١. أكمل :

١) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي .....

٢) يتوازى المستقيمان ل١ ، ل٢ إذا وفقط إذا كان

١- ..... ٢- .....

٣) إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازي ..... (مطلوب بالبرهان)

٤) إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه .....

٥) إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فخطا تقاطعه .....

٦) إذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فإنه .....

٧) إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن .....

٨) إذا تقاطع مستقيمان في مستو وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستو آخر كان .....

٩) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستقيمين مستويين معا وغير متوازيين فإنه .....

١٠) المستقيمان العموديان على مستو واحد .....

١١) إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه .....

١٢) الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستو هي الزاوية بين القطعة المستقيمة و .....

١٣) إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان عموديا على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل ..... (يطلب البرهان)

١٤) إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان مسقطه على المستوى عموديا على مستقيم فيه كان هذا ..... (يطلب البرهان)

١٥) الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية .....

١٦) قياس الزاوية الزوجية هو قياس .....

١٧) الهرم القائم هو هرم قاعدته .....

١٨) إذا كان مستقيم عموديا على مستو فكل مستو يحوي هذا المستقيم ..... (يطلب بالبرهان)

١٩) إذا تعامد مستويان فكل مستقيم في أحدهما عمودي على خط التقاطع يكون .....

٢٠) إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين .....

٢١) إذا كان طول قطر مكعب $5\sqrt{3}$ فإن مساحته .....

٢٢) إذا كان طول حرف مكعب = ٥ سم فإن طول قطره = ... ومساحته = ...

٢٣) إذا كانت أبعاد متوازي مستطيلات هي ٤ ، ٣ ، ١٢ سم فإن طول قطره = ...

٢٤) إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإنهما .....

٢٥) قطر متوازي السطوح هو قطعة مستقيمة تصل بين .....

٢٦) أ ب جـ $\bar{أ}$ $\bar{ب}$ $\bar{جـ}$ منشور ثلاثي . خط تقاطع المستوى أ ب جـ مع المستوى $\bar{أ}$ $\bar{جـ}$ جـ هو المستقيم .....

٢٧) المستقيمان يكونان متخالفان إذا كان .....

٢٨) المستقيم ل يكون عموديا على المستوى س إذا كان .....

.....

٢. بين العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يأتي مع تصحيح الخطأ:

(١) المستقيم العمودي على مستقيم في المستوٍ يكون عموديا على ذلك المستوى

(٢) إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازي كل مستقيم واقع في المستوى

(٣) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين

(٤) تقاس الزاوية الزوجية بين مستويين برسم مستوى عمودي على خط تقاطع المستويين

(٥) أي ثلاث نقط تعين مستوى واحد فقط

(٦) إذا كان المستويين س ، ص متوازيين وكان المستقيم ل $\subset$ س فإن ل // المستوى ص

(٧) إذا كان المستويان س ، ص متوازيين وكان المستقيم ل $\perp$ س فإن ل $\perp$ ص

(٨) المستويان الموازيان لمستقيم واحد متوازيان

(٩) يتعامد المستقيمان إذا كان كل منهما عموديا على نفس المستوى

(١٠) المستقيمان العموديان على مستقيم ثالث في الفراغ متوازيان

.....

٣. إذا كان ل١ ، ل٢ مستقيمين ، وكان س ، ص مستويين أذكر صحة أو خطأ العبارات التالية بعد إعادة كتابتها في ورقة الإجابة

أ. إذا كان ل١ ∩ ل٢ = Φ فإن ل١ // ل٢ أو ل١ ، ل٢ متخالفين

ب. إذا كان ل١ // س و ل٢ // س فإن ل١ // ل٢

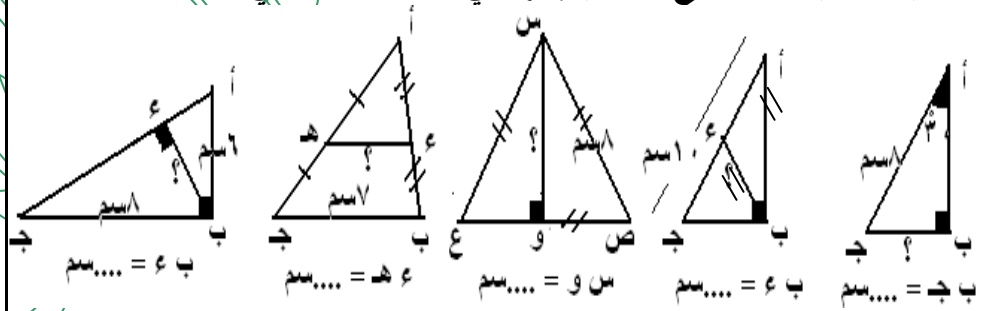
ج. إذا كان س // ل١ و ص // ل١ فإن س // ص

د. إذا كان ل١ ⊂ س ، ل٢ ⊂ ص ، س // ص فإن ل١ // ل٢

ه. إذا كان ل١ ⊂ س ، س ∩ ص = Φ فإن ل١ // ص

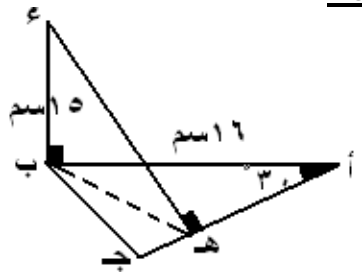
.....

٤. أوجد أطوال الأضلاع المشار إليها في كل شكل مما يلي:



.....

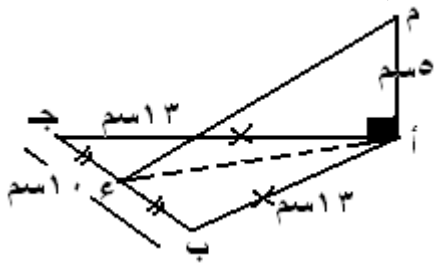
٥. " مايو ١٩٩٨ " في الشكل المقابل :



ق (ب أ جـ) = ٣٠° ، أ ب = ١٦ سم ، $\overleftrightarrow{ء ب}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ، $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ، فإذا كان ب ء = ١٥ سم احسب طول $\overline{ء هـ}$ [١٧ سم]

.....

٦. م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه $\overline{م أ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ، أ ب = أ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٠ سم ، م أ = ٥ سم ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$



(١) احسب طول $\overline{أ ء}$ واثبت أن $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

(٢) أوجد قياس الزاوية الزوجية (م - $\overline{ب جـ}$ - أ)

(٣) أوجد مساحة المثلث م ب جـ

(٤) اثبت أن المستويين م أ ء ، م ب جـ متعامدان

(٥) اثبت أن المستويين م أ ء ، أ ب جـ متعامدان

.....

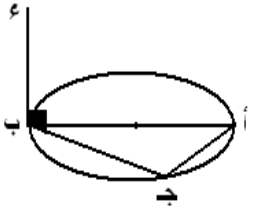
٧. " مصر ١٩٩٥ " حل بنفسك

أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه $\overline{أ ب}$ ⊥ المستوى ب جـ ء ، هـ منتصف $\overline{ء جـ}$ ، فإذا كان أ ب = $١٠\sqrt{٣}$ سم ، Δ ب جـ ء متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، فاحسب ب هـ ثم أوجد ق (أ - $\overline{ء جـ}$ - ب)

.....

٨. " مصر ٩٠ "

جـ ∈ لدائرة قطرها $\overline{أ ب}$ ، رسم $\overline{ء ب}$ عموديا على مستوى الدائرة

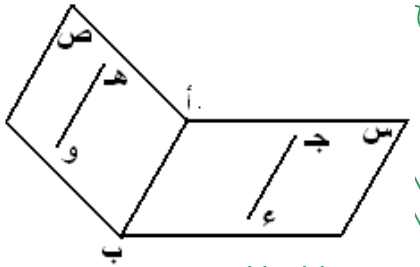


اثبت أن :

(١) المستوى ء ب جـ ⊥ المستوى أ ب جـ

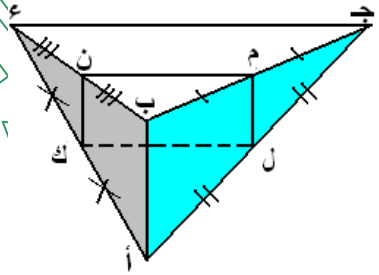
(٢) المستوى ء ب جـ ⊥ المستوى أ ء جـ

٩. " أغسطس ٩٩" – " مايو٩٦"



س ، ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{أ ب}$ رسم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ في المستوى س بحيث كان $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // ص ، ورسم $\overleftrightarrow{هـ و}$ في المستوى ص بحيث $\overleftrightarrow{هـ و}$ // س اثبت أن $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$

١٠. " أغسطس ٩٨"



جـ ب أ ، ء أ ب مثلثان في مستويين مختلفين . إذا كان ل ، م ، ك ، ن منتصفات $\overline{جـ أ}$ ، $\overline{جـ ب}$ ، $\overline{ء أ}$ ، $\overline{ء ب}$ على الترتيب اثبت أن :

(١) $\overleftrightarrow{ل م}$ // $\overleftrightarrow{ك ن}$

(٢) $\overleftrightarrow{أ ب}$ // المستوى ل م ن ك

(٣) الشكل ل م ن ك متوازي أضلاع

١١. دور أول ٢٠١١

أ ب جـ ء هرم ثلاثي ، رسم المستوى س يوازي كل من $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ فقطع $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ء}$ ، $\overline{ء أ}$ في هـ ، و ، ع ، ل على الترتيب اثبت أن :

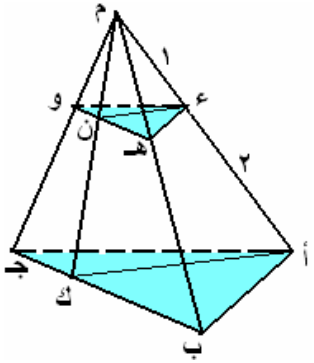
$$\frac{هـ و}{أ جـ} + \frac{هـ ل}{ب ء} = ١$$

١٢. م أ ب جـ ء هرم رباعي قاعدته أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{ء جـ}$ أوجد :

(أ) خط تقاطع المستويين م أ ء ، م ب جـ

(ب) خط تقاطع المستويين م أ ب ، م ء جـ مع تفسير الحل

١٣. " مايو٩٨" – " أغسطس٩٦"



م أ ب جـ هرم ثلاثي . أخذت النقط ء ، هـ ، و على الأحرف $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ على الترتيب بحيث $\frac{م ء}{م أ} = \frac{م هـ}{م ب} = \frac{م و}{م جـ} = \frac{١}{٣}$

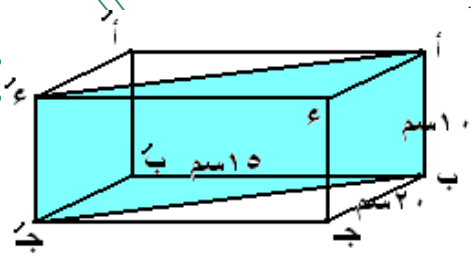
اثبت أن : المستوى ء هـ و // المستوى أ ب جـ

وإذا كانت ك ∈ $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{م ك} \cap \overline{هـ و} = \{ن\}$ اثبت أن : $\overline{ء ن}$ // $\overline{أ ك}$ ، أ ك = ٣ ء ن

.....

١٤. " مايو ٩٨"

أ ب جـ ء أ ب جـ ء متوازي مستطيلات فيه أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ٢٠ سم ، ب ب' = ١٥ سم



١) اثبت أن أ ب جـ ء مستطيل واحسب مساحته

٢) احسب قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ ء ، أ ب جـ ء

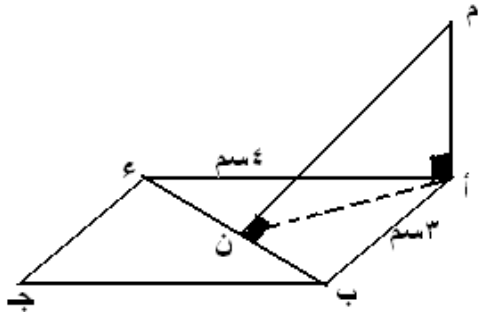
.....

١٥. دور أول ٢٠١١

س ، ص مستويان متقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ومن نقطة جـ لاتنتمي لأى من المستويين رسم $\overleftrightarrow{جـء}$ عموديا على المستوى س ليقطعه في ء ، $\overleftrightarrow{جـهـ}$ عموديا على المستوى ص ليقطعه في هـ اثبت أن : $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ءهـ}$

.....

١٦. " مايو ٨٩"

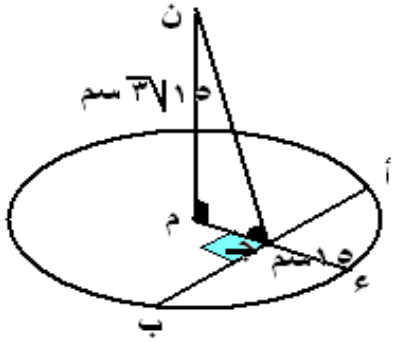


أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٤ سم ، رسم $\overline{أم}$ عموديا على مستوى المستطيل ثم رسم $\overline{مـن} \perp \overline{ب ء}$ ليقطعه في ن . احسب طول $\overline{أن}$ ، وإذا كان أ م = ٤ سم ، أوجد ظل الزاوية الزوجية (م - $\overleftrightarrow{ب ء}$ - أ)

الجواب [٢.٤سم ، $\frac{٥}{٣}$]

.....

١٧. " مايو ٩٢" $\overline{أب}$ وتر في دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ٣٠ سم ، رسم $\overleftarrow{مـجـ} \perp \overline{أب}$ ليقطعه في جـ ويقطع الدائرة في ء ، رسم $\overline{مـن} \perp$ مستوى الدائرة



اثبت أن $\overline{نجـ} \perp \overline{أب}$. وإذا كان ء جـ = ١٥ سم ، ن م = ١٥√٣ سم

احسب ق (ن - $\overleftrightarrow{أب}$ - م) الجواب [٦٠°]

.....

١٨. " مايو ٩٧"

أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، تقاطع قطراه في ن ، رسم $\overline{نم} \perp$ المستوى أ ب جـ ء وكان م ن = ٦ سم ، هـ منتصف $\overline{أب}$ اثبت أن :

(١) المستوى م أ جـ $\perp$ المستوى أ ب جـ ء

(٢) $\overline{أب} \perp$ المستوى م ن هـ

(٣) أوجد ق (م - $\overline{أب}$ - ء) الجواب [٤٥°]

.....

١٩. دور أول ٢٠١١

أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٨سم تقاطع قطراه في هـ ، رسمت $\overline{أم}$ عمودية على مستوى المربع بحيث كان أ م = $٤\sqrt{٢}$ سم ٠

(١) أوجد ق(أ - $\overleftrightarrow{ب ء}$ - م)

(٢) أوجد ظل زاوية ميل $\overline{م جـ}$ على المستوى أ ب جـ ء

(٣) اثبت أن المستوى م أ جـ عمودى على المستوى م ب ء

.....

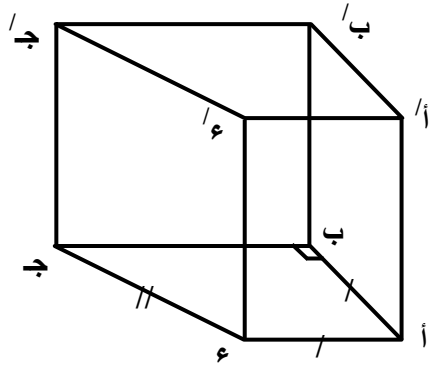
٢٠. أغسطس ٩٩

أ ب جـ أ/ ب/ جـ/ منشور ثلاثي مائل فيه الوجه ب جـ جـ/ ب/ مستطيل رسم $\overleftrightarrow{ب ء}$ ⊥ $\overline{أ أ/}$ فقطعها في النقطة ء . اثبت أن $\overline{أ أ/}$ عمودية على المستوى ء ب جـ . وإذا كان أ ب = ٥ سم ، ب ء = ٣سم فأوجد قياس الزاوية بين $\overline{أ ب}$ والمستوى ء ب جـ الجواب [$٥٣^{\circ}\ ٨'$]

.....

٢١. دور أول ٢٠١٣

فى الشكل المقابل :



أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ منشور رباعى قائم قاعدته على شكل شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، وفيه أ ب = أ ء = $\frac{١}{٢}$ جـ ء ، وكان أ أ/ = جـ ء

(١) اثبت أن المستوى ب/ ب ء ⊥ المستوى أ ب جـ ء

(٢) أوجد ظل زاوية ميل $\overline{ب/ ء}$ على المستوى أ ب جـ ء

(٣) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ب جـ جـ/ ب/ ، ء جـ جـ/ ء/

الحلول الكاملة للمسائل

١. التكملة

١) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي إحدى الزوايا التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازيا الآخر

٢) يتوازى المستقيمان ل١ ، ل٢ إذا وفقط إذا كان
١- يجمعهما مستو واحد ٢- ل١ ∩ ل٢ = Φ

٣) إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم

٤) إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه يوازي ذلك المستوى

٥) إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما يكونان متوازيين

٦) إذا وازى مستقيم كلا من مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما

٧) إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينها تكون متناسبة

٨) إذا تقاطع مستقيمان في مستو وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستو آخر كان مستوى المستقيمين الأولين موازيا لمستوى المستقيمين الأخيرين

٩) إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستقيمين مستويين معا وغير متوازيين فإنه فإنه يكون عموديا على مستويهما

١٠) المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان

١١) إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على الآخر

١٢) الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستو هي الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها على المستوى

١٣) إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان عموديا على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عموديا على هذا المستقيم

١٤) إذا رسم مستقيم مائل على مستو وكان مسقطه على المستوى عموديا على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عموديا على ذلك المستقيم

١٥) الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية التي تنشأ عن تقاطع الزاوية الزوجية مع أي مستو عموديا على حافتها

١٦) قياس الزاوية الزوجية هو قياس أي من زاوياها المستوية

١٧) الهرم القائم هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود النازل من رأس الهرم عليها

١٨) إذا كان مستقيم عموديا على مستو فكل مستو يحوي هذا المستقيم يكون عموديا على ذلك المستوى

١٩) إذا تعامد مستويان فكل مستقيم في أحدهما عمودي على خط التقاطع يكون عموديا على المستوى الآخر

٢٠) إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستو ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عموديا على المستوى الثالث

٢١) إذا كان طول قطر مكعب $٥\sqrt{٣}$ فإن مساحته ١٥٠ سم^٢

٢٢) إذا كان طول حرف مكعب = ٥سم فإن طول قطره = $٥\sqrt{٣}$ ومساحته = ١٥٠سم^٢

٢٣) إذا كانت أبعاد متوازي مستطيلات هي ٤سم ، ٣سم ، ١٢ سم فإن طول قطره = ١٣سم

٢٤) إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإنهما ينطبقان

٢٥) قطرمتوازي السطوح هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسيين غير واقعين في وجه واحد

٢٦) أ ب جـ $\bar{أ}\bar{ب}\bar{جـ}$ منشور ثلاثي . خط تقاطع المستوى أ ب $\bar{جـ}$ مع المستوى $\bar{أ}\bar{أ}\bar{جـ}\bar{جـ}$ هو المستقيم $\overleftrightarrow{أ جـ}'$

٢٧) المستقيمان يكونان متخالفان إذا لم يجمعهما مستو واحد

٢٨) المستقيم ل يكون عموديا على المستوى س إذا كان عموديا على جميع المستقيمات في المستوى س

.....

٢. الأجوبة

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
×	×	√	√	×	√	√	×	×	×

٣. الأجوبة

أ	ب	جـ	ء	هـ
√	×	×	×	√

.....

٤. متروك للطالب

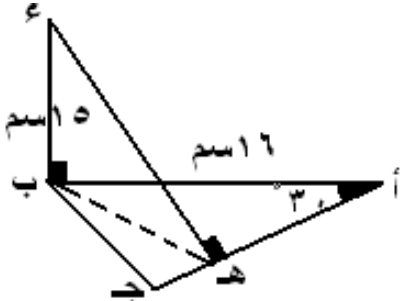
.....

٥. $\overleftrightarrow{ء ب}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

$\overline{ء هـ}$ مائل مسقطه $\overline{ب هـ}$

المائل $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ⊂ المستوى أ ب جـ

المسقط $\overline{ب هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$



في Δ ب هـ أ القائم الزاوية في هـ

$\overline{ب هـ}$ مقابل للزاوية ٣٠°

ب هـ = $\frac{1}{2}$ طول الوتر $\overline{أ ب}$ = ٨ سم

في Δ ء ب هـ القائم الزاوية في ب

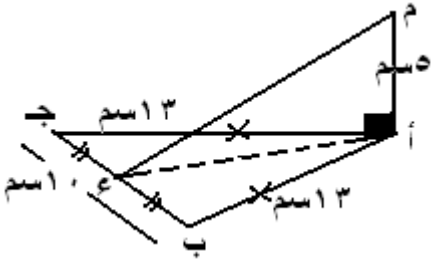
$(ء هـ)^2 = (ء ب)^2 + (ب هـ)^2$

$= ٢٢٥ + ٦٤ = ٢٨٩$

ء هـ = ١٧ سم

.....

٦. في Δ أ ب جـ المتساوي الساقين



∵ ء منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

$(أ ء)^2 = (أ ب)^2 - (ب ء)^2$

$= ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤$

أ ء = ١٢ سم

∵ $\overline{م أ} \perp$ المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{م ء}$ مائل مسقطه $\overline{أ ء}$

∵ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ⊂ المستوى أ ب جـ

∴ المائل $\overline{م ء} \perp \overline{ب جـ}$

ثانيا : الزاوية المستوية للزاوية الزوجية م - $\overline{ب جـ}$ - أ هي أ ء م

ظا (أ ء م) = $\frac{٥}{١٢}$

ق(م - $\overline{ب جـ}$ - أ) = ٢٢° ٣٧´

ثالثا : في Δ م أ ء

$(م ء)^2 = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$

م ء = ١٣ سم

مساحة(Δ م ب جـ) = $\frac{1}{2}$ ب جـ × م ء

= $\frac{1}{2} \times ١٠ \times ١٣ = ٦٥$ سم^2

رابعا : ∵ $\overline{ب جـ} \perp$ كل من $\overline{م ء}$ ، $\overline{أ ء}$

∴ $\overline{ب جـ} \perp$ المستوى م أ ء

∵ $\overline{ب جـ}$ ⊂ المستوى م ب جـ

∴ المستويان م أ ء ، م ب جـ متعامدان

خامسا : $\overline{ب جـ} \perp$ المستوى م أ ء

، $\overline{ب جـ}$ ⊂ المستوى أ ب جـ

∴ المستويان م أ ء ، أ ب جـ متعامدان

.....

٧. في Δ ب جـ ء المتساوي الأضلاع

هـ منتصف $\overline{جـ ء}$

$\overline{ب هـ} \perp \overline{جـ ء}$

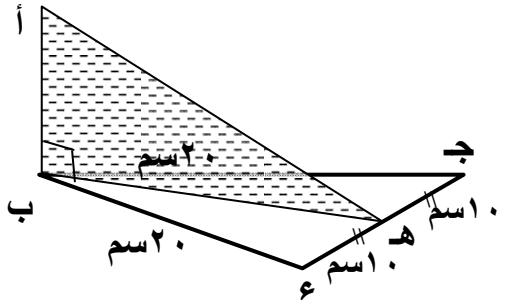
ب هـ = $١٠\sqrt{٣}$ سم من نظرية فيثاغورس

$\overline{أ ب} \perp$ المستوى ب جـ ء

$\overline{أ هـ}$ مائل مسقطه $\overline{ب هـ}$

$\overline{ب هـ} \perp \overline{جـ ء}$ ⊂ المستوى ب جـ ء

$\overline{أ هـ} \perp \overline{جـ ء}$



أ هـ ب هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية أ - $\overline{جـ ء}$ - ب

ظا أ هـ ب = $\frac{٣\sqrt{١٠}}{٣\sqrt{١٠}} = ١$

ق(أ هـ ب) = ٤٥°

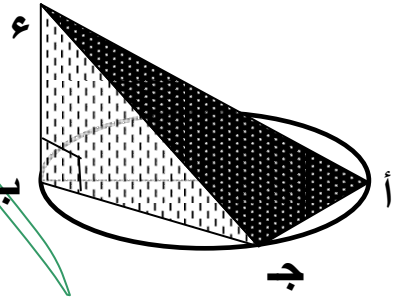
ق(أ - $\overline{جـ ء}$ - ب) = ٤٥°

.....

٨. ∵ $\overline{ء ب} \perp$ مستوى الدائرة أ ب جـ

، $\overline{ء ب}$ ⊂ المستوى ء ب جـ

∴ المستويان ء ب جـ ، أ ب جـ متعامدان



ثانيا : ∵ $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة

∴ ق(أ جـ ب) = ٩٠°

∴ $\overline{أ جـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∵ $\overline{ء ب}$ ⊥ مستوى الدائرة

∴ $\overline{ء جـ}$ مائل مسقطه $\overline{ب جـ}$

∵ $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ اثباتا ..... (١)

∴ $\overline{ء جـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ..... (٢)

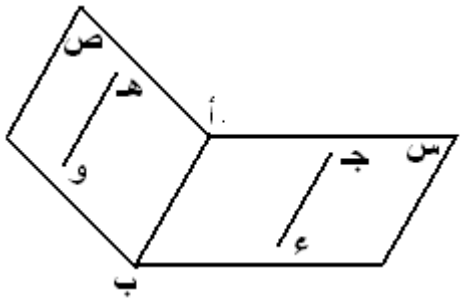
من (١) ، (٢) $\overline{أ جـ}$ ⊥ المستوى ء ب جـ

$\overline{أ جـ}$ ⊃ المستوى أ ء جـ

المستوى أ ء جـ ⊥ المستوى ء ب جـ

.....

٩.



$\overleftrightarrow{جـ ء}$ // المستوى ص ، المستوى س

يحوي $\overleftrightarrow{جـ ء}$ ويقطع المستوى ص في $\overleftrightarrow{أ ب}$

$\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$ ..... (١)

بالمثل $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$ ..... (٢)

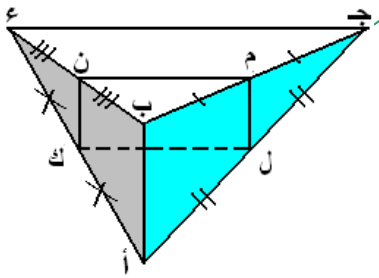
من (١) ، (٢) ينتج أن $\overleftrightarrow{جـ ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$

.....

١٠. في Δ جـ أ ب

ل ، م منتصفي الضلعين $\overline{جـ أ}$ ، $\overline{جـ ب}$

$\overleftrightarrow{ل م}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، ل م = $\frac{١}{٢}$ أ ب ..... (١)



بالمثل

$\overleftrightarrow{ك ن}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، ك ن = $\frac{١}{٢}$ أ ب .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل ل م ن ك متوازي أضلاع وهو المطلوب ثالثا

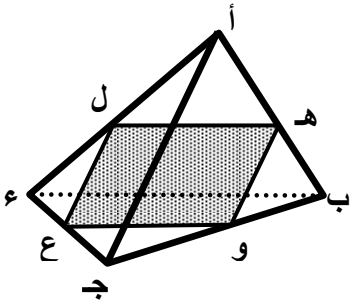
∴ $\overleftrightarrow{ل م}$ // $\overleftrightarrow{ك ن}$ وهو المطلوب أولا

∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{ل م}$ ، $\overleftrightarrow{ل م}$ ⊃ المستوى ل م ن ك

∴ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // المستوى ل م ن ك

.....

١١.



$\overleftrightarrow{أ جـ}$ // المستوى هـ و ع ل

والمستوى أ ب جـ يحوى $\overleftrightarrow{أ جـ}$ ويقطع المستوى هـ و ع ل فى $\overleftrightarrow{هـ و}$

$\overleftrightarrow{أ جـ}$ // $\overleftrightarrow{هـ و}$

المثلث ب هـ و يشابه المثلث ب أ جـ

$\frac{هـ و}{أ جـ} = \frac{ب هـ}{ب أ}$ ..... (١)

$\overleftrightarrow{ب ء}$ // المستوى هـ و ع ل

والمستوى ب ء أ يحوى $\overleftrightarrow{ب ء}$ ويقطع المستوى هـ و ع ل فى $\overleftrightarrow{هـ ل}$

$\overleftrightarrow{ب ء}$ // $\overleftrightarrow{هـ ل}$

المثلث أ هـ ل يشابه المثلث أ ب ء

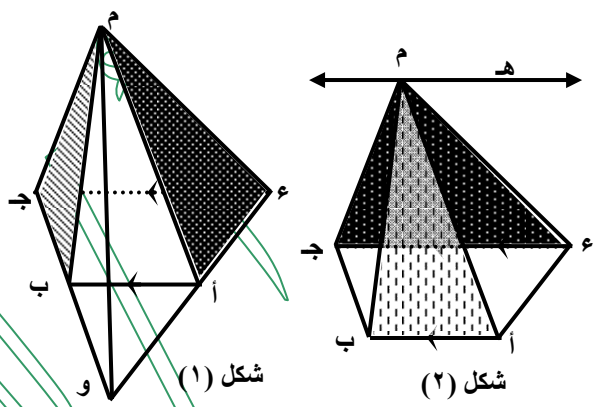
$\frac{هـ ل}{ب ء} = \frac{هـ أ}{ب أ}$ ..... (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج أن

$\frac{هـ و}{أ جـ} + \frac{هـ ل}{ب ء} = \frac{ب هـ}{ب أ} + \frac{هـ أ}{ب أ} = \frac{ب أ}{ب أ} = ١$

.....

١٢.



شكل (٢) شكل (١)

(أ) في شكل (١)

المستوى م أ ء ∩ م ب جـ = $\overleftrightarrow{م و}$

(ب) في شكل (٢)

المستوى م أ ب ∩ م ء جـ = $\overleftrightarrow{م هـ}$

حيث $\overleftrightarrow{م هـ}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{ء جـ}$

تفسير الحل :

$\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{ء جـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ ⊂ المستوى أ م ب ،

$\overleftrightarrow{ء جـ}$ ⊂ المستوى ء م جـ

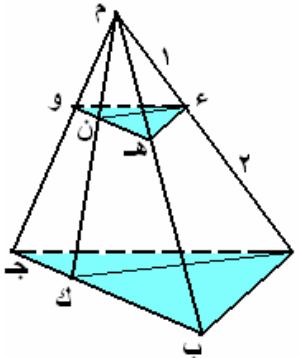
خط تقاطع المستويين أ م ب ، ء م جـ هو المستقيم $\overleftrightarrow{م هـ}$ يوازي كل من المستقيمين $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ء جـ}$

.....

١٣. $\frac{م ء}{م أ} = \frac{م هـ}{م ب}$

∴ $\overline{ء هـ}$ // $\overline{أ ب}$ ..... (١)

بالمثل $\overline{هـ و}$ // $\overline{ب جـ}$ ..... (٢)



من (١) ، (٢) ينتج أن

المستوى ء هـ و // المستوى أ ب جـ

∵ المستوى م أ ك يقطع المستويين المتوازيين

ء هـ و ، أ ب جـ في $\overline{ء ن}$ ، $\overline{أ ك}$ ⟸

$\overline{ء ن}$ // $\overline{أ ك}$

Δ م ء ن ~ Δ م أ ك

$\frac{ء ن}{أ ك} = \frac{م ء}{م أ}$ ⟸ $\frac{ء ن}{أ ك} = \frac{١}{٣}$

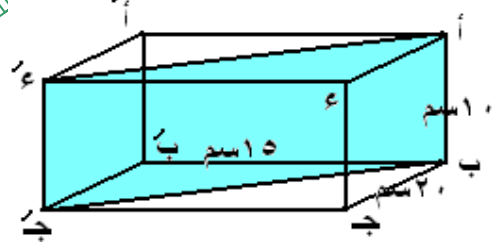
أ ك = ٣ ء ن

.....

١٤. من خواص متوازي المستطيلات

$\overline{أ ب}$ // $\overline{ء' جـ'}$ ويساويه في الطول

الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع ... (١)



$\overline{أ ب}$ ⊥ المستوى ب جـ جـ' ب'

$\overline{أ ب}$ ⊥ $\overline{ب جـ'}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) الشكل أ ب جـ' ء' متوازي أضلاع فيه

أ ب جـ' قائمة

∴ أ ب جـ' ء' مستطيل

في المثلث ب جـ جـ' القائم الزاوية في جـ

(ب جـ')^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (جـ جـ')^{٢}

= ٤٠٠ + ٢٢٥ = ٦٢٥

ب جـ' = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥ سم

مساحة المستطيل أ ب جـ' ء' = ب جـ' × أ ب = ٢٥ × ١٠

= ٢٥٠ سم^{٢}

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين أ ب

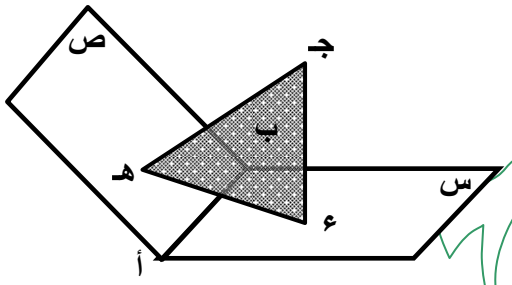
جـ' ء' ، أ ب جـ ء هي جـ ب جـ'

ظا (جـ $\hat{ب}$ جـ') = $\frac{١٥}{٢٠}$ = ٠.٧٥

ق (جـ $\hat{ب}$ جـ') = ٣٦° ٥٢'

.....

١٥.



$\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⊥ المستوى س

$\overleftrightarrow{جـ ء}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ..... (١)

$\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ المستوى ص

$\overleftrightarrow{جـ هـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\overleftrightarrow{أب} \perp$ المستوى جـ ء هـ

$\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{ءهـ}$

.....

١٦. ∵ $\overline{م أ} \perp$ المستوى أ ب جـ ء

∴ $\overline{م ن}$ مائل مسقطه $\overline{أ ن}$

∵ $\overline{م ن} \perp \overline{ب ء}$ معطى

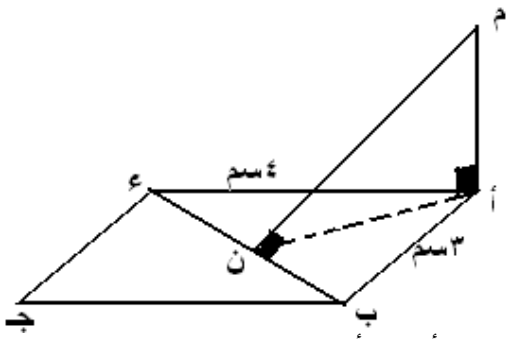
∴ $\overline{أ ن} \perp \overline{ب ء}$

الشكل أ ب جـ ء مستطيل زواياه قوائم

في Δ ب أ ء القائم الزاوية في أ

$(ب ء)^{٢} = (ب أ)^{٢} + (أ ء)^{٢}$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥$ ب ء = ٥ سم



أ ن $= \frac{أ ب \times أ ء}{ب ء} = \frac{٣ \times ٤}{٥} = ٢.٤$سم

الزاوية أ ن م هي الزاوية المستوية للزاوية

الزوجية م – $\overline{ب ء}$ – أ

ظا أ ن م $= \frac{م أ}{أ ن} = \frac{٤}{٢.٤} = \frac{٥}{٣}$

ظا(م - $\overleftrightarrow{ب ء}$ - أ) $= \frac{٥}{٣}$

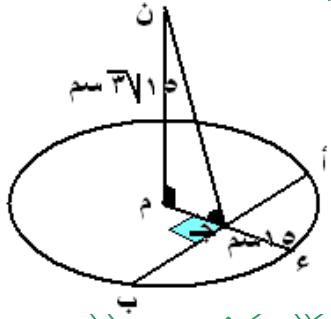
.....

١٧. $\overline{م ن} \perp$ مستوى الدائرة م

∵ $\overline{ن جـ}$ مائل مسقطه $\overline{م جـ}$

∴ $\overline{م جـ} \perp \overline{أ ب}$ معطى

∴ المائل $\overline{ن جـ} \perp \overline{أ ب}$



نق = ٣٠سم ⟸ م ء = ٣٠سم

م جـ = ٣٠ – ١٥ = ١٥سم

الزاوية ن $\hat{جـ}$ م هي الزاوية المستوية للزاوية

الزوجية ن – $\overline{أ ب}$ – م

ظا ن $\hat{جـ}$ م $= \frac{١٥\sqrt{٣}}{١٥} = \sqrt{٣}$

∴ ق(ن $\hat{جـ}$ م) = ٦٠°

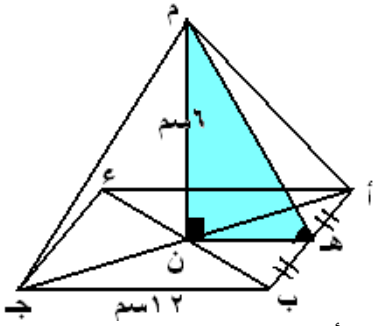
∴ ق(ن – $\overline{أ ب}$ – م) = ٦٠°

.....

١٨. ∵ $\overline{م ن} \perp$ المستوى أ ب جـ ء

، $\overline{م ن} \subset$ المستوى م أ جـ

المستوى م أ جـ ⊥ المستوى أ ب جـ ء



∵ أ ب جـ ء مربع

قطراه متساويان في الطول وينصف كل منهما الآخر

⟸ ن أ = ن ب

في Δ ن أ ب المتساوي الساقين

∵ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ⟸ ∴ $\overline{ن هـ} \perp \overline{أ ب}$

∵ $\overline{م ن} \perp$ المستوى أ ب جـ ء

$\overline{م هـ}$ مائل مسقطه $\overline{ن هـ}$ ،

∵ $\overline{ن هـ} \perp \overline{أ ب}$ اثباتا ..... (١)

∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ ب}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

∴ $\overline{أ ب}$ ⊥ كل من $\overline{م هـ}$ ، $\overline{ن هـ}$

∴ $\overline{أ ب}$ ⊥ مستويهما م ن هـ

م $\hat{هـ}$ ن هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (م

– $\overline{أ ب}$ – ء)

ن هـ $= \frac{١}{٢}$ ب جـ = ٦سم

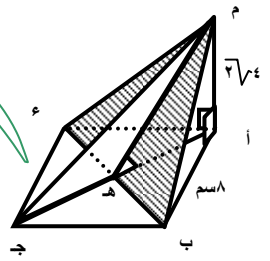
ظا م $\hat{هـ}$ ن $= \frac{٦}{٦} = ١$

∴ ق (م $\hat{هـ}$ ن) = ٤٥°

∴ ق(م – أ ب – ء) = ٤٥°

.....

١٩.



أ ب جـ ء مربع قطراه أ جـ ، ب ء متعامدان وينصف كل منهما الآخر

أ م ⊥ المستوى أ ب جـ ء

أ م ⊥ أ ب ، أ م ⊥ أ ء

فى المثلث م أ ب القائم الزاوية فى أ

(م ب)^{٢} = (٤√٢)^{٢} + (٨)^{٢} = ٩٦

م ب = ٤√٦ سم بالمثل م ء = ٤√٦ سم

فى المثلث م ب ء المتساوى الساقين

هـ منتصف القاعدة ب ء ⇐ م هـ ⊥ ب ء

زاوية (أ هـ م) هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (أ - ب ء - م)

أ ب = ب جـ = ٨سم

أ جـ = ٨√٢ سم من نظرية فيثاغورث

أ هـ = ٤√٢

ظا (أ هـ م) = ١ ومنها ق(أ هـ م) = ٤٥°

(١) زاوية ميل م جـ على المستوى أ ب جـ ء هى زاوية (أ جـ م)

ظا(أ جـ م) = ٤√٢ / ٨√٢ = ١/٢

(٢) أ جـ ⊥ ب ء ، م هـ ⊥ ب ء اثباتا

ب ء عمودى على كل من أ جـ ، م هـ

ب ء عموديا على مستويهما م أ جـ

والمستوى م ب ء يحوى ب ء

المستويان م أ جـ ، م ب ء متعامدان

.....

٢٠. أ أ/ // ب ب/ ، ب ب/ ⊥ ب جـ

أ أ/ ⊥ ب جـ ..... (١)

لكن أ أ/ ⊥ ب ء معطى ..... (٢)

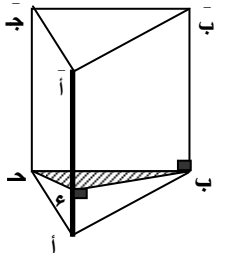
من(١)،(٢) أ أ/ ⊥ المستوى ء ب جـ

أ ب مائل على المستوى ء ب جـ ومسقطها ب ء

أ ب ء هي زاوية ميل أ ب على المستوى ء ب جـ

جتا أ ب ء = ب ء / أ ب = ٣/٥

ق(أ ب ء) = ٤٨° ٧′ ٥٣°



.....

٢١. أولا : أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ منشور قائم

ب ب/ ⊥ القاعدة أ ب جـ ء

وحيث أن المستوى ب/ ب ء يحوى ب ب/

المستوى ب/ ب ء عمودى على المستوى أ ب جـ ء

ثانيا : بفرض أن أ ب = أ ء = ل

فى المثلث ب أ ء القائم الزاوية فى أ

ب ء = ل√٢ لماذا ؟ ، ب/ ب = ٢ ل

ء ب/ مائل على المستوى أ ب جـ ء ومسقطه ب ء

زاوية ميل ء ب/ على المستوى أ ب جـ ء هى ب ء ب/

ظا (ب ء ب/) = ب/ ب / ب ء = ٢ل / ل√٢ = √٢

ثالثا : لاحظ أن الشكل أ ب جـ و مربع لماذا ؟

ء و = أ ب = ل

الزاوية الزوجية بين المستويين ب جـ جـ/ ب/ ، ء جـ جـ/ ء/ حرفها جـ جـ/

جـ جـ/ ⊥ كل من ب جـ ، ء جـ

ب جـ ء هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

جا (ب جـ ء) = ء و / ء جـ = ل / ٢ ل = ١/٢

ق(ب جـ ء) = ٣٠°