ٢) ، أوجد عند نفس النقطة سرعة إحداثيها الصادى ٠

الحل

∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٥ س + ٣ ص − ٦ ٠ بالإشتقاق بالنسبة للزمن

∴ ٢ س ($\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$) + ٢ ص ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$) − ٥ ($\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$) + ٣ ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$) ٠

، عند النقطة (١ ، ٢) ، $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ٧

∴ ٢ × ١ × ٧ + ٢ × ٢ ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$) − ٥ × ٧ + ٣ ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$) ٠

١٤ + ٤ ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$) − ٣٥ + ٣ ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$) ٠

٧ ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$) ٢١ ∴ $\boxed{\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \quad ٣ \text{ سم / ث}}$

(ب) أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة : ص س^{٣} − ١٢ س فى الفترة [− ١ ، ٤]

الحل

∵ ص س^{٣} − ١٢ س بالإشتقاق بالنسبة إلى س ∴ صَ ٣ س^{٢} − ١٢

صَ = ٠ عندما ٣ س^{٢} − ١٢ = ٠ ⟸ س^{٢} − ٤ = ٠

∴ س = ٢ ∈ [−١ ، ٤] و أ، س = − ٢ ∉ [− ١ ، ٤]

بالتعويض عن قيم س = − ١ ، س = ٢ ، س = ٤ فى الدالة الأصلية

∵ ص د (س) س^{٣} − ١٢ س

د (− ١) − ١ + ١٢ ١١

د (٢) ٨ − ٢٤ − ١٦ قيمة صغرى مطلقة

د (٤) ٦٤ − ٤٨ ١٦ قيمة عظمى مطلقة

(٤) (أ) إسطوانة تتمدد بإنتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها فإذا كان طول نصف قطرها نق يزداد بمُعدل ٢,٠ سم / ث ، وارتفاعها يزداد بمُعدل ١,٠ سم / ث ،

أوجد مُعدل التغير فى حجم الإسطوانة عندما نق ٢ سم ، ع ٥ سم .

$\frac{\text{ء نق}}{\text{ء ن}}$	٠,٢
$\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}}$	٠,١
نق	٢ سم
ع	٥ سم

الحل

∵ ح = ط نق^{٢} ع بالإشتقاق بالنسبة للزمن

∴ $\frac{\text{ء ح}}{\text{ء ن}}$ = ط [٢ نق ($\frac{\text{ء نق}}{\text{ء ن}}$) ع + نق^{٢} ($\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}}$)]

= ط [٢ × ٢ × ٠,٢ × ٥ + ٤ × ٠,١]

= ٤,٤ ط سم / ث

(ب) أوجد مُعادلة المنحنى الذى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{\text{٣ − ٢ س}}{\text{٢ ص + ١}}$ إذا عُلم أنه يمر بالنقطة (١ ، ٢) .

الحل

∵ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = $\frac{\text{٣ − ٢ س}}{\text{٢ ص + ١}}$ ⟸ (٢ ص + ١) ء ص = (٣ − ٢ س) ء س

∴ ∫ (٢ ص + ١) ء ص = ∫ (٣ − ٢ س) ء س

ص^{٢} + ص = ٣ س − س^{٢} + ث ، ∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ ٤ + ٢ = ٣ − ١ + ث ∴ $\boxed{\text{ث = ٤}}$

∴ مُعادلة المنحنى هى : ٣ س − س^{٢} = ص^{٢} + ص − ٤

(٥) (أ) إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} \text{س + ١} & \text{عندما س} \leqslant \text{١} \\ \text{٣ − أ س}^{٢} & \text{عندما س} > \text{١} \end{cases}$

متصلة عند س ١ فأوجد قيمة أ ، ثم أبحث قابليتها للإشتقاق عند س ١

الحل

∵ الدالة متصلة عند س ١ ∴ د (١) = د (١$^{+}$) = د (١$^{-}$)

∵ ١ + ١ = ٣ − أ ∴ $\boxed{\text{أ = ١}}$

، $\because$ $\text{د}'(١^{+})$ $\displaystyle\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{[٣ - (١ + \text{هـ})^{٢}] - ٢}{\text{هـ}}$

$\displaystyle\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{٣ - ١ - ٢\text{هـ} - \text{هـ}^{٢} - ٢}{\text{هـ}}$

$\displaystyle\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{هـ}\,(-٢ - \text{هـ})}{\text{هـ}} \quad -٢ \longrightarrow (١)$

، $\because$ $\text{د}'(١^{-})$ $\displaystyle\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{(١ + \text{هـ} + ١) - ٢}{\text{هـ}}$

$\displaystyle\lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{هـ}}{\text{هـ}} \quad ١ \longrightarrow (٢)$

$\because$ $\text{د}'(١^{+}) \neq \text{د}'(١^{-})$ $\therefore$ الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند س ١ ثانياً

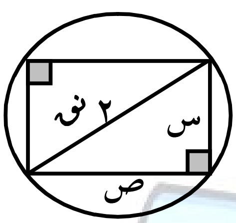
(ب) برهن أن أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة يكون مربعاً ، وأوجد مساحة هذا المربع بدلالة نصف قطر الدائرة نق .

الحل

$\because$ من نظرية فيثاغورث $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٤\,\text{نق}^{٢}$

$\text{ص}^{٢} = ٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}$

$\text{ص} = \sqrt{٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}} \qquad (١)$



$\because$ مساحة سطح المستطيل (م) $\text{س} \times \text{ص}$

$\because$ مساحة سطح المستطيل (م) $\text{س} \times \sqrt{٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}$

$\text{س}\,(٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore$ $\text{م}'$ $(٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}} + \text{س} \times \frac{١}{٢}(٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times (-٢\,\text{س})$

$(٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}} - \text{س}^{٢}(٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$

$\text{م}'$ ٠ عندما $(٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}} - \text{س}^{٢}(٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$ ٠ بالضرب $\times (٤\,\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

(٤ نق^{٢} − س^{٢}) − س^{٢} · $\Longleftarrow$ ٤ نق^{٢} − ٢ س^{٢} ·

∴ ٢ س^{٢} ٤ نق^{٢} $\Longleftarrow$ س^{٢} ٢ نق^{٢} ∴ $\boxed{\text{س} = \sqrt{٢}\ \text{نق}}$

بالتعويض عن قيمة س فى العلاقة (١) ٤ نق − ٢ س ·

وحيث م$''$ عندما س = $\sqrt{٢}$ نق تحقق قيمة عظمى

∵ ص = $\sqrt{\text{٤ نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}$ $\sqrt{\text{٤ نق}^{٢} - (\sqrt{٢}\ \text{نق})^{٢}}$

∴ $\boxed{\text{ص} = \sqrt{٢}\ \text{نق}}$

∵ س ص ∴ المستطيل هو مربع #

∵ مساحة سطح المربع طول الضلع × نفسه ·

∵ مساحة سطح المربع = $\sqrt{٢}$ نق × $\sqrt{٢}$ نق = ٢ نق^{٢}

الحلول النموذجية لاختبارات الكتاب المدرسى فى التفاضل والتكامل

النموذج الخامس الكتاب المدرسى

أجب عن السؤال الآتى :

(١) (أ) إذا كان د (س)
{ ٢ س^{٢} − ١ عندما س ⩾ ٢
{ س + ٥ عندما س < ٢

فأبحث إتصال الدالة د عند س ٢ ، وكذلك قابلية إشتقاقها عند س ٢

الحل

∵ د (٢) ٢ (٢)^{٢} − ١ ٧ (١)

، ∵ د (٢$^{+}$) ٢ (٢)^{٢} − ١ ٧ (٢)

، ∵ د (٢$^{-}$) ٢ + ٥ ٧ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

∵ د (٢) د (٢$^{+}$) د (٢$^{-}$) ٧ ∴ الدالة د متصلة عند س ٢ أولاً

، ∵ دَ (٢$^{+}$) نهـــا (ه ← ٠) [٢ (٢ + ه)^{٢} − ١] − ٧ / ه

نهـــا (ه ← ٠) ٨ + ٨ ه + ٢ ه^{٢} − ١ − ٧ / ه

نهـــا (ه ← ٠) ٢ ه (٤ + ه) / ه ٨

، ∵ دَ (١$^{-}$) نهـــا (ه ← ٠) (٢ + ه) + ٥ − ٧ / ه

نهـــا (ه ← ٠) ه / ه ١

∵ دَ (٢$^{+}$) ≠ دَ (٢$^{-}$) ∴ الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند س ٢

(ب) أوجد $\int \left(\dfrac{\text{س}^3 + \text{س} - 2}{\text{س} - 1} \right) \text{ء س}$ ، $\int (\text{حا س حتا س}) \text{ ء س}$

الحل

بإجراء القسمة التركيبية :

١	٠	١	٢-	١
	١	١	٢	
١	١	٢	صفر	

$\because \int \left(\dfrac{\text{س}^3 + \text{س} - 2}{\text{س} - 1} \right) \text{ء س} = \int \left[\dfrac{(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + \text{س} + 2)}{\text{س} - 1} \right] \text{ء س}$

$\int (\text{س}^2 + \text{س} + 2) \text{ ء س} = \frac{1}{3}\text{س}^3 + \frac{1}{2}\text{س}^2 + 2\text{ س} + \text{ث}$

$\because \int (\text{حا س حتا س}) \text{ ء س} = \int \frac{1}{2} \text{ حا ٢ س ء س} = \frac{1}{2} \times - \frac{1}{2} \text{ حتا ٢ س} + \text{ث}$

$= - \frac{1}{4} \text{ حتا ٢ س} + \text{ث}$

---

(٢) (أ) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى $\text{س}^2 + 3 \text{ س ص} + \text{ص}^2 = 5$ مع الإتجاه الموجب لمحوالسينات وذلك عند النقطة (١ ، ١) .

الحل

$\because \text{س}^2 + 3 \text{ س ص} + \text{ص}^2 = 5$ بالإشتقاق بالنسبة إلى س

$\therefore 2 \text{ س} + 3 \text{ س} \left(\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \right) + 3 \text{ ص} + 2 \text{ ص} \left(\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \right) = 0$

$\left(\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \right) (3 \text{ س} + 2 \text{ ص}) = - 2 \text{ س} - 3 \text{ ص}$

$\text{ط ا هـ} = \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{- 2 \text{ س} - 3 \text{ ص}}{3 \text{ س} + 2 \text{ ص}}$ عند النقطة (١ ، ١)

$\text{ط ا هـ} = \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \dfrac{-5}{5} = -1$ $\therefore$ ق ($\angle$ هـ) = 135°

(ب) منحنى يمر بنقطة الأصل وميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى (١ - حتا ٢ س)

أوجد مُعادلة المنحنى .

الحل

$\because \dfrac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = (1 - \text{حتا ٢ س})$ $\Longleftarrow$ ء ص = (١ - حتا ٢ س) ء س بالتكامل

∫ ء ص   ∫ (١ − حتا ٢ س) ء س   ⟸   ص = س − $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س + ث

عند نقطة الأصل (٠ ، ٠)   ∴ ٠   ٠ − $\frac{١}{٢}$ حا ٠ + ث

∴   ث   ٠   ∴ مُعادلة المنحنى هى ص = س − $\frac{١}{٢}$ حا ٢ س

---

(٣) (أ) للمنحنى س^{٢} − ص^{٢} + ٦ س − ٢٥ = ٠ من موقع النقطة (٢ ، −٣) وكانت السرعة الإبتدائية للإحداثى السينى ٦ سم / ث ، احسب السرعة الإبتدائية للإحداثى الصادى ٠

الحل

∵ س^{٢} − ص^{٢} + ٦ س − ٢٥ = ٠   بالإشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ ٢ س ($\frac{ء س}{ء ن}$) − ٢ ص ($\frac{ء ص}{ء ن}$) + ٦ ($\frac{ء س}{ء ن}$) = ٠

عند النقطة (٢ ، −٣)   ، $\frac{ء س}{ء ن}$ = ٦ سم / ث ٠

∴ ٢ × ٢ × ٦ + ٦ ($\frac{ء ص}{ء ن}$) + ٦ × ٦ = ٠   ∴ $\frac{ء ص}{ء ن}$ = − ١٠ سم ٠ ث

(ب) ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة ص   س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٣ س − ٥ موضحاً عليه القيم العظمى والصغرى المحلية وكذلك موقع الإنقلاب إن وجدت ٠

الحل

∵ ص   س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٣ س − ٥   بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ صَ   ٣ س^{٢} − ١٠ س + ٣   بالإشتقاق مرة آخرى بالنسبة إلى س

صَ   ٠   عندما   ٣ س^{٢} − ١٠ س + ٣   ٠   بالتحليل

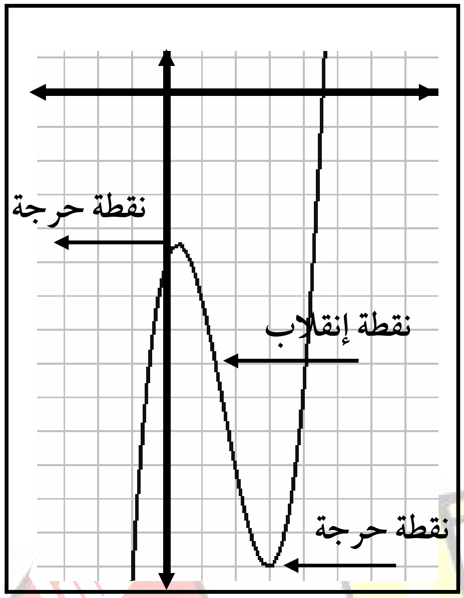
∴ $\boxed{س \quad ٣}$ وأ، $\boxed{س \quad \frac{١}{٣}}$

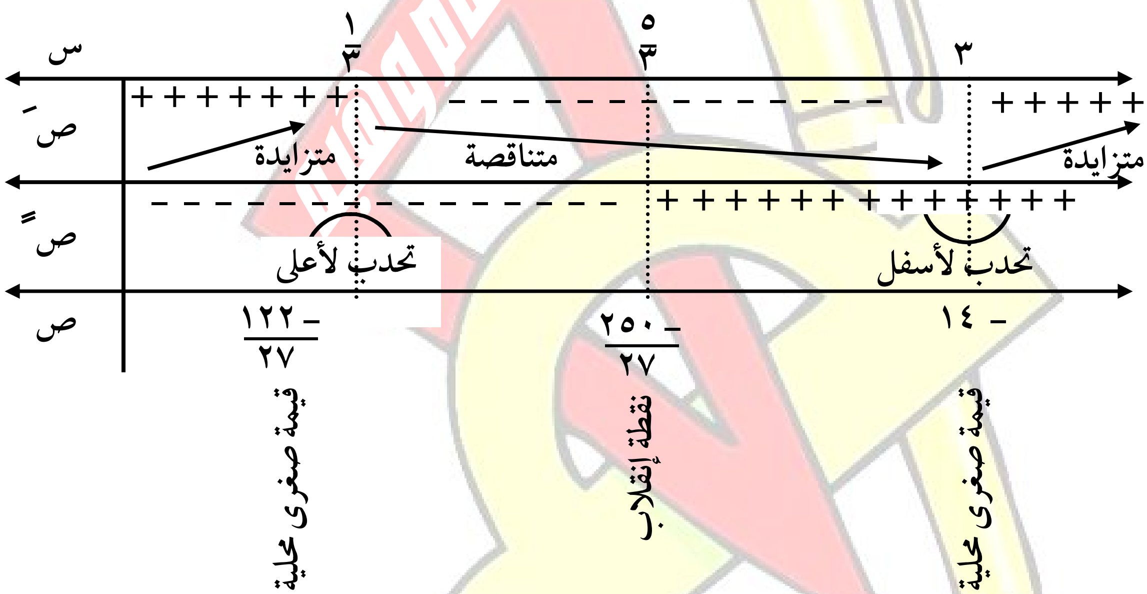
، صً   ٦ س − ١٠

صً   ٠   عندما   ٦ س − ١٠   ٠   ∴ س = $\frac{٥}{٣}$

بإختيار نقطتين مساعدتين والتعويض فى الدالة الأصلية لإيجاد قيمتى ص وبعد ذلك نرسم المنحنى

حسام وهبه





(٤) (أ) أوجد مُعادلة العمودى على المنحنى : ص^2 = س + ٢ عند نقطة تقاطعة مع المستقيم ص   س .

الحل

∵ ص^2 = س + ٢ ، ص   س   بالتعويض عن ص

∴ س^2 = س + ٢ ⟸ س^2 − س − ٢ = ٠ بالتحليل

∴ $\boxed{\text{س = ٢}}$ أو، $\boxed{\text{س = − ١}}$

ومنها $\boxed{\text{ص = ٢}}$ أو، $\boxed{\text{ص = − ١}}$

∴ نقط الت

، ∵ ص^2 = س + ٢ بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∵ ٢ ص ($\frac{دص}{دس}$) = ١ عند النقطة (٢ ، ٢)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٤}$ ∴ ميل العمودى – ٤

∴ مُعادلة العمودى هى : ص – ٢ – ٤ (س – ٢) ⟸ $\boxed{\text{٤ س + ص – ١٠ = ٠}}$

∵ ٢ ص ($\frac{دص}{دس}$) = ١ عند النقطة (–١ ، –١)

∴ $\frac{دص}{دس}$ = – $\frac{١}{٢}$ ∴ ميل العمودى ٢

∴ مُعادلة العمودى هى : ص + ١ ٢ (س + ١) ⟸ $\boxed{\text{٢ س – ص + ١ = ٠}}$

(ب) خزان فارغ سعته ٦ متر مكعب يصُب الماء بمُعدل (ن + ٢) متر مكعب كل دقيقة حيث ن الزمن
أوجد الزمن اللازم لامتلاء الخزان .

الحل

∵ $\frac{دع}{دن}$ = (ن + ٢) ⟸ دع = (ن + ٢) دن بالتكامل

∫ دع = ∫ (ن + ٢) دن ⟸ ع = $\frac{١}{٢}$ ن^2 + ٢ ن + ث

عند ن ٠ يكون ع ٠ ومنها ث ٠

∴ ع = $\frac{١}{٢}$ ن^2 + ٢ ن

ولكى يمتلئ الخزان يكون ع ٦ متر

∴ ٦ = $\frac{١}{٢}$ ن^2 + ٢ ن بالضرب × (٢)

∴ ن^2 + ٤ ن – ١٢ ٠ بالتحليل

∴ ن = ٢ وأ، ن = – ٦ مرفوض

∴ ن = ٢ دقيقة

---

(٥) (أ) منحنى يمُر بنقطة الأصل وميل العمودى عليه عند أى نقطة يساوى $\frac{–١}{\text{٣ س}^2\text{+ ٢ س}}$ أوجد مُعادلة المنحنى

الحل

∵ ميل العمودي على المنحنى عند أي نقطة $\frac{-١}{٣س^{٢}+٢س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ ٣س^{٢} + ٢س ⟸ ءص (٣س^{٢} + ٢س) ءس

$\int$ ءص $\int$ (٣س^{٢} + ٢س) ءس ⟸ ص = س^{٣} + س^{٢} + ث

عند النقطة (٠ ، ٠) ∴ ٠ = ٠ + ٠ + ث ∴ $\boxed{ث = ٠}$

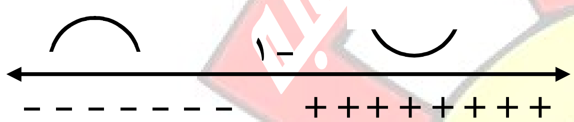
∴ مُعادلة المنحنى هي : $\boxed{ص = س^{٣} + س^{٢}}$

(ب) عين فترات تحدب المنحنى : ص س^{٣} + ٣س^{٢} .

الحل

∵ ص س^{٣} + ٣س^{٢} ∴ ص$'$ = ٣س^{٢} + ٦س

∵ ص$''$ = ٦س + ٦



∴ ص$''$ = ٠ عندما ٦س + ٦ = ٠ منها $\boxed{س \quad -١}$

عندما س > -١ ⟸ ص$''$ > ٠ ∴ $\boxed{\text{المنحنى محدب لأسفل}}$

عندما س < -١ ⟸ ص$''$ < ٠ ∴ $\boxed{\text{المنحنى محدب لأعلى}}$

الحلول النموذجية لامتحان جمهورية السودان فى التفاضل والتكامل

للعام الدراسى ٢٠١٢ / ٢٠١٣

السؤال الأول :

(أ) أوجد : (١) ∫ (س^{٢} − ٩) / (س − ٣) ٠ ى س   (٢) ∫ (حا س + حتا س)^{٢} ٠ ى س

الحل

(١) ∫ (س^{٢} − ٩) / (س − ٣) ٠ ى س = ∫ (س − ٣) (س + ٣) / (س − ٣) ٠ ى س

= ∫ (س + ٣) ٠ ى س = ١/٢ س^{٢} + ٣ س + ث

(٢) ∫ (حا س + حتا س)^{٢} ٠ ى س = ∫ (حا^{٢} س + ٢ حا س حتا س + حتا^{٢} س) ٠ ى س

= ∫ (١ + حا ٢ س) ٠ ى س

= س − ١/٢ حتا ٢ س + ث

(ب) أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة د حيث : د (س) س^{٣} − ٦ س^{٢} − ٣

ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة ٠

الحل

∵ د (س) س^{٣} − ٦ س^{٢} − ٣   ∴ دَ(س) ٣ س^{٢} − ١٢ س

دَ(س) ٠ عندما ٣ س^{٢} − ١٢ س ٠ ⟸ ٣ س (س − ٤) ٠

∴ س ٠ أ، س ٤

∵ د (س) س^{٣} − ٦ س^{٢} − ٣   ∵ د (س) س^{٣} − ٦ س^{٢} − ٣

∴ د (٠) − ٣   ∴ د (٤) − ٣٥

∴ النقط الحرجة هى (٠ ، −٣) ، (٤ ، −٣٥)

دً(س) ٦ س − ١٢

	−∞		٠		٤		∞
إشارة دَ (س)		+		−		+	
إطراد الدالة		متزايدة	−٣	متناقصة	−٣٥	متزايدة	

حسام وهبه

∴ فترات التزايد] − ∞ ، ٠ [،] ٠ ، ∞ [، فترة التناقص [٠ ، ٤]

، (٠ ، −٣) نقطة عظمى محلية ، (٤ ، −٣٥) نقطة صغرى محلية

السؤال الثانى :

(أ) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \text{س}^2 + ٢ & : \text{س} \geqslant ٠ \\ \text{حا س} + ٢ \text{ حتا س} & : \text{س} < ٠ \end{cases}$

ابحث وجود نهاية للدالة د عند س ٠

الحل

∵ د (٠^+) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+}$ د (س) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+}$ (س^2 + ٢) = ٢ (١)

∵ د (٠^-) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-}$ د (س) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-}$ (حا س + ٢ حتا س) = ٢ (٢)

من (١) ، (٢) ∵ د (٠^+) = د (٠^-) = $\lim\limits_{\text{س} \to ٠}$ د (س) = ٢

∴ للدالة نهاية عندما س = ٠

(ب) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : س^2 + ص^2 + ٥ س + ص = ١٦ عند النقطة (٢ ، ١)

الحل

∵ س^2 + ص^2 + ٥ س + ص = ١٦ بالإشتقاق الضمنى بالنسبة إلى س

∴ ٢ س + ٢ ص ص َ + ٥ + ص َ = ٠

٢ ص ص َ + ص َ = − ٢ س − ٥ ⟸ ص َ (٢ ص + ١) − ٢ س − ٥

∴ ص َ $\dfrac{-\ ٢ \text{ س} - ٥}{٢ \text{ ص} + ١}$ عند النقطة (٢ ، ١)

∴ ص َ الميل $\dfrac{-٩}{٣}$ − ٣

∵ معادلة المماس هى : ص − ص$_١$ م (س − س$_١$)

∴ معادلة المماس هى : ص − ١ − ٣ (س − ٢)

٣ س + ص − ٧ = ٠ وهى معادلة المماس

السؤال الثالث :

(أ) ابحث تحدب منحنى الدالة : ص   س³ – ٩ س² + ٢٤ س – ١٠ موضحاً نقط الإنقلاب ،
ثم أوجد القيم العظمى والصغرى فى الفترة [–١ ، ٥]

الحل

∵ ص   س³ – ٩ س² + ٢٤ س – ١٠   ∴ صَ = ٣ س² – ١٨ س + ٢٤

، صً = ٦ س – ١٨   بوضع صً = ٠ لإيجاد نقط الإنقلاب

∴ ٦ س – ١٨   ٠   ∴ س   ٣

٣
– – – – – – + + + + +

بالتعويض عن قيمة س   ٣ فى الدالة الأصلية لإيجاد قيمة ص

∴ ص   ٢٧ – ٨١ + ٧٢ – ١٠   ٨

∴ (٣ ، ٨) نقطة إنقلاب

بوضع صَ = ٠ لإيجاد النقط الحرجة

∴ ٣ س² – ١٨ س + ٢٤ = ٠   وبالتحليل

∴ س = ٤ ∈ [–١ ، ٥]   ،   س = ٢ ∈ [–١ ، ٥]

∴ د (–١) = –١ – ٩ – ٢٤ – ١٠ = –٤٤

، د (٢) = ٨ – ٣٦ + ٤٨ – ١٠ = ١٠

، د (٤) = ٦٤ – ١٤٤ + ٩٦ – ١٠ = ٦

، د (٥) = ١٢٥ – ٢٢٥ + ١٢٠ – ١٠ = ١٠

∴ القيمة العظمى   ١٠ عندما س   ٢ ، س   ٥

، القيمة الصغرى   –٤٤ عندما س   –١

(ب) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، ومجموع أطوال أحرفه جميعاً ٣٠٠ سم ،
، أوجد أبعاده عندما الحجم أكبر مايمكن .

الحل

بفرض أن طول ضلع القاعدة   س ، والإرتفاع   ص

∵ مجموع أ

∴ ٨ س + ٤ ص   ٣٠٠ ⟸ ٢ س + ص   ٧٥

∴ $\boxed{\text{ص   ٧٥ − ٢ س}}$

∵ حجم متوازى المستطيلات   مساحة القاعدة × الإرتفاع

∴ ع   س٢ × ص   س٢ (٧٥ − ٢ س)   ٧٥ س٢ − ٢ س٣ بالإشتقاق

∴ عَ   ١٥٠ س − ٦ س٢

عَ   ٠   عندما   ١٥٠ س − ٦ س٢   ٠

٦ س (٢٥ − س)   ٠

س   ٠ مرفوض   وأ،   س   ٢٥

∴ س   ٢٥ تجعل الحجم أكبر قيمة عظمى

∴ عً   ١٥٠ − ١٢ س   عندما   س   ٢٥

∴ عً   ١٥٠ − ٣٠٠   − ١٥٠ < صفر

∴ أكبر حجم متوازى المستطيلات عندما   س   ٢٥

∴ ص   ٧٥ − ٢ س   ٧٥ − ٢ × ٢٥   ٢٥

∴ أبعاد القاعدة = ٢٥ سم ،   الإرتفاع   ٢٥ سم

السؤال الرابع :

(أ) إذا كانت : ص   حا ٢ س ، أثبت أن : ٤ (!!/!!)ç + (!!/ç!!)ç   ١٦

الحل

∵ ص   حا ٢ س ⟸ !!/!! = ٢ حتا ٢ س ⟸ !!/ç!! = − ٤ حا ٢ س

الطرف الأيمن   ٤ (!!/!!)ç + (!!/ç!!)ç

٤ (٢ حتا ٢ س)ç + (− ٤ حا ٢ س)ç

٤ (٤ حتاç ٢ س) + (١٦ حاç ٢ س)

١٦ حتاç ٢ س + ١٦ حاç ٢ س

الطرف الأيمن ١٦ (حتا^{٢} ٢ س + حا^{٢} ٢ س)

١٦ × ١ ١٦ الأيسر #

(ب) قرص دائرى تزداد مساحته بمُعدل ٤ , ٠ ط سم / ث^{٢} ، أوجد مُعدل الزيادة فى طول نصف القطر عندما يكون نق = ٨ سم

الحل

∵ مساحة القرص الدائرى (م) ط نق^{٢}

!!! ٢ ط نق × !!

٤ , ٠ ط ٢ ط × ٨ × !!

!! $\frac{٠,٤}{٢ \times ٨}$ ٠,٠٢٥ سم / ث

السؤال الخامس :

(أ) أوجد العلاقة بين س ، ص إذا كان : !! = $\frac{٢ س + ٧}{٣ - ٢ ص}$ ، وكان ص ٣ ، س ١

الحل

∵ !! = $\frac{٢ س + ٧}{٣ - ٢ ص}$

∴ (٣ – ٢ ص) ء ص (٢ س + ٧) ء س بالتكامل

∫ (٣ – ٢ ص) ء ص ∫ (٢ س + ٧) ء س

∴ ٣ ص – ص^{٢} س^{٢} + ٧ س + ث بالتعويض عن قيمتى ص ٣ ، س ١

∴ ٩ – ٩ ١ + ٧ + ث ∴ $\boxed{ث \quad - ٨}$

∴ ٣ ص – ص^{٢} س^{٢} + ٧ س – ٨

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٧ س – ٣ ص – ٨ ٠ وهى العلاقة بين س ، ص

(ب) ابحث اتصال الدالة د حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & : \text{س} \geqslant ٣ \\ ٢\,\text{س} + ٤ & : \text{س} < ٣ \end{cases}$$

عند س ٣ ، ثم أبحث قابلية الإشتقاق عند نفس النقطة .

الحل

$\because\ \text{د}(٣) = ٩ + ١ = ١٠$ (١)

$\because\ \text{د}(٣^{+}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} (\text{س}^{٢} + ١) = ١٠$ (٢)

$\because\ \text{د}(٣^{-}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{د}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} (٢\,\text{س} + ٤) = ١٠$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

$\because\ \text{د}(٣) = \text{د}(٣^{+}) = \text{د}(٣^{-})$ $\therefore$ الدالة متصلة عند س ٣

بحث قابلية الاشتقاق

$$\text{د}'(٣^{+}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{د}(٣ + \text{هـ}) - \text{د}(٣)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{٩ + ٦\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} + ١ - ١٠}{\text{هـ}} = ٦ \longrightarrow (١)$$

$$\text{د}'(٣^{-}) = \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{\text{د}(٣ + \text{هـ}) - \text{د}(٣)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim\limits_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{٦ + ٢\,\text{هـ} + ٤ - ١٠}{\text{هـ}} = ٢ \longrightarrow (٢)$$

من (١) ، (٢) $\because\ \text{د}'(٣^{+}) \neq \text{د}'(٣^{-})$

$\therefore$ الدالة ليست قابلة للاشتقاق عند س ٣

محافظة الشرقية
مديرية التربية والتعليم بالشرقية
إدارة غرب الزقازيق التعليمية
مدرسة شيبة الثانوية المشتركة

الحلول الكاملة لاختبارات
الكتاب المدرسى

وامتحان جمهورية السودان

وامتحان الأزهر الشريف ٢٠١٣

فى التفاضل والتكامل

إعداد
الأستاذ / حسام وهبه

العام الدراسى ٢٠١٣ / ٢٠١٤ م

الحلول النموذجية لامتحان الأزهر الشريف فى التفاضل والتكامل

للعام الدراسى ٢٠١٢ / ٢٠١٣

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يأتى :

(١) (أ) (١) أوجد $\int$ س $\sqrt[٣]{\text{س} + ١}$ ء س   (٢) $\int \dfrac{\text{حتا ٢ س}}{\text{حتا س + حا س}}$ ء س

الحل

$\because \int$ س $\sqrt[٣]{\text{س} + ١}$ ء س $\int$ س (س + ١)$^{\frac{١}{٣}}$ ء س

$\int$ [(س + ١) − ١] (س + ١)$^{\frac{١}{٣}}$ ء س

$\int$ [(س + ١)$^{\frac{٤}{٣}}$ − (س + ١)$^{\frac{١}{٣}}$] ء س

$\dfrac{(\text{س} + ١)^{\frac{٧}{٣}}}{\frac{٧}{٣}} - \dfrac{(\text{س} + ١)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣}}$ + ث

$\dfrac{٣ (\text{س} + ١)^{\frac{٧}{٣}}}{٧} - \dfrac{٣ (\text{س} + ١)^{\frac{٤}{٣}}}{٤}$ + ث

$\because \int \dfrac{\text{حتا ٢ س}}{\text{حتا س + حا س}}$ ء س $= \int \dfrac{\text{حتا}^٢ \text{س} - \text{حا}^٢ \text{س}}{\text{حتا س + حا س}}$ ء س   بتحليل البسط والإختصار

$= \int \dfrac{(\text{حتا س + حا س})(\text{حتا س} - \text{حا س})}{\text{حتا س + حا س}}$ ء س

$= \int$ (حتا س − حا س) ء س = حا س + حتا س + ث

(ب) أوجد كلاً من القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية وكذلك نقط الإنقلاب (إن وجدت)

لمنحنى الدالة د حيث د (س)   ٢ س^٣ − ٣ س^٢ − ١٢ س − ٥

الحل

$\because$ د (س)   ٢ س^٣ − ٣ س^٢ − ١٢ س − ٥ $\therefore$ د$'$ (س) = ٦ س^٢ − ٦ س − ١٢

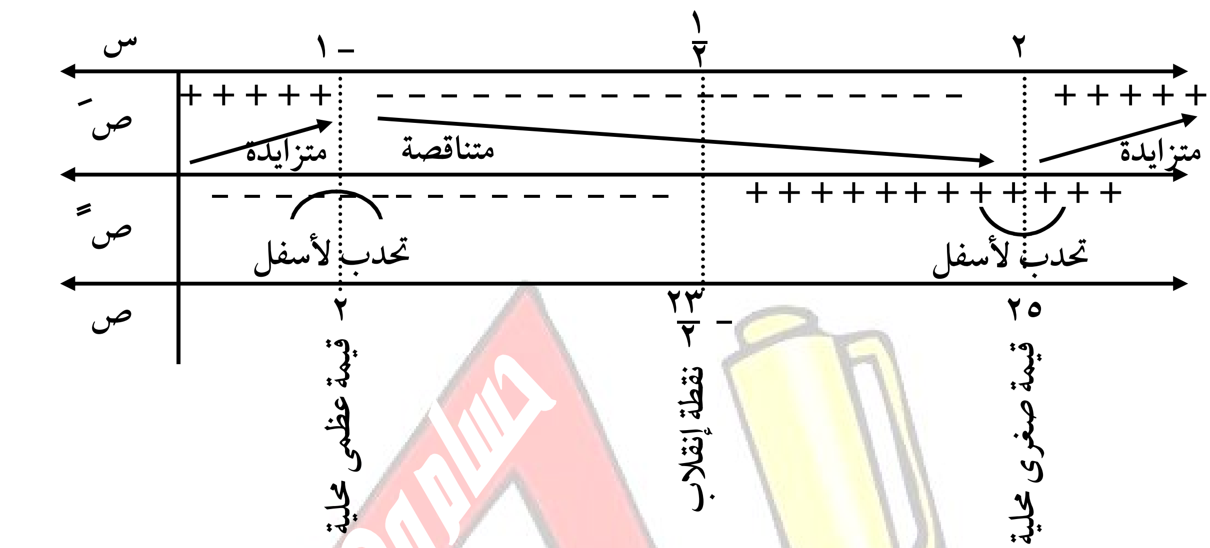
، د$''$ (س) = ١٢ س − ٦

د$'$ (س) = ٠   عندما   ٦ س^٢ − ٦ س − ١٢ = ٠   بالتحليل للحصول على قيم س

حسام وهبه

∴ س = ٢ أو، س = – ١ وعندها نقط حرجة

، د″(س) = ٠ عندما ١٢ س – ٦ = ٠ ∴ س $\frac{١}{٢}$ عندها نقطة إنقلاب



(٢) (أ) برهن أن : المماس للمنحنى : ص $س^٣$ + س + ٢ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على الإتجاه الموجب لمحور السينات ، ثم أوجد مُعادلة المماس للمنحنى عند س – ١

الحل

∵ ص $س^٣$ + س + ٢ ⟵ (١)

∴ ص′ ٣$س^٢$ + ١ ⟵ (٢)

، ∴ ص′ موجبة دائماً ∴ المماس يميل بزاوية حادة على الإتجاه الموجب لمحور السينات

بالتعويض عن قيمة س – ١ فى العلاقة (١) للحصول على قيمة ص

∵ ص $س^٣$ + س + ٢ ⟸ ص – ١ – ١ + ٢ = ٠

∴ نقطة التماس هى (– ١ ، ٠)

، ∵ ص′ ٣$س^٢$ + ١ بالتعويض عن قيمة س – ١ لإيجاد ميل المماس

∴ الميل ص′ ٣ + ١ ٤

∵ معادلة المماس هى : ص – $ص_١$ م (س – $س_١$)

∴ معادلة المماس هى : ص – ٠ ٤ (س + ١) ⟸ ص ٤ س + ٤

∴ معادلة

(ب) إذا كان : $\frac{ءع}{ءس}$ ١ + ٢ س ، $\frac{ءص}{ءس}$ س^{٢} + ٣ ، فأوجد $\frac{ء^{٢}ع}{ءص^{٢}}$ عندما س ١

الحل

∵ $\frac{ءع}{ءص}$ $\frac{ءع}{ءس} \times \frac{ءس}{ءص}$

∴ $\frac{ءع}{ءص}$ (١ + ٢ س)($\frac{١}{س^{٢}+٣}$) = $\frac{١ + ٢ س}{س^{٢}+٣}$

∴ $\frac{ء^{٢}ع}{ءص^{٢}}$ $\frac{(س^{٢}+٣)\times ٢ - (١+٢س)\times ٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}} \times \frac{ءس}{ءص}$

عندما س ١

∴ $\frac{ء^{٢}ع}{ءص^{٢}}$ $\frac{(س^{٢}+٣)\times ٢ - (١+٢س)\times ٢س}{(س^{٢}+٣)^{٢}} \times \frac{١}{س^{٢}+٣}$ $\frac{١}{٣٢}$

---

(٣) (أ) إذا كانت : ص^{٢} س^{٢} (١ – س) فأثبت أن : ص $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + ٣ س ١

الحل

∵ ص^{٢} س^{٢} (١ – س) س^{٢} – س^{٣} بالإشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ٢ ص ($\frac{ءص}{ءس}$) ٢ س – ٣ س^{٢} بالإشتقاق مرة أخرة بالنسبة إلى س

∴ ٢ ص ($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$) + ٢ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ ٢ – ٦ س بالقسمة على ٢

∴ ص ($\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$) + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ ١ – ٣ س

∴ ص $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٢}$ + ٣ س ١ #

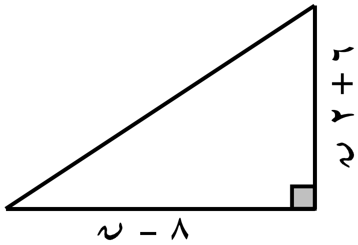
(ب) فى لحظة ما كان طولا ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية هما ٨ سم ، ٦ سم فإذا كان الضلع الأول ينقص طوله بمُعدل ١ سم / دقيقة بينما يزداد طول الضلع الثانى بمُعدل ٢ سم / دقيقة .

أوجد مُعدل التغير فى مساحة سطح المثلث بعد دقيقتين .

الحل

∴ $\frac{ءس}{ءن}$

بعد ن دقيقة



، ∵ مساحة سطح المثلث (م) $\frac{١}{٢}$ (س × ص)

∴ مساحة سطح المثلث (م) $\frac{١}{٢}$ (٦ – ٢ ن) (٨ – ن)

م (٣ – ن) (٨ – ن) ٢٤ + ٥ ن – ن^{٢}

بالإشتقاق بالنسبة للزمن ن

∴ $\frac{دم}{دن}$ ٥ – ٢ ن وعندما ن ٢

٥ – ٤ ١ سم^{٢}/ دقيقة

---

(٤) (أ) إذا كانت الدالة د حيث د(س) $\begin{cases} أس^{٢} + ب س & : س \geq ١ \\ ٣س – ١ & : س < ١ \end{cases}$

قابلة للإشتقاق عند س ١ ، فأوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

الحل

∵ الدالة د قابلة للإشتقاق عند س ١ ∴ الدالة متصلة عند س ١

∴ د (١$^{+}$) د (١$^{-}$) $\boxed{أ + ب \quad ٢}$ (١)

∵ الدالة د قابلة للإشتقاق عند س ١

∴ د َ(١$^{+}$) د َ(١$^{-}$) $\boxed{٢ أ + ب \quad ٣}$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) جبرياً

∴ $\boxed{أ \quad ١}$ ، $\boxed{ب = ١}$

(ب) مُنحنى ميل المماس له عند أى نقطة عليه (س ، ص) يساوى (قا^{٢}س – حاس) ، أوجد معادلة هذا المنحنى إذا عُلم أنه يمر بالنقطة ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) .

الحل

∵ $\frac{دص}{دس}$ (قا^{٢}س – حاس) ⟸ دص = (قا^{٢}س – حاس) دس

بالتكامل :

$\int$ ء ص $\quad \int$ (قا^{2}س - حاس) ء س $\quad \Longleftarrow \quad$ ص = طا س + حتا س + ث

$\because$ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{ط}{٤}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) بالتعويض عن قيمتى س ، ص للحصول على قيمة الثابت

$\because$ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = طا ٤٥° + حتا ٤٥° + ث $\quad \Longleftarrow \quad$ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ث

$\therefore$ ث = - ١ $\quad \therefore$ مُعادلة المنحنى هى : $\boxed{\text{ص = طا س + حتا س - ١}}$

---

(٥) (أ) إذا كانت الدالة د حيث د(س) $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\text{طا ٢ س}}{\text{س}} & : \text{س} > ٠ \\ \text{س - ٣} & : \text{س} < ٠ \end{array} \right.$

فابحث وجود $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ د (س)

الحل

$\because$ د (٠^{+}) = $\underset{\text{س} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{طا ٢ س}}{\text{س}}$ = ٢ $\longleftarrow$ (١)

، $\because$ د (٠^{-}) = $\underset{\text{س} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ (س - ٣) = - ٣ $\longleftarrow$ (٢)

من (١) ، (٢) $\quad \because$ د (٠^{+}) $\neq$ د (٠^{-}) $\quad \therefore$ النهاية غير موجوده

(ب) وعاء إسطوانى مفتوح من قاعدته العليا سعته ٨٠٠٠ ط سم^{3} ، أوجد أبعاده التى تجعل مساحته أقل ما يمكن .

الحل

$\because$ المساحة السطحية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة

$\therefore$ م = ٢ ط نق ع + ط نق^{2} $\longleftarrow$ (١)

$\because$ حجم الإسطوانة = ٨٠٠٠ ط $\quad \therefore$ ط نق^{2}ع = ٨٠٠٠ ط

$\therefore$ ع = $\frac{٨٠٠٠}{\text{نق}^{2}}$ $\longleftarrow$ (٢)

بالتعويض بالعلاقة (٢) فى العلاقة (١)

$\therefore$ م [illegible]

$\therefore$ م ط $\left(\dfrac{16000 + \text{نو}^{3}}{\text{نو}} \right)$

$\therefore$ $م' = ط \left(\dfrac{\text{نو} \times 3\,\text{نو}^{2} - (16000 + \text{نو}^{3}) \times 1}{\text{نو}^{2}} \right)$

$\therefore$ $م' = ط \left(\dfrac{3\,\text{نو}^{3} - 16000 - \text{نو}^{3}}{\text{نو}^{2}} \right)$

$\therefore$ $م' = ط \left(\dfrac{2\,\text{نو}^{3} - 16000}{\text{نو}^{2}} \right)$

$م' = 0$ عندما $2\,\text{نو}^{3} - 16000 \quad 0 \quad \Longleftarrow \quad 2\,\text{نو}^{3} = 16000$

$\text{نو}^{3} = 8000$ $\therefore$ $\boxed{\text{نو} = 20}$

وبالتعويض فى العلاقة (٢) عن قيمة نو للحصول على قيمة ع $\therefore$ ع $= \dfrac{8000}{400} = 20$

$\because$ $م'' = ط \left(\dfrac{\text{نو}^{2} \times 6\,\text{نو}^{2} - (\text{نو}^{3} - 16000)\, 2\,\text{نو}}{\text{نو}^{4}} \right)$

$م'' = ط \left(\dfrac{4\,\text{نو}^{4} + 32000\,\text{نو}}{\text{نو}^{4}} \right)$ عند $\text{نو} = 20$

$م'' > 0$ $\therefore$ المساحة أصغر مايمكن عندما تكون أبعاده = ٢٠ ، ٢٠ سم

نو = ٢٠ سم ، ع ٢٠ سم
