ملخص قوانين الاستاتيكا.

قوة الاحتكاك النهائية(ك): هى القيمة النهائية لقوة الاحتكاك عندما يكون الجسم على وشك الحركة أو متحرك

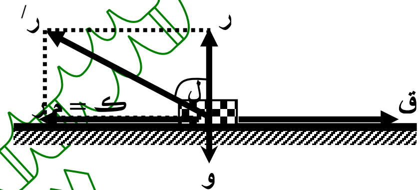
معامل الاحتكاك (م):

هو النسبة بين الاحتكاك النهائى (ك) ورد الفعل العمودى (ر) :

أى أن : م = ك / ر من ذلك تكون ك = م ر

ملحوظة : ك = م ر فى حالة الاحتكاك النهائى فقط أى عندما يكون الجسم على وشك الحركة أو متحركا بالفعل وهى أقصى قيمة للاحتكاك ح أى أن ح ≤ م ر

زاوية الاحتكاك (ل): هى الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل .



رد الفعل المحصل (ر/):

هو محصلة رد الفعل العمودى والاحتكاك عندما يكون نهائيا .

ر/ = √(ر² + ك²) أى ر/ = ر √(١ + م²)

العلاقة بين معامل الاحتكاك وظل زاوية الاحتكاك :

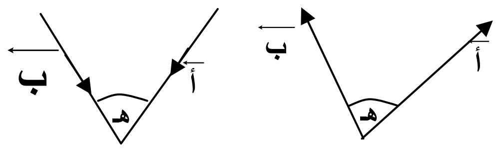
نجد من الشكل السابق أن : ظا ل = ك / ر = م ر / ر = م

. م = ظا ل .

أى أن : (معامل الاحتكاك = ظل زاوية الاحتكاك)

الضرب القياسي والضرب الاتجاهي

إذا كان هـ قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب



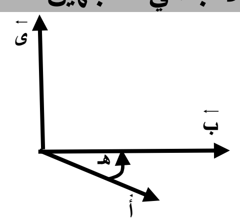
حيث ٠ ≤ هـ ≤ ١٨٠° فإن أ ∘ ب = أ ب جتا هـ

المسقط الجبري للمتجه أ في اتجاه ب = || أ || جتاهـ

المسقط الجبري للمتجه ب في اتجاه أ = || ب || جتاهـ

المسقط الجبري للمتجه أ في اتجاه ب = (أ ∘ ب) / || ب ||

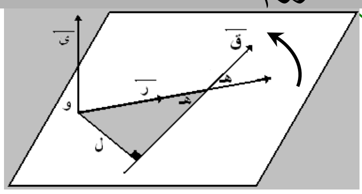
الضرب الاتجاهي لمتجهين



أ × ب = أ ب جاهـ ى حيث هـ قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين أ ، ب ، ى متجه العمودي على مستوى المتجهين أ ، ب واتجاهه يتحدد حسب قاعدة اليد اليمنى وفي اتجاه الابهام

الضرب القياسي لمتجهين	الضرب الاتجاهي لمتجهين
أ ∘ ب = أ ب جتا هـ	أ × ب = أ ب جا هـ ى
أ ∘ ب = أ١ ب١ + أ٢ ب٢	أ × ب =(أ١ ب٢ - أ٢ ب١) ع
أ ∘ ب = ب ∘ أ	أ × ب = - ب × أ
إذا كان أ ، ب غير صفريين ، أ ⊥ ب فإن أ ∘ ب = ٠	إذا كان أ ، ب غير صفريين ، أ // ب فإن أ × ب = ٠
أ ∘ أ = || أ ||²	أ × أ = ٠
س ∘ س = ص ∘ ص = ١	س × س = ص × ص = ع × ع = ٠
س ∘ ص = ص ∘ س = ٠	س × ص = ع ، ص × ع = س ، ع × س = ص
أ ∘ ٠ = ٠ ∘ أ = ٠	أ × ٠ = ٠ × أ = ٠
(م أ) ∘ ب = أ ∘ (م ب) = م(أ ∘ ب)	(م أ) × ب = أ ×(م ب) = م (أ × ب)
(أ + ب)∘ جـ = أ ∘ جـ + ب ∘ جـ	(أ + ب)× جـ = أ × جـ + ب × جـ

العزوم



جو = ر × ق

جو = ر × ق جا هـ ى

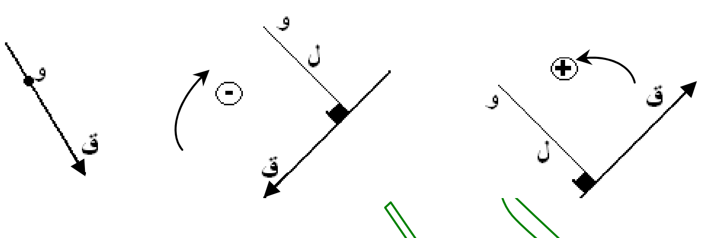
|| جو || = || ر × ق || = ر × ق جا هـ

= ق ل حيث ل = ر جا هـ

، ل طول العمود الساقط من نقطة و على خط عمل القوة ق

جو = ق ل ، ل = || جو || / ق

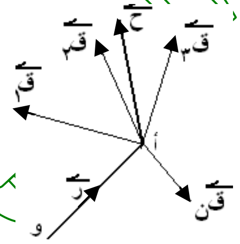
عزوم القوى المستوية



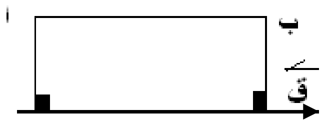
ج و = ق × ل ج و = - ق × ل ج و = صفر

نظرية العزوم

مجموع عزوم عدة قوى متلاقية في نقطة بالنسبة لأية نقطة في الفراغ يساوي عزم محصلتهم بالنسبة لنفس النقطة

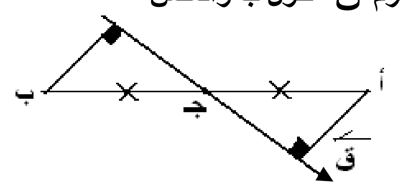


نتيجتان هامتان :



(١) إذا كان المستقيم أ ب // خط عمل القوة ق فإن عزم ق حول أ = عزم ق حول ب والعكس أي أن إذا كان عزم ق حول أ = عزم ق حول ب فإن خط عمل ق // أ ب

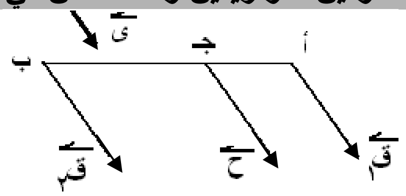
(٢) إذا كان خط عمل ق يمر بمنتصف أ ب فإن عزم ق حول أ = - عزم ق حول ب والعكس



أي أن : إذا كان عزم ق حول أ = - عزم ق حول ب فإن خط عمل ق ينصف أ ب

القوى المتوازية

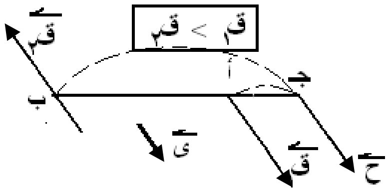
محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتان في الاتجاه



ح = ق١ + ق٢

ق١ × أ جـ = ق٢ × ب جـ

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتان في الاتجاه



ح = ق١ - ق٢ بفرض أن ق١ > ق٢

ق١ × أ جـ = ق٢ × ب جـ

توازن مجموعة من القوى المتوازية المستوية

قاعدة : اذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتوازية فإن :

(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوي صفرا

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أي نقطة في مستويها يساوي صفرا

....

الاتزان العام

<u>الشروط اللازمة والكافية لاتزان مجموعة من القوى :</u>

(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها .

(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة في مستواها .

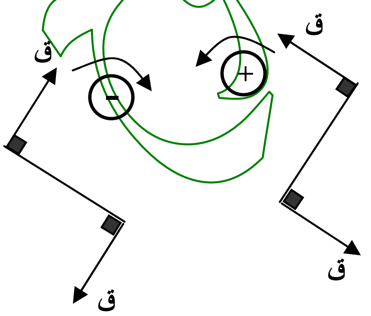
والتعبير الرياضى عن الشروط الكافية واللازمة للإتزان هو :

ســـ = ٠ ، صـــ = ٠ ، ج = ٠

الازدواجات

الازدواج :ـ هو مجموعة تتكون من قوتين متساويتين في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ولايجمعهما خط عمل واحد

القياس الجبري لعزم الازدواج



ج = + ق ل ج = - ق ل

توازن ازدواجين – تكافؤ ازدواجين

إذا كان ج١ ، ج٢ عزمي إزدواجين مستويين فيكون (١) الازدواجان متزنان إذا كان ج١ + ج٢ = ٠

(٢) الازدواجان متكافئان إذا كان ج١ = ج٢

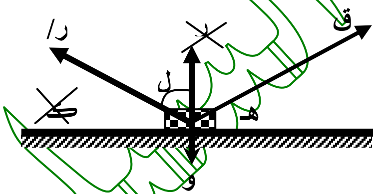
حقيقة : لايتوازن ازدواج إلا مع ازدواج آخر مساو له في العزم ومضاد له في الاتجاه

قاعدة : إذا أثرت عدة قوى مستوية في جسم متماسك وأمكن تمثيلها بأضلاع مضلع مقفل مأخوذة في ترتيب دوري واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجا يساوي معيار عزمه حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع × م حيث م هو عدد وحدات القوة الممثلة بوحدة الأطوال

الاحتكـــــــاك

١- وضع جسم وزنه و نيوتن على مستوى أفقي خشن وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ل . شد الجسم بقوة تميل على المستوى الأفقي بزاوية قياسها هـ فأصبح الجسم على وشك الحركة . اثبت أن مقدار هذه القوة يساوي $\frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$ ثم أوجد مقدار أقل قوة تكفي لتحريك الجسم والشرط اللازم لذلك .

الحل :



ر/ هى محصلة القوتين ر ، ك

الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ق ، ر/ ، و

بتطبيق قاعدة لامى : $\frac{\text{ق}}{\text{جا (١٨٠ - ل)}} = \frac{\text{و}}{\text{جا [٩٠ - (هـ - ل)]}}$

$\frac{\text{ق}}{\text{جا ل}} = \frac{\text{و}}{\text{جتا(هـ - ل)}}$ ومنها $\text{ق} = \frac{\text{و جا ل}}{\text{جتا (هـ - ل)}}$

ق أقل ما يمكن عندما يكون المقام جتا(هـ - ل) أكبر مايمكن

أى عندما جتا(هـ - ل) = ١

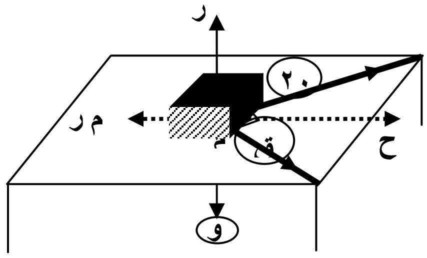
ق = و جا ل والشرط اللازم هو هـ - ل = ٠ أى هـ = ل

أى عندما تكون زاوية ميل القوة تساوى زاوية الاحتكاك

....

٢- وُضِعَ جسم مقدار وزنه ١٠ نيوتن على مستوى أفقي خشن، أثرت عليه في نفس المستوى قوتان مقدارهما ٢٠ ، ق نيوتن قياس الزاوية بين اتجاهيهما يساوي ١٥٠° أوجد أقل قيمة تأخذها ق لكي يكون الجسم على وشك الحركة، وعين الاتجاه الذي يتحرك فيه الجسم، علمًا بأن قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوي ٤٥°.

الحل: ∵ الجسم على وشك الحركة ،



ح = م ر ، ر = و

ر = ١٠ ، م = ظا ٤٥° = ١

ح = م ر = ١٠

حيث ح مقدار محصلة القوتين ٢٠ ، ق وقياس الزاوية بينهما ى = ١٥٠°

$\text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + ٢ \, \text{ق}_1 \text{ق}_2 \text{ جتا ى}$ ،

$١٠٠ = ٤٠٠ + \text{ق}^2 + ٢ \times ٢٠ \times \text{ق جتا } ١٥٠^\circ$

ومنها ينتج أن: $(\text{ق} - ١٠\sqrt{٣})^2 = ٠$

ق = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

نفرض اتجاه المحصلة يصنع مع اتجاه القوة التي مقدارها ق زاوية قياسها هـ (ق = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن)

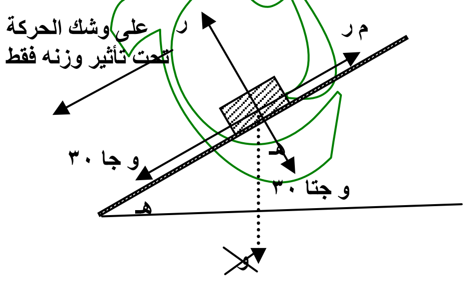
$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ق}_2 \text{ جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا ى}} = \frac{\text{٢٠ جا ١٥٠}}{١٠\sqrt{٣} + \text{٢٠ جتا ١٥٠}}$

$\text{ظا هـ} = \frac{١٠}{\text{صفر}}$ ومنها هـ = ٩٠° أي أن اتجاه الحركة المحتملة للجسم هو الاتجاه العمودي على القوة التي مقدارها ١٠ $\sqrt{٣}$

....

٣- وضِعَ جسم مقدار وزنه ٢ ث.كجم على مستوى أفقي خشن ، ثم أُمِيلَ المستوى بالتدريج ، فأوشك الجسم على الانزلاق عندما أصبح قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي يساوي ٣٠° ، برهن أن معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى المائل يساوي $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ، وإذا ربِطَ الجسم عندئذٍ في خيط خفيف يقع في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل للمستوى المائل ، وشد الخيط في اتجاه يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° حتى أوشك الجسم على الحركة إلى أعلى المستوى ، برهن أن مقدار قوة الاحتكاك حينئذٍ تساوي $\frac{١}{٢}$ ث.كجم

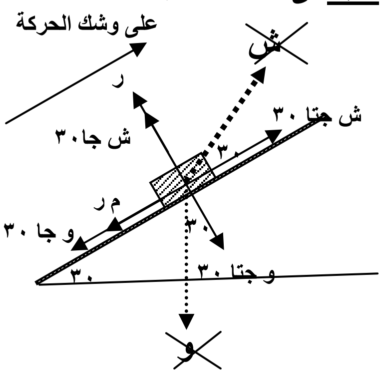
الحل: أولاً : فى الشكل المقابل :



من الاتزان : م ر = و جا ٣٠° ، ر = و جتا ٣٠°

بالقسمة ينتج أن : م = ظا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ثانياً: فى الشكل المقابل :



من الاتزان: ش جتا ٣٠° = م ر + و جا ٣٠° .

ر + ش جا ٣٠° = و جتا ٣٠°

ش جتا ٣٠° = م (و جتا ٣٠° – ش جا ٣٠°) + و جا ٣٠°

ش (جتا ٣٠° + م جا ٣٠) = م و جتا ٣٠ + و جا ٣٠°

$$ش = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} \times ٢ \text{ جتا } ٣٠ + ٢ \text{ جا } ٣٠^\circ}{\text{جتا } ٣٠ + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ جا } ٣٠^\circ} = \sqrt{3} \text{ ث . كجم}$$

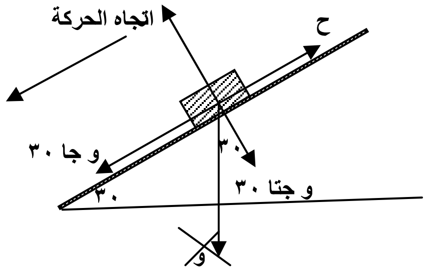
ر = و جتا ٣٠° – ش جا ٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

كـــ = م ر = $\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$

....

٤ـ وضع جسم كتلته ٤كجم على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{3}}{2}$. بين ما اذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو أن يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، ثم اوجد أقل وأكبر قوة تؤثر على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل بحيث تجعل الجسم على وشك الحركة .

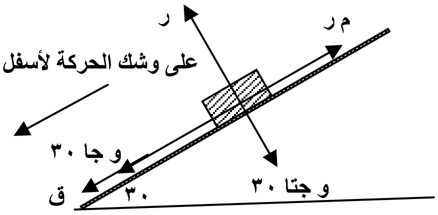
الحل :



ظا ل = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنها ل = ٤٠° ٥٣َ ٣٦ً

هـ = ٣٠° أى أن هـ < ل الاحتكاك غير نهائى

أولا : أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل المستوى

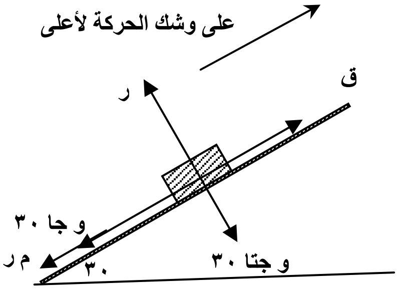


ق + ٤ جا٣٠° = م ر ، ر = ٤ جتا٣٠°

ق + ٤ × جا٣٠° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ٤ جتا٣٠°

ق + ٢ = ٣ ومنها ق = ١ث.كجم

ثانيا : أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى



ق = ٤ جا٣٠° + م ر ، ر = ٤ جتا٣٠°

ق = ٤ × جا٣٠° + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ٤ جتا٣٠°

ق = ٢ + ٣ ومنها ق = ٥ث.كجم

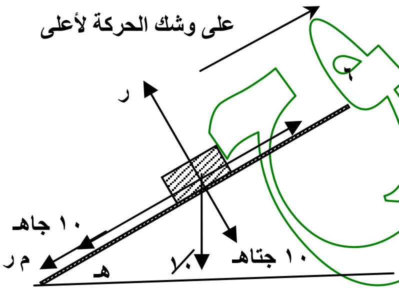
....

٥ـ وضع جسم وزنه ١٠ث .كجم على مستو مائل خشن تؤثر عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل الى أعلى المستوى ، فاذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة الى أعلى المستوى عندما ق = ٦ث . كجم ويكون على وشك الحركة الى أسفل المستوى عندما ق = ٤ث .كجم . أوجد :

أولا : قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

ثانيا : معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى .

الحل :

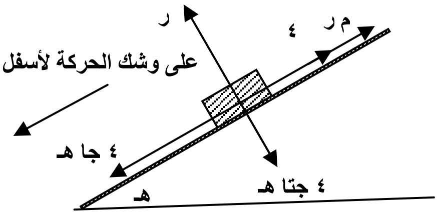


أولا :

معادلتى الاتزان

$ر_1$ = ١٠ جتا هـ ، ٦ = ١٠ جا هـ + م $ر_1$

٦ = ١٠ جا هـ + ١٠ م جتا هـ .... (١)



ثانيا :

معادلتى الاتزان

$ر_2$ = ١٠ جتا هـ ، ٤ + م $ر_2$ = ١٠ جا هـ

$٤ + ١٠$ م جتا هـ $= ١٠$ جا هـ ...... (٢)

بجمع (١) ، (٢)

$١٠ + ١٠$ م جتا هـ $= ١٠$ م جتا هـ $+ ٢٠$ جا هـ

$١٠ = ٢٠$ جا هـ ومنها جا هـ $= \frac{١}{٢}$ ق(هـ) $= ٣٠^\circ$

بالتعويض فى (١)

$٦ = ١٠$ جا $٣٠^\circ + ١٠$ م جتا ٣٠°

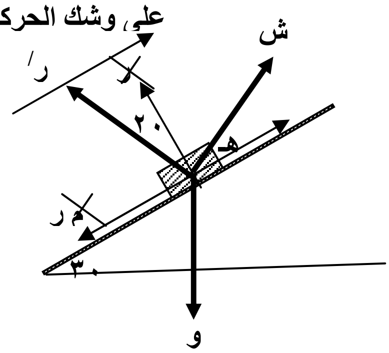
$٦ = ٥ + ١٠$ م جتا ٣٠°

$١ = ١٠$ م جتا ٣٠° ومنها م $= \frac{١}{١٠ \text{ جتا } ٣٠^\circ} = \frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

....

٦- وضع جسم وزنه و على مستو خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فاذا كانت زاوية الاحتكاك قياسها ٢٠° فأوجد مقدار واتجاه أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة الى أعلى المستوى .

الحل :



الجسم متزن تحت تأثير القوى الثلاث : وزن الجسم و ، القوة ق وتصنع زاوية قياسها هـ مع المستوى ، رد الفعل المحصل ر/

بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{\text{ق}}{\text{جا } ١٣٠^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا }(٩٠ - \text{هـ} + ٢٠)}$ أى ق $= \frac{\text{و جا } ١٣٠^\circ}{\text{جا }(١١٠ - \text{هـ})}$

ق أقل ما يمكن عندما جا$(١١٠^\circ -$ هـ$) = ١$

$١١٠ -$ هـ $= ٩٠$ ومنها هـ $= ٢٠^\circ$

عندئذ أقل قوة ق = و جا١٣٠° = و جا٥٠°

....

٧- دور ثان ٢٠٠١ :

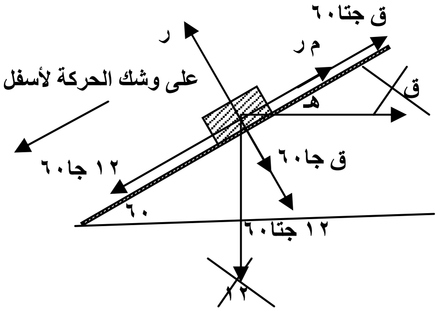
وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على مستو خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٩}$. بين (مع ذكر السبب) أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى ساكنا ، ثم أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر على الجسم ليبقى متزنا علما بأن القوة واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى.

الحل :

زاوية ميل المستوى هـ $= ٦٠^\circ$

م = ظا ل $= \frac{\sqrt{٣}}{٩}$ ومنها ل $= ١٠^\circ ٥٤'$

هـ > ل الجسم لايبقى متزنا



ايجاد أقل قوة أفقية تحفظ توازن الجسم (تجعله على وشك الانزلاق)

معادلتى الاتزان

ر = ق جا ٦٠ + ١٢ جتا٦٠

ر $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق $+ ٦$ .... (١)

ق جتا٦٠ + م ر = ١٢ جا٦٠ .... (٢)

$\frac{١}{٢}$ ق $+ \frac{\sqrt{٣}}{٩}(\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق $+ ٦) = ١٢ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\frac{١}{٢}$ ق $+ \frac{١}{٦}$ ق $+ \frac{٢\sqrt{٣}}{٣} = ٦\sqrt{٣}$ بالضرب × ٦

٣ق + ق + $٤\sqrt{٣} = ٣٦\sqrt{٣}$

٤ق $= ٣٢\sqrt{٣}$ ومنها ق $= ٨\sqrt{٣}$

....

٨- دور أول ٢٠٠٢ :

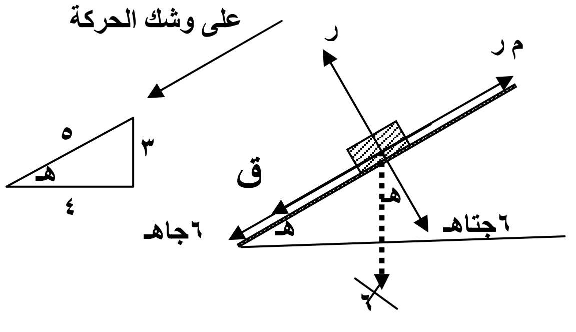
وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{٤}{٥}$ وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٤٥° بين أن الجسم يبقى متزنا ثم أوجد مقدار أقل قوة تؤثر على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل وتجعله على وشك الحركة .

الحل

جتاهـ $= \frac{٤}{٥}$ ، هـ $= ٣٦^\circ ٥٢'$ ، ل $= ٤٥^\circ$

∵ زاوية ميل المستوى هـ > زاوية الاحتكاك ل

∴ الجسم يبقى متزنا



معادلتى الاتزان

ر = ٦جتاهـ .... (١)

ق + ٦جاهـ = م ر .... (٢) ، م = ظا٤٥ = ١

ق + ٦ × $\frac{٣}{٥}$ = ١ × ٦ × $\frac{٤}{٥}$

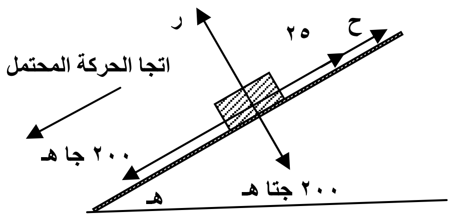
ق = ٤.٨ – ٣.٦ = ١.٢ نيوتن

....

٩- دور أول٢٠٠٣ :

وضع جسم وزنه ٢٠٠ث.جم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢}$ وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ، أثرت على الجسم قوة مقدارها ٢٥ ث.جم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ، فاذا اتزن الجسم ، فأوجد قوة الاحتكاك ، وبين ما إذا الجسم على وشك الحركة أم لا ؟

الحل :



مركبة الوزن فى اتجاه المستوى = ٢٠٠ جاهـ = ١٠٠

مركبة الوزن > ٢٥

اتجاه الحركة المحتمل لأسفل   أى أن قوة الاحتكاك لأعلى

ح + ٢٥ = ١٠٠ ومنها ح = ٧٥ ث.جم

ر = ٢٠٠ جتاهـ = ١٠٠$\sqrt{٣}$

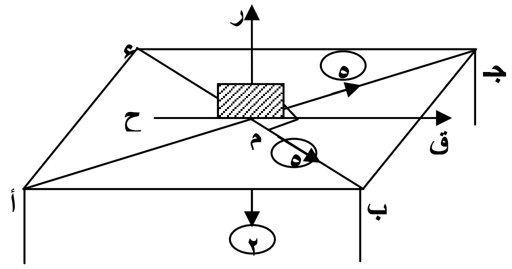
م ر = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ × ١٠٠$\sqrt{٣}$ = ٧٥ث.جم

ح = م ر   ∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل

....

١٠- سطح افقي خشن على شكل مربع أ ب جـ د فيه م نقطة تقاطع قطريه ، وضع جسم وزنه ٢ ث.كجم عند م ، و اثرت عليه قوتان كل منهما تساوي ٥ ث.كجم في اتجاه م ب ، م جـ . اوجد قوة الاحتكاك . واذا دار السطح حول ب جـ بزاوية قياسها ٣٠ْ، فاصبح الجسم على وشك الحركة ، أوجد معامل الاحتكاك

الحل : على المستوى الأفقي



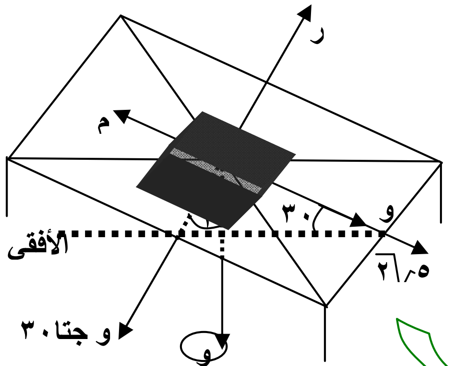
محصلة القوتين المتعامدتين ٥ ، ٥ ث.كجم

ق^{٢} = (٥)^{٢} + (٥)^{٢} ومنها ق = ٥$\sqrt{٢}$ ث.كجم

من اتزان الجسم

ق = ح ومنها ح = ٥$\sqrt{٢}$ حيث ح قوة الاحتكاك

على المستوى المائل



الاحتكاك نهائي = م ر

ر = و جتا٣٠ْ = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

ق + و جا٣٠ = م ر

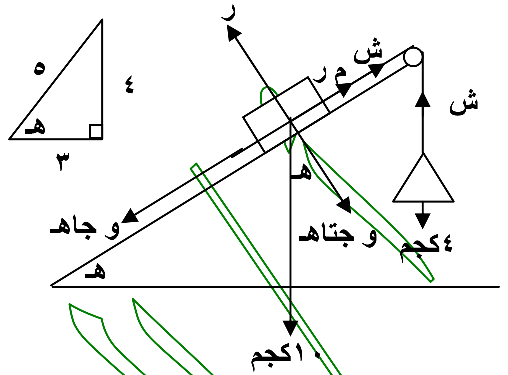
٥$\sqrt{٢}$ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ = $\sqrt{٣}$ م ومنها م = $\frac{٥\sqrt{٢} + ١}{\sqrt{٣}}$

....

١١- وضع جسم كتلته ١٠ كجم على مستوى خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ثم ربط الجسم بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى و يتدلى من طرفه كفة ميزان كتلتها ٠.٥ كجم ، فإذا كان اقل ثقل يلزم وضعه في الكفة حتى يظل الجسم متزن هو ٣.٥ كجم ، أوجد معامل الاحتكاك . ثم اثبت ان اكبر ثقل يمكن وضعه في الكفة دون اختلال التوازن يساوي ١١.٥ كجم .

الحل :

أولا :أقل ثقل يوضع في الكفة ٣.٥ كجم يحفظ الجسم من الانزلاق لأسفل (على وشك الحركة لأسفل) في هذه الحالة يكون قوة الإحتكاك النهائي م ر لأعلى ويكون وزن الكفة بما فيها ٤ كجم



من اتزان الكتلة الرأسية ش = ٤ ث.كجم

على المستوى المائل

معادلتى الاتزان : ر = و جتاهـ ،

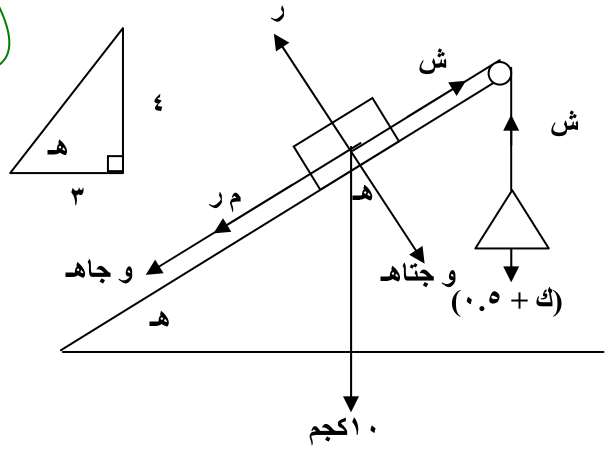
ش + م ر = و جاهـ

٤ + م و جتاهـ = و جاهـ

٤ + م × ١٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ١٠ × $\frac{٤}{٥}$ ومنها م = $\frac{٢}{٣}$

ثانيا : نفرض أن أكبر ثقل يوضع في الكفة = ك

في هذه الحالة ويكون وزن الكفة بما فيها(ك + $\frac{١}{٢}$) كجم



الكتلة على المستوى المائل تكون على وشك الحركة لأعلى ،

ويكون قوة الإحتكاك النهائي م ر لأسفل

من اتزان الكتلة الرأسية

ش = (ك + ٠.٥) .... (١)

على المستوى المائل : ر = وجتاهـ

ش = م ر + و جا هـ

ش = م و جتا هـ + و جاهـ

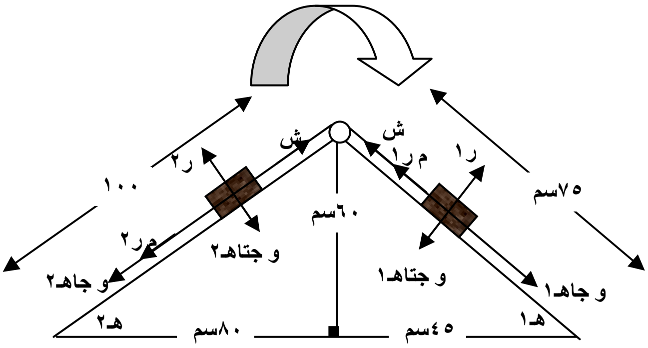
(ك + ٠.٥) = $\frac{٢}{٣}$ × ١٠ × $\frac{٣}{٥}$ + ١٠ × $\frac{٤}{٥}$

ك + ٠.٥ = ١٢ ومنها ك = ١١.٥ ث.كجم

....

١٢- مستويان مائلان متساويا الخشونة ارتفاعهما مشترك ويساوي ٦٠ سم ، وطول احد المستويين ٧٥ سم وطول الآخر ١٠٠سم ، وضع جسمان متساويا الكتلة كلٍ على مستوى ، و يتصل الجسمان بخيط يمر على بكرة ملساء مثبتة عند قمة المستويين , فإذا كانت المجموعة على وشك الحركة ، فأوجد معامل الاحتكاك

الحل :



على المستوى الأيمن

وجاهـ١ = م ر١ + ش ، ر١ = و جتاهـ١

وجاهـ١ = م وجتاهـ١ + ش .... (١)

على المستوى الأيسر

ش = و جاهـ٢ + م ر٢ ، ر٢ = وجتاهـ٢

ش = وجاهـ٢ + م و جتاهـ٢ .... (٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

وجاهـ١ = م وجتاهـ١ + و جاهـ٢ + م وجتاهـ٢

بالقسمة على و

جاهـ١ – جاهـ٢ = م(جتاهـ١ + جتاهـ٢)

($\frac{٦٠}{٧٥}$ - $\frac{٦٠}{١٠٠}$) = م ($\frac{٤٥}{٧٥}$ + $\frac{٨٠}{١٠٠}$)

٠.٢ = ١.٤ م ومنها م = $\frac{١}{٧}$

....

حل بنفسك

١٣- كتلتان ٣ ، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك بين المستوى والجسمين $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٤}{٥}$ على الترتيب . بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً ، ثم اثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة = $\frac{٣}{٤}$

....

الضرب القياسي والضرب الاتجاهي

١٤- إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، -٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (١ ، -١)

أوجد المتجه $\overleftarrow{جـ}$ حيث $\overleftarrow{أ}$ ⊙ $\overleftarrow{جـ}$ = -٤ ،

$\overleftarrow{جـ}$ × $\overleftarrow{ب}$ = -٣ $\overleftarrow{ع}$ [$\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$]

الحل :

نفرض أن $\overrightarrow{\text{جـ}} = (\text{س} ، \text{ص})$ والمطلوب ايجاد س ، ص

$\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{جـ}} = -4$

$(2 ، -3) \odot (\text{س} ، \text{ص}) = -4$

$2\text{س} - 3\text{ص} = -4$ .... (١)

$\overrightarrow{\text{جـ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -3\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$(\text{س} ، \text{ص}) \times (1 ، -1) = -3\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$(-\text{س} - \text{ص})\,\overrightarrow{\text{ع}} = -3\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\text{س} + \text{ص} = 3$ .... (٢)

بحل (١) ، (٢) ينتج أن س = ١ ، ص = ٢

....

١٥- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = 2\,\overrightarrow{\text{س}} - 3\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = 3\,\overrightarrow{\text{س}} + 4\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، وكان $\overrightarrow{\text{جـ}} \parallel \overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = 34\,\overrightarrow{\text{ع}}$ فأوجد $\overrightarrow{\text{جـ}}$

$[4\,\overrightarrow{\text{س}} - 6\,\overrightarrow{\text{ص}}]$

تذكر أن : إذا كان $\overrightarrow{\text{جـ}} \parallel \overrightarrow{\text{أ}}$ فإن $\overrightarrow{\text{جـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{0}$

....

١٦- مصر ٩١ : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهان غير صفريين حيث $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{م}}$ أوجد بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$

$(\overrightarrow{\text{أ}} + 2\,\overrightarrow{\text{ب}}) \times (3\,\overrightarrow{\text{أ}} - 2\,\overrightarrow{\text{ب}})$

الحل :

تذكر أن : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{0}$

$(\overrightarrow{\text{أ}} + 2\,\overrightarrow{\text{ب}}) \times (3\,\overrightarrow{\text{أ}} - 2\,\overrightarrow{\text{ب}}) = -2\,\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + 6\,\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}} = -2\,\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} - 6\,\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -8\,\overrightarrow{\text{م}}$

....

١٧- مصر ٨٩ : إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = 3\,\overrightarrow{\text{س}} - 2\,\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (6 ، 5)$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ فعين :

(١) $\|\overrightarrow{\text{ب}} + (3\,\overrightarrow{\text{أ}} \odot 2\,\overrightarrow{\text{جـ}})\,\overrightarrow{\text{أ}}\|$ [٢٥]

(٢) $\overrightarrow{\text{ب}} \times \{-\overrightarrow{\text{جـ}} + \overrightarrow{\text{س}} + [\overrightarrow{\text{ب}} \odot (-2\,\overrightarrow{\text{أ}})]\,\overrightarrow{\text{جـ}}\}$

$[-22\,\overrightarrow{\text{ع}}]$

....

١٨- السودان ٩١ : إذا كان

$\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$ ،

$\overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ أوجد المسقط الجبري للمتجه $\overrightarrow{\text{جـ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجهي وحدة متعامدين

$[-2\sqrt{2}]$

....

١٩- إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (2 ، 3)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{م} ، 2)$ فعين قيمة م في كل من الحالات التالية :

أولا : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -5\,\overrightarrow{\text{ع}}$ [٣]

ثانيا : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ [-٣]

ثالثا : قياس الزاوية بين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤٥°

$[10 \text{ أو } \frac{-2}{5}]$

ملحوظة :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = 0$

$$\text{جتا هـ} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

حيث هـ قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

....

٢٠- يراد تحليل قوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ فإذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ توازى متجها معطى $\overrightarrow{\text{ب}}$ بينما $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ عمودية على $\overrightarrow{\text{ب}}$ اثبت أن

$$\overrightarrow{\text{ق}}_1 = \left(\frac{\overrightarrow{\text{ق}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{ب}^2}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$$ ثم أوجد $\overrightarrow{\text{ق}}_2$

الحل : $\overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ق}}_2$ .... (I)

$\overrightarrow{\text{ق}}_1 \parallel \overrightarrow{\text{ب}} \Leftarrow \overrightarrow{\text{ق}}_1 = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$ ....(١)

$\overrightarrow{\text{ق}}_2 \perp \overrightarrow{\text{ب}} \Leftarrow \overrightarrow{\text{ق}}_2 \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{صفر}$ ....(٢)

بضرب طرفي العلاقة (I) قياسيا في المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

$\overrightarrow{\text{ق}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ق}}_1 \odot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ق}}_2 \odot \overrightarrow{\text{ب}}$

$= \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}$

$\overrightarrow{\text{ق}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{ك}\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2$ ومنها $\text{ك} = \frac{\overrightarrow{\text{ق}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2}$

بالتعويض في (١) $\overrightarrow{\text{ق}}_1 = \left(\frac{\overrightarrow{\text{ق}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{ب}^2}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$

من (I) $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = \overrightarrow{\text{ق}} - \overrightarrow{\text{ق}}_1$

$\overrightarrow{\text{ق}}_2 = \overrightarrow{\text{ق}} - \left(\frac{\overrightarrow{\text{ق}} \odot \overrightarrow{\text{ب}}}{\text{ب}^2}\right)\overrightarrow{\text{ب}}$

....

عـــزم قـــــوة بالنسـبة لنقطـــة

٢١- مايو ٢٠٠٢

تؤثر القوة ق = ٣ س + ٢ ص عند النقطة أ = (٢ ، -١) أوجد :

(١) متجه عزم ق بالنسبة للنقطة ب = (٦ ، ٢)

(٢) المركبة الجبرية للقوة ق في اتجاه أ ب

[ع ، ٣.٦]

....

٢٢- أغسطس ٩٧

تؤثر القوتان ق١ = س + ٢ ص عند النقطة (٢ ، ١) ، ق٢ = ٢ س - م ص عند النقطة (١ ، ٢)

عين قيمة الثابت م بحيث ينعدم مجموع عزمي هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل [م = -١]

....

٢٣- مايو ٢٠٠٠

القوتان ق١ = ٥ س + ص ، ق٢ = - س + ٢ ص تؤثران عند النقطة أ = (٢ ، ٥) . أوجد متجه عزم محصلة هاتين القوتين بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ١) ، ثم أوجد طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل المحصلة .

[-١٣ ع ، ل = ١٣/٥]

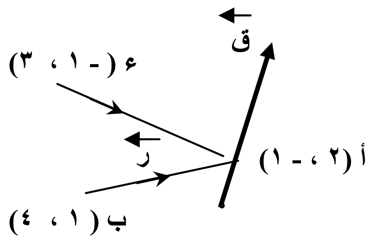
....

٢٤- * دور أول ٢٠١١

تؤثر القوة ق = ل س + م ص في النقطة أ (٢ ، -١) والقياس الجبري لعزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ٤) يساوي ١١ وحدة عزم ، وينعدم عزمها بالنسبة للنقطة ء (-١ ، ٣)

أوجد مقدار ق

الحل :



جـب = ب أ × ق = (١ ، -٥) × (ل ، م)

= (م + ٥ ل) ع

م + ٥ ل = ١١

م = ١١ - ٥ ل .... (١)

جـء = ء أ × ق = (٣ ، -٤) × (ل ، م)

= (٣ م + ٤ ل) ع

٣ م + ٤ ل = ٠ .... (٢) بالتعويض من (١) في (٢)

٣(١١ - ٥ ل) + ٤ ل = ٠

٣٣ = ١١ ل ومنها ل = ٣

بالتعويض في (١) ينتج أن م = -٤

ق = ٣ س - ٤ ص

|| ق || = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ = ٥

....

٢٥- ** مصر ٩١

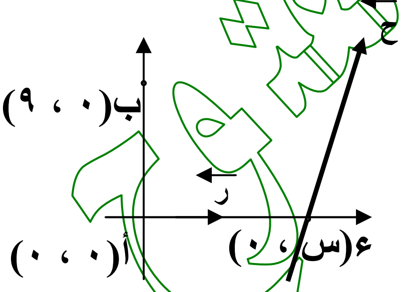
ق١ = ١٤ س + ٤ ص ، ق٢ = ل س + ٦ ص قوتان مجموع عزميهما حول النقطة أ = (٠ ، ٠) يساوي -٤٠ ع ومجموع عزميهما حول النقطة ب = (٠ ، ٩) يساوي ١٧٦ ع . أوجد الثابت ل ، واحسب طول العمود الساقط من النقطة أ على خط عمل المحصلة [ل = ١٠ ، ٢٠/١٣]

الحل :

ح = ق١ + ق٢

ح = (١٤+ل) س + ١٠ ص

نفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة ء = (س ، ٠) التي تقع على محور السينات (نقطة تأثير المحصلة)



جـأ = -٤٠ ع

ر × ح = -٤٠ ع

أء × ح = -٤٠ ع

(س ، ٠) × (١٤ + ل ، ١٠) = -٤٠ ع

(١٠ س - ٠) ع = -٤٠ ع ومنها س = -٤

جـب = ١٧٦ ع

ب ء × ح = ١٧٦ ع

(س ، -٩) × (١٤ + ل ، ١٠) = ١٧٦ ع

١٠س + ٩(١٤ + ل) = ١٧٦

-٤٠ + ١٢٦ + ٩ ل = ١٧٦ ومنها ل = ١٠

ح = ٢٤ س + ١٠ ص

|| ح || = ٢٦

طول العمود الساقط من النقطة أ على خط عمل المحصلة

ل = ||جـ أ|| / ||ح|| = ٤٠ / ٢٦ = ٢٠ / ١٣

....

٢٦- * تؤثر القوة ق = ١٢ س - ٥ ص في المستقيم ٥س + ١٢ص + ٢٥ = ٠ أوجد متجه عزم هذه القوة حول النقطة أ (١ ، - ١)

الحل :

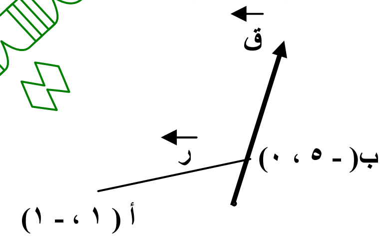
نفرض نقطة ب على المستقيم ٥س + ١٢ص + ٢٥ = ٠

وهى (نقطة تأثير القوة ق)

نضع ص = ٠

٥س + ٢٥ = ٠ ومنها س = -٥

النقطة ب (- ٥ ، ٠) هى نقطة تأثير القوة ق



جـ أ = ر × ق = أب × ق

= (-٦ ، ١) × (١٢ ، -٥)

= (٣٠ - ١٢) ع = ١٨ ع

....

عـــزوم القـــوى المســـــتوية

٢٧- * أغسطس ٩٩

أ ب جـ ء معين طول ضلعه ١٤ سم ، ق(أ) = ٦٠° ، أثرت القوى ١١ ، ٦ ، ٥ $\sqrt{3}$ ، ٧ نيوتن في أ ب ، ب جـ ، ء جـ ، أ جـ على الترتيب . أوجد المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول الرأس ب .

[١٥٤ نيوتن.سم]

....

٢٨- دور أول ٢٠١٣ مثال٧ المعاصر صـ١١٠-

أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ١٢ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٣٠ ، ٥٠ ، ٧٠ داين فى أب ، ب جـ ، أ جـ على الترتيب . أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول نقطة تلاقى متوسطات المثلث .

....

٢٩- مصر ٩٢

أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٦سم ، أثرت القوى ١٢ ، ١٠ ، ق ، ك نيوتن في أ ب ، جـ ب ، جـ ء ، أ ء على الترتيب . فإذا انعدم المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول كل من النقطتين جـ ، م حيث م مركز المستطيل فأوجد قيمة كل من ق ، ك .

[ك = ٩ ، ق = ٤٠/٣]

....

٣٠- أغسطس ٢٠٠٠

أ ب جـ ء هـ و شكل سداسي منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨٠ ، ٦٠ ، ق ، ٤٠ ث.جم في أ ب ، ب جـ ، جـ ء ، ء هـ على الترتيب . فإذا انعدم المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول الرأس أ فأوجد ق

[١٠ ث.جم]

....

٣١- **مصر ٩٣

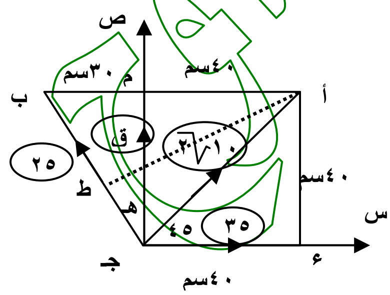
أ ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، ء فيه أ ء = جـ ء = ٤٠سم ، أ ب = ٧٠سم ، م ∋ أ ب بحيث أ م = ٤٠سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥ ، ق ، ١٠ $\sqrt{2}$ ، ٣٥ ث.جم في جـ ب ، جـ م ، جـ أ ، جـ ء على الترتيب ، وكان معيار محصلة هذه القوى يساوي ٥٠ ث.جم . أوجد ق ومعيار عزم المحصلة بالنسبة لنقطة أ

[١٠ث.جم ، ٤٠٠ث.جم.سم]

الحل :

أ ط = أ ب جا ب

= ٧٠ جا ب



ق١ = (٣٥ ، ٠)

ق٢ = (١٠ $\sqrt{2}$ ، ٤٥°)

ق٣ = (ق ، ٩٠°)

ق٤ = (٢٥ ، ٩٠° + هـ)

س = ٣٥ جتا٠° + ١٠ $\sqrt{2}$ جتا٤٥° + ق جتا٩٠° + ٢٥جتا(٩٠° + هـ)

= ٣٥ + ١٠ + ٠ - ٢٥ جاهـ = ٤٥ - ٢٥ × ٣٠/٥٠ = ٣٠

ص = ٣٥ جا٠° + ١٠ $\sqrt{2}$ جا٤٥° + ق جا٩٠° + ٢٥جا(٩٠° + هـ)

ص = ٠ + ١٠ + ق + ٢٥ جتاهـ = ١٠ + ق + ٢٥ × ٤٠/٥٠

= ق + ٣٠

ح² = س² + ص²

٢٥٠٠ = ٩٠٠ + (ق + ٣٠)^{٢}

١٦٠٠ = (ق + ٣٠)^{٢}

٤٠ = ق + ٣٠ ومنها ق = ١٠ث.جم

$\overleftarrow{ج}_{أ}$ = ٣٥ × ٤٠ ـ ق × ٤٠ ـ ٢٥ × أ ط

= ٣٥ × ٤٠ ـ ١٠ × ٤٠ ـ ٢٥ × ٧٠ × $\frac{٤٠}{٥٠}$ = ـ ٤٠٠ ث.جم سم

....

٣٢ـ * مثال ١٠ محلول المعاصر صـ١١٣ـ

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ١٦سم . أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ في مستوى المثلث وكان عزم $\overleftarrow{ق}$ حول أ = عزمها حول جـ = ـ ٧٢ نيوتن.سم وكان عزم ق حول ب = ٧٢ نيوتن.سم عين مقدار واتجاه وخط عمل $\overleftarrow{ق}$

[١٥ نيوتن وتنصف كل من $\overleftarrow{أ ب}$، $\overleftarrow{ب جـ}$ وفي اتجاه $\overleftarrow{أ جـ}$]

....

محصلة قوتين متوازيتين

٣٣ـ قوتان متوازيتان مقدارهما ٤٠ ، ٧٠ نيوتن تؤثران في أ ، ب على الترتيب حيث أ ب = ٥٠سم . أوجد محصلتهما إذا كانتا

(١) في اتجاه واحد [ح = ١١٠ ، على بعد $\frac{٢٠٠}{١١}$ سم من ب]

(٢) في اتجاهين متضادين [ح=٣٠على بعد $\frac{٢٠٠}{٣}$ سم من ب]

....

٣٤ـ قوتان متوازيتان صغراهما ٣٠ نيوتن وتؤثر في الطرف أ من قضيب خفيف $\overline{أ ب}$ والكبرى تؤثر في الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠سم . فما طول القضيب .

[٣٠ سم]

....

٣٥ـ أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقط على خط مستقيم واحد حيث أن أ ب = ٣٢سم ، ب جـ = ٤٠سم ، جـ ء = ٨سم . أثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن في أ ، جـ ، وأثرت في ب ، ء القوتان ٧ ، ٣ نيوتن في اتجاه مضاد لاتجاه القوتين المؤثرتين في أ ، جـ . عين محصلة هذه المجموعة من القوى وبعد نقطة تقاطع خط عملها مع $\overline{أ ء}$ عن نقطة أ .

[عند نقطة ∋ $\overleftrightarrow{أ ء}$ وعلى بعد ٣٢سم من أ]

....

٣٦ـ مصر ٩٢

قوتان متوازيتان مقدارهما ق ، ٣٦ نيوتن ومحصلتهما ٨٤ نيوتن تعمل في اتجاه مضاد للقوة الثانية وعلى بعد ٣٠سم منها . أوجد ق والبعد بين خطي عمل القوتين . [١٢٠نيوتن ، ٢١سم]

....

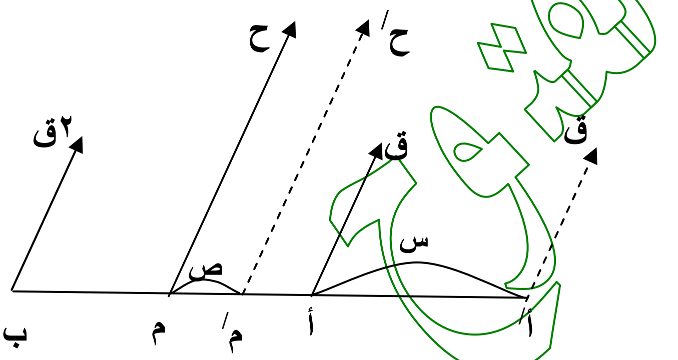
٣٧ـ مصر ٩١

$\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه تؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب ، ق$_{١}$ > ق$_{٢}$ إذا كانت محصلتهما قوة معيارها ٩٠ ث.كجم وتؤثر في النقطة جـ ∋ $\overleftrightarrow{أ ب}$ حيث أ ب = ٣٦سم ، أ جـ = ١٦سم فأوجد ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$

[١٣٠ ، ٤٠ ث.كجم]

....

٣٨ـ ** قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقدارهما ق ، ٢ق تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب . فإذا تحركت القوة ق بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها س على الشعاع $\overrightarrow{ب أ}$ فاثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٣}$ س فى نفس الاتجاه



المطلوب : اثبات أن : ص = $\frac{١}{٣}$ س

الاثبات : القوتان ق ، ٢ق المؤثرتان في أ ، ب محصلتهما ح = ٣ق تؤثر في م

مجموع عزوم القوى حول ب = عزم المحصلة حول ب

ق× ب أ = ٣ق × ب م ⟸ ب أ = ٣ ب م .... (١)

بعد إزاحة القوة ق إلى نقطة أ/ تنتقل المحصلة إلى نقطة م/

مجموع عزوم القوى حول ب = عزم المحصلة حولب

ق × ب أ/ = ٣ق × ب م/ ⟸ ب أ/ = ٣ ب م/ .... (٢)

بطرح (١) من (٢) ب أ/ ـ ب أ= ٣(ب م/ ـ ب م)

س = ٣ ص ومنها ص = $\frac{١}{٣}$ س

توازن مجموعة من القوى المتوازية المستوية

٣٩ـ مايو ٢٠٠٢

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب طوله متر واحد ووزنه ٧٠٠ث.جم (يؤثر عند منتصفه) يرتكز على حامل عند طرفه ب وحفظ في حالة توازن في وضع أفقي بواسطة خيط خفيف رأسي مثبت في نقطة على القضيب تبعد عن الطرف أ بمقدار ٣٠سم ويحمل ثقلا مقداره ٣٥٠ ث.جم من نقطة تبعد ١٠سم عن أ . أوجد كلا من الشد في الخيط والضغط على الحامل . وإذا علق من أ ثقلا جعل القضيب على وشك الانفصال عن الحامل . أوجد مقدار هذا الثقل وقيمة الشد في الخيط عندئذ

[أولا : ش = ٩٥٠ث.جم، ر = ١٠٠ث.جم]

[ثانيا : مقدارالثقل = $\frac{١}{٣}$٢٣٣ث.جم، ش = $\frac{١}{٣}$١٢٣٨ ث.جم]

....

٤٠- أغسطس٩٩

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب طوله ١٤٠سم ووزنه ٦ نيوتن (يؤثر عند منتصفه) علق في وضع أفقي بواسطة خيطين رفيعين رأسيين من طرفيه . على أي بعد من طرفه أ يمكن تعليق ثقل مقداره ١٤نيوتن من احدى نقط القضيب لكي يكون مقدار الشد في الخيط عند أ ضعف مقداره عند ب .

[٢٠سم من أ]

....

٤١- أغسطس٩٦

$\overline{\text{أ ب}}$ مسطرة طولها ١٠٠سم ووزنها (و) نيوتن يؤثر في منتصفها . علقت في وضع أفقي بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيها . أين يعلق ثقل مقداره (٥و) نيوتن حتى يكون مقدار الشد في أحد الخيطين ضعف مقداره في الخيط الآخر

[على بعد ٣٠سم من أى من الطرفين]

....

٤٢- مايو٢٠٠٠

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب غير منتظم طوله ٣٠سم يرتكز في وضع أفقي على حاملين عند جـ ، ء حيث أ جـ = جـ ء = ء ب . ووجد أنه إذا علق من أ ثقل قدره ٦ث.كجم فإن القضيب يصبح على وشك الدوران حول جـ ، وإذا علق من ب ثقل قدره ٩ث،كجم لأصبح القضيب على وشك الدوران حول ء . أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثيره عن أ .

[١٥ث.كجم ، ١٤سم]

....

٤٣- **$\overline{\text{ق}}_{١}$ ، $\overline{\text{ق}}_{٢}$ ، $\overline{\text{ق}}_{٣}$ ثلاث قوى متوازية ومتزنة تؤثر في النقط أ = (-١ ، ٣) ، ب = (٣ ، ١) ، جـ = (٥ ، ٠) على الترتيب فإذا كانت $\overline{\text{ق}}_{١}$ = ٤ $\overline{\text{س}}$ - $\overline{\text{ص}}$ أوجد $\overline{\text{ق}}_{٢}$ ، $\overline{\text{ق}}_{٣}$

الحل :

$\overline{\text{ق}}_{٢}$ // $\overline{\text{ق}}_{١}$ ⟸ $\overline{\text{ق}}_{٢}$ = ك $\overline{\text{ق}}_{١}$

$\overline{\text{ق}}_{٢}$ = ك (٤ ، - ١)

$\overline{\text{ق}}_{٣}$ // $\overline{\text{ق}}_{١}$ ⟸ $\overline{\text{ق}}_{٣}$ = م $\overline{\text{ق}}_{١}$

$\overline{\text{ق}}_{٣}$ = م (٤ ، - ١)

المجموعة متزنة $\overline{\text{ح}}$ = $\overline{٠}$

$\overline{\text{ق}}_{١}$ + $\overline{\text{ق}}_{٢}$ + $\overline{\text{ق}}_{٣}$ = $\overline{٠}$

(٤ ، - ١) + ك (٤ ، - ١) + م(٤ ، - ١) = (٠ ، ٠)

٤ + ٤ ك + ٤ م = ٠

ك + م = - ١ .... (١)

المجموعة متزنة $\overline{\text{ج}}_{\text{و}}$ = $\overline{٠}$ حيث و نقطة الأصل

$\overline{\text{و أ}}$ × $\overline{\text{ق}}_{١}$ + $\overline{\text{و ب}}$ × $\overline{\text{ق}}_{٢}$ + $\overline{\text{و جـ}}$ × $\overline{\text{ق}}_{٣}$ = $\overline{٠}$

(- ١ ، ٣)×(٤ ، -١) + (٣ ، ١)×(٤ك ، - ك) + (٥ ، ٠)×(٤م ، - م) = $\overline{٠}$

(١ - ١٢) $\overline{\text{ع}}$ + (- ٣ك - ٤ك) $\overline{\text{ع}}$ + (- ٥م - ٠) $\overline{\text{ع}}$ = $\overline{٠}$

- ١١ - ٧ك - ٥م = ٠

٧ك +٥م = - ١١ .... (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

٢ك = - ٦ ومنها ك = - ٣ ، م = ٢

$\overline{\text{ق}}_{٢}$ = ك (٤ ، - ١) = (- ١٢ ، ٣) = - ١٢ $\overline{\text{س}}$ + ٣ $\overline{\text{ص}}$

$\overline{\text{ق}}_{٣}$ = م (٤ ، - ١) = (٨ ، - ٢) = ٨ $\overline{\text{س}}$ - ٢ $\overline{\text{ص}}$

....

٤٤- مايو٩٦

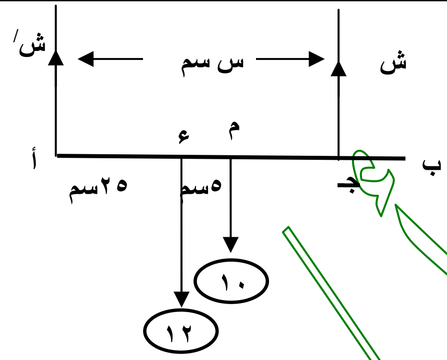
$\overline{\text{أ ب}}$ ساق حديدية طولها ٩٠سم ، ووزنها ١.٢ ث.كجم يؤثر في منتصفها ، ترتكز في وضع أفقي على حاملين ، أحدهما عند الطرف أ . إذا كان مقدار الضغط على الحامل عند أ يساوي ٠.٣ث،كجم ، فبين أن الحامل الآخر يجب أن يوضع على بعد ٣٠سم من الطرف ب . ثم أوجد مقدار الثقل الذي يجب تعليقه من الطرف ب حتى تكون الساق على وشك الدوران .

[٠.٦ث.كجم]

....

٤٥- *** قضيب منتظم $\overline{\text{أ ب}}$ طوله ٦٠سم ووزنه ١٠ث.جم ويؤثر عند منتصفه ، معلق في وضع أفقي بواسطة خيطين رأسيين أحدهما مربوط في نقطة أ والآخر في نقطة جـ حيث أ جـ = س سم ، علق ثقل قدره ١٢ ث.جم في نقطة ء حيث أ ء = ٢٥سم . فإذا كان أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ث.جم ، فأوجد القيم التي تقع بينهما س ، وأوجد أيضا أكبر وأقل قيمة للشد في كل من الخيطين

الحل :



ح = ٠

ش + ش/ = ٢٢ .... (١)

جـ أ = ٠

ش س − ١٠ × ٣٠ − ١٢ × ٢٥ = ٠

ش × س = ٦٠٠ .... (٢)

الشد ش يتناسب عكسيا مع س

نفرض أن ش = ١٥ ث.جم وهو أكبر قيمة للشد عند جـ

بالتعويض فى (١)

١٥ + ش/ = ٢٢ ومنها ش/ = ٧ وهى أقل قيمة للشد عند أ

عندئذ ١٥س = ٦٠٠ ومنها س = ٤٠سم

عندما جـ تنطبق على ب تكون س أكبر ما يمكن

(س = ٦٠سم) ويكون الشد عند جـ فى هذه الحالة أقل ما يمكن

عندئذ ٦٠ش = ٦٠٠ ومنها ش = ١٠ث.جم

بالتعويض فى (١) ١٠ + ش/ = ٢٢

ش/ = ١٢ وهى أكبر قيمة للشد عند أ

من الحل نستنتج أن س ∈ [٤٠ ، ٦٠]

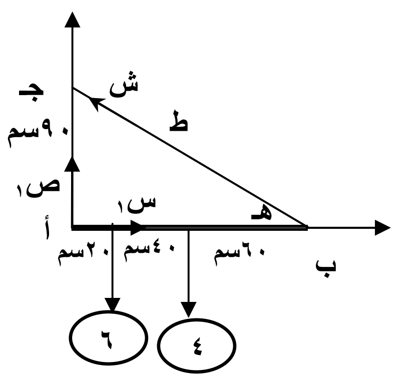
....

الاتزان العـــــام

٤٦- $\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم وزنه ٤ثقل كجم وطوله ١٢٠سم يتصل بأحد طرفيه بمفصل مثبت عند طرفه أ والمفصل مثبت فى حائط رأسى . علق ثقل قدره ٦ ثقل كجم من نقطة على القضيب تبعد ٢٠سم عن طرفه أ ثم حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة ربطه من ب بحبل رفيع $\overline{\text{ب جـ}}$ مثبت طرفه جـ بنقطة على الحائط تقع رأسيا فوق أ تماما وتبعد عن أ مسافة ٩٠سم أوجد :

١- مقدار الشد فى الحبل

٢- مقدار واتجاه قوة رد فعل المفصل



مركبة الشد فى اتجاه السينات السالب = ش جتاهـ

مركبة الشد فى اتجاه الصادات لأعلى = ش جاهـ

س = ٠

س١ = ش جتاهـ = $\frac{٤}{٥}$ ش .... (١)

ص = ٠

ص١ + ش جاهـ = ٤ + ٦

ص١ + $\frac{٣}{٥}$ ش = ١٠ .... (٢)

جـ ب = ٠

٤ × ٦٠ + ٦ × ١٠٠ − ص١ × ١٢٠ = ٠

ص١ = ٧ث.كجم بالتعويض فى (٢)

٧ + $\frac{٣}{٥}$ ش = ١٠ ومنها ش = ٥ث.كجم بالتعويض فى (١)

س١ = $\frac{٤}{٥}$ × ٥ = ٤ث.كجم

ر = $\sqrt{\text{س١}^{٢} + \text{ص١}^{٢}}$ = $\sqrt{٦٥}$

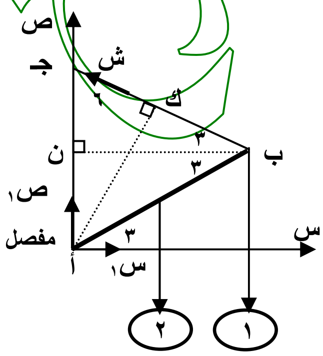
ظا ل = $\frac{\text{ص١}}{\text{س١}}$ = $\frac{٧}{٤}$ ومنها ل = ١٥َ ٦٠ْ

....

٤٧- $\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم وزنه ٢ نيوتن يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه ب ثقلا قدره نيوتن واحد . حفظ القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠ بواسطة حبل مساوٍ للقضيب فى الطول ، يتصل أحد طرفيه بالطرف ب للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة جـ من الحائط تقع رأسيا أعلى أ وعلى بعد منها يساوى طول القضيب . أوجد :

١- مقدار الشد فى الحبل

٢- مقدار قوة رد فعل المفصل عند أ



س = ٠

س١ = ش جا٦٠ْ .... (١)

ص = ٠

ص١ + ش جتا٦٠ْ = ٣ .... (٢)

جـ أ = ٠

ش × ل جا٦٠ − ٢ × $\frac{١}{٢}$ ل جتا ٣٠ − ١ ل جتا ٣٠ = ٠

ش = ٢ نيوتن بالتعويض فى (١) ثم (٢)

س١ = $\sqrt{٣}$ نيوتن

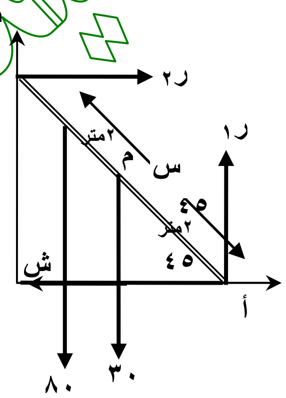
ص١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ٣ ومنها ص١ = ٢نيوتن

مقدار قوة رد الفعل ر = $\sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢} = \sqrt{٧}$ نيوتن

....

٤٨ـ $\overline{أ ب}$ سلم منتظم وزنه ٣٠ ثقل كجم وطوله ٤ أمتار يرتكز بطرفه أ على مستو أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس . حفظ السلم فى مستو رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥ بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى تقع رأسيا أسفل ب تماما ، فإذا صعد رجل وزنه ٨٠ ثقل كجم على هذا السلم فأثبت أن مقدار الشد فى الحبل يزداد كلما صعد الرجل .
وإذا كان الحبل لا يتحمل شدا يزيد مقداره على ٦٧ ثقل كجم فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعدها الرجل دون أن ينقطع الحبل .

الحل :



نفرض أن الرجل صعد مسافة س متر

سـ = ٠

$ر_٢$ = ش .... (١)

صـ = ٠

$ر_١$ = ١١٠ .... (٢)

$ج_أ$ = ٠

٣٠ × ٢ جتا٤٥ + ٨٠ × س جتا٤٥ - $ر_٢$ × ٤ جا٤٥ = ٠

٦٠ + ٨٠ س – ٤ ش = ٠

ش = ١٥ + ٢٠ س ش تزداد بزيادة س

أى أن الشد يزدادا كلما صعد الرجل على السلم

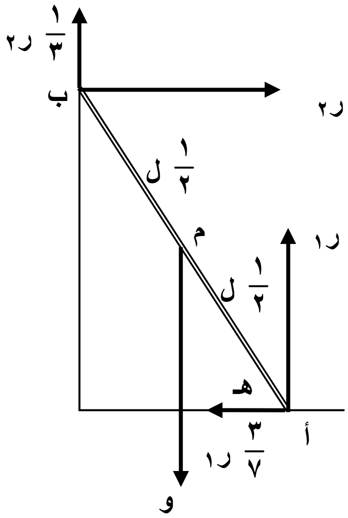
عندما ش = ٦٧

٦٧ = ١٥ + ٢٠ س ومنها س = ٢.٦متر

....

٤٩ـ $\overline{أ ب}$ سلم منتظم وزنه و يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة ويرتكز بطرفه ب على حائط رأسى خشن بحيث يقع السلم فى مستو رأسى ويميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإذا علم أن معامل الاحتكاك بين السلم والأرض يساوى $\frac{٣}{٧}$ وبين السلم والحائط يساوى $\frac{١}{٣}$ فأوجد قياس زاوية ميل السلم على الأرض فى الحالة التى يكون فيها السلم على وشك الانزلاق .

الحل :



سـ = ٠

$ر_٢ = \frac{٣}{٧} ر_١$ .... (١)

$ر_١ + \frac{١}{٣} ر_٢$ = و .... (٢)

$ر_١ + \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٧} ر_١$ = و ومنها $ر_١ = \frac{٧}{٨}$ و

بالتعويض فى (١) $ر_٢ = \frac{٣}{٨}$ و

$ج_أ$ = ٠

و × $\frac{١}{٢}$ ل جتا هـ - $\frac{١}{٣}$ $ر_٢$ × ل جتا هـ - $ر_٢$ × ل جا هـ = ٠

$\frac{١}{٢}$ و ل جتا هـ - $\frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٨}$ و ل جتا هـ - $\frac{٣}{٨}$ و ل جا هـ = ٠

$\frac{٣}{٨}$ و ل جتا هـ = $\frac{٣}{٨}$ و ل جا هـ

جتا هـ = جا هـ ⇐ ظا هـ = ١ ومنها هـ = ٤٥°

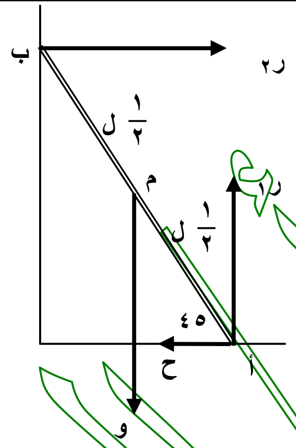
....

٥٠ـ $\overline{أ ب}$ سلم منتظم وزنه (و) يستند بطرفه ا على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع السلم فى مستو رأسى ويميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥ فإذا كان السلم متزنا فأثبت أن :

١ـ معامل الاحتكاك بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{١}{٢}$

٢ـ إذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\frac{٢}{٣}$ فإن مقدار القوة الأفقية التى تؤثر عند أ وتجعله على وشك الحركة نحو الحائط تعادل $\frac{٦}{٧}$ و

الحل :



سـ = ٠

ر٢ = ح .... (١)

ص = ٠

ر١ = و .... (٢)

ج أ = ٠

و × $\frac{1}{2}$ ل جتا٤٥ ـ ر٢ × ل جا٤٥ = ٠

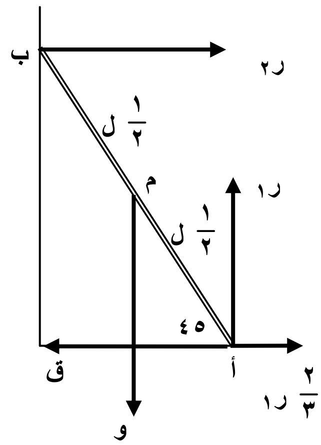
ر٢ = $\frac{1}{2}$ و ومنها ح = $\frac{1}{2}$ و

ح ≤ م ر١

$\frac{1}{2}$ و ≤ م و م ≥ $\frac{1}{2}$

معامل الاحتكاك بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{1}{2}$

ثانيا :



سـ = ٠

ر٢ + $\frac{2}{3}$ ر١ = ق .... (١)

ص = ٠

ر١ = و .... (٢)

ج أ = ٠

و × $\frac{1}{2}$ ل جتا٤٥ ـ ر٢ × ل جا٤٥ = ٠

ر٢ = $\frac{1}{2}$ و .... (٣)

بالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١)

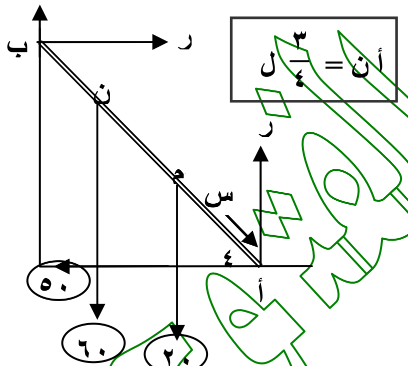
$\frac{1}{2}$ و + $\frac{2}{3}$ و = ق بالضرب فى ٦

٣ و + ٤ و = ٦ ق ومنها ق = $\frac{7}{6}$ و

....

٥١- أ ب سلم مقدار وزنه ٢٠ ث . كجم يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقي أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس . حفظ السلم على مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقي يصل الطرف أ بنقطة من المستوى تقع رأسيا أسفل ب ولايتحمل شد أكبر من ٥٠ ث . كجم . صعد رجل وزنه ٦٠ ث . كجم على السلم فلما قطع مسافة $\frac{3}{4}$ طوله وجد أن الحبل على وشك الانقطاع عين نقطة على السلم التى يؤثر عندها وزنه .

الحل :



نفرض أن الوزن يؤثر في نقطة م والتي تبعد عن أ مسافة س

ر٢ = ٥٠ ، ر١ = ٢٠ + ٦٠ = ٨٠

ج أ = صفر

٢٠س جتا٤٥ + ٦٠ × $\frac{3}{4}$ ل جتا٤٥ = ر٢ ل جا٤٥

٢٠س + ٤٥ ل = ٥٠ل

٢٠س = ٥ل ⇐ س = $\frac{1}{4}$ ل

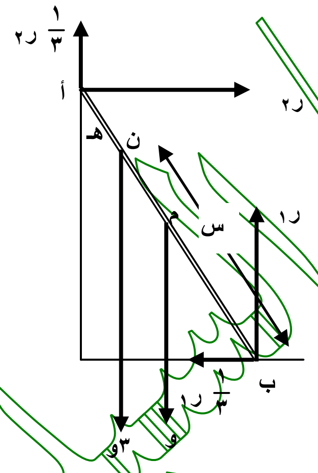
الوزن يؤثر عند نقطة م التي تبعد عن أ مسافة تعادل $\frac{1}{4}$ طول السلم

....

٥٢- يستند سلم منتظم بأحد طرفيه على حائط رأسي معامل الاحتكاك بينه وبين السلم يساوي $\frac{1}{3}$ ، وبطرفه الآخر على أرض أفقية من نفس خشونة الحائط . فاذا اتزن السلم في مستوى راسي في وضع يميل فيه على الحائط بزاوية ظلها $\frac{6}{11}$ ، برهن على ان رجلا وزنه يساوي

ثلاثة امثال وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{٧}{١٠}$ طول السلم دون أن ينزلق الأخير .

الحل :



معادلتى الاتزان

ر١ + $\frac{١}{٣}$ ر٢ = ٤ و .... (١)   ،   ر٢ = $\frac{١}{٣}$ ر١ ..... (٢)

ر١ + $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٣}$ ر١ = ٤ و $\frac{١٠}{٩}$ ر١ = ٤ و

ر١ = ٣.٦ و   بالتعويض فى (٢)   ر٢ = ١.٢ و

ج ب = صفر

و × $\frac{١}{٢}$ ل جاهـ + ٣و س جا هـ - $\frac{١}{٣}$ ر٢ ل جاهـ - ر٢ ل جتاهـ = ٠

$\frac{١}{٢}$ و ل جاهـ + ٣و س جا هـ - ٠.٤ و ل جاهـ - ١.٢ و ل جتاهـ = ٠

بالقسمة على و جاهـ

٣ س = ٠.٤ ل + ١.٢ ل × $\frac{١١}{٦}$ - $\frac{١}{٢}$ ل

٣ س = ٢.١ ل   ومنها   س = ٠.٧ ل

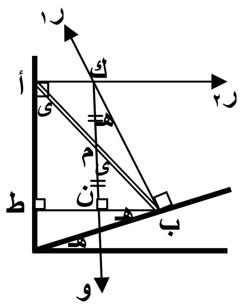
المسافة التي يصعدها الرجل على السلم لاتزيد عن $\frac{٧}{١٠}$ طول السلم

٥٣- حل بنفسك   دور أول ٢٠١٣

قضيب منتظم مقدار وزنه ٥٠ نيوتن يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٣}$ ، وبطرفه الآخر على أرض أفقية معامل الاحتكاك بينها وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وكان القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{٣}{٥}$ أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر فى الطرف السفلى للقضيب وتجعله على وشك الحركة نحو الحائط .

٥٤- **في الشكل المقابل : أ ب سلم منتظم يرتكز بطرفه العلوي أ على حائط راسي أملس ، وبطرفه السفلي ب على مستوى أملس يميل على الافقي بزاوية قياسها (هـ) . فاذا كان السلم يميل على الحائط بزاوية قياسها (ي) فأثبت أن : طا ي = ٢طاهـ

الحل :



ظاى = $\frac{ب ن}{ن م}$ .... (١)

ظاهـ = $\frac{ب ن}{ن ك}$ = $\frac{ب ن}{٢ م ن}$ بالضرب × ٢

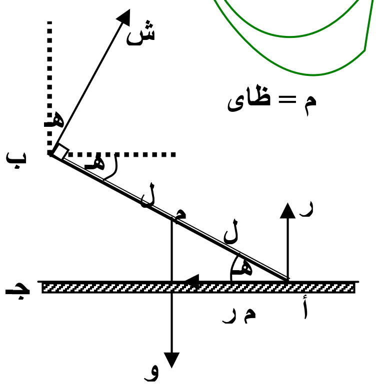
٢ظاهـ = $\frac{ب ن}{ن م}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن   ظاى = ٢ظاهـ

٥٥- ** أ ب قضيب منتظم يرتكز بطرفه أ على ارض أفقيه خشنه ، قياس زاوية الاحتكاك بينهما (ي) واتزن القضيب في وضع يميل فيه على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) بواسطة خيط عمودي على القضيب مثبت في نقطة ب وكان القضيب والخيط في مستوى رأسي واحد اثبت أن : ظاى = $\frac{جا٢هـ}{٣ - جتا٢هـ}$

الحل :

م = ظاى



صــــ = ٠

ش جتاهـ + ر = و   ومنها   ر = و – ش جتا هـ ..... (١)

ســــ = ٠

ش جاهـ = م ر .... (٢)

ش جاهـ = م (و – ش جتاهـ)

ش (جاهـ + م جتاهـ) = م و

ش = $\frac{م و}{جاهـ + م جتاهـ}$ .... (١)

ج أ = صفر

و ل جتاهـ - ش × ٢ل = ٠

ش = $\frac{\text{و جتاهـ}}{٢}$ .... (٢) بالتعويض في (١)

$\frac{\text{و جتاهـ}}{٢}$ = $\frac{\text{م و}}{\text{جاهـ + م جتاهـ}}$

٢ م = جاهـ جتاهـ + م جتا^{٢} هـ

م (٢ – جتا^{٢} هـ) = جاهـ جتاهـ ....بالضرب فى ٢

م (٤ – ٢جتا^{٢} هـ) = ٢ جاهـ جتا هـ

م (٣ + ١ – ٢جتا^{٢} هـ) = جا٢هـ

م(٣ – جتا٢هـ) = جا٢هـ

م = $\frac{\text{جا٢هـ}}{\text{٣ - جتا٢هـ}}$ ومنها ظاى = $\frac{\text{جا٢هـ}}{\text{٣ - جتا٢هـ}}$

٥٦- حل بنفسك

أب ساق منتظمة وزنها ٥ثقل كجم وطولها ٣٠ سم ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة وترتكز عند إحدى نقطها جـ على وتد أملس يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٢ $\frac{١}{٢}$ سم فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠ فأوجد :

١- مقدار قوة رد فعل الوتد

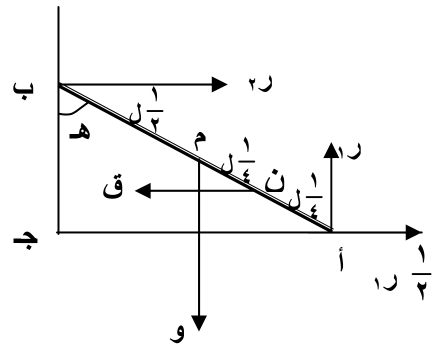
٢- معامل الاحتكاك بين طرف الساق أ والأرض.

[ر = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ، م = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$]

٥٧-

أ ب قضيب منتظم طوله (ل) ومقدار وزنه (و) ويرتكز بطرفه أ على مستوى افقي خشن وبطرفه ب على حائط راسي أملس وكان القضيب يميل بزاوية قياسها (هـ) على الرأسى أثرت قوة افقيه ق على القضيب عند النقطة ن حيث أ ن = $\frac{١}{٤}$ ل فكان الطرف أ على وشك الحركة نحو الحائط . اثبت أنه إذا كان معامل الاحتكاك يساوي $\frac{١}{٢}$ فان : ق = $\frac{٢}{٣}$ و (١ + ظا هـ)

الحل :



ق = $\frac{١}{٢}$ ر١ + ر٢ ، ر١ = و

ق = $\frac{١}{٢}$ و + ر٢ ومنها ر٢ = ق - $\frac{١}{٢}$ و

ج أ = صفر

ق × $\frac{١}{٤}$ ل جتاهـ + و × $\frac{١}{٢}$ ل جاهـ = ر٢ × ل جتاهـ

ق × $\frac{١}{٤}$ ل جتاهـ + $\frac{١}{٢}$ و ل جاهـ = (ق - $\frac{١}{٢}$ و) ل جتاهـ

$\frac{١}{٤}$ ق جتاهـ + $\frac{١}{٢}$ و جاهـ = ق جتاهـ - $\frac{١}{٢}$ و جتاهـ

$\frac{١}{٢}$ وجاهـ + $\frac{١}{٢}$ و جتاهـ = $\frac{٣}{٤}$ ق جتاهـ بالقسمة على جتاهـ

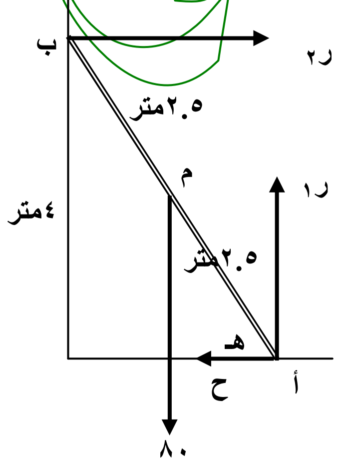
$\frac{٣}{٤}$ ق = $\frac{١}{٢}$ و ظاهـ + $\frac{١}{٢}$ و بالضرب × $\frac{٤}{٣}$

ق = $\frac{٢}{٣}$ و ظاهـ + $\frac{٢}{٣}$ و

ق = $\frac{٢}{٣}$ و (١ + ظاهـ)

٥٨- أب سلم منتظم طوله ٥متر ووزنه ٨٠ ثقل كجم يستند بطرفه ا على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينها وبين السلم $\frac{١}{٤}$ ويرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس . أثبت أن السلم لايمكن أن يتزن عندما يكون الطرف ب على بعد ٤ متر من سطح الأرض . ثم أوجد مقدار أصغر وزن لجسم يوضع على الأرض عند طرف السلم أ حتى يمنعه من الانزلاق علما بأن معامل الاحتكاك بين الأرض والجسم $\frac{٢}{٣}$

الحل :



ر٢ = ح

ر١ = ٨٠

ج أ = ٠

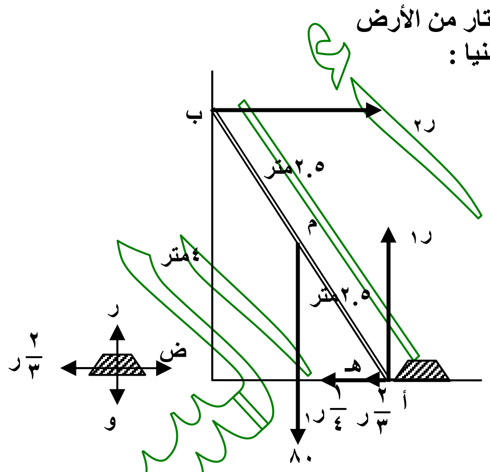
٨٠ × ١.٥ - ر٢ × ٤ = ٠ ومنها ر٢ = ٣٠

ح = ٣٠

$م\, ر_١ = \frac{١}{٤} \times ٨٠ = ٢٠$

ح > م ر١ السلم لايمكن أن يتزن إذا كان الطرف ب على بعد ٤ أمتار من الأرض

ثانيا :



$\sum س = ٠$

$ر_٢ = \frac{٢}{٣} ر + \frac{١}{٤} ر_١$ .... (١)

$\sum ص = ٠$

$ر_١ = ٨٠$ .... (٢)

$\sum ج_أ = ٠$

$٨٠ \times ١.٥ - ر_٢ \times ٤ = ٠$ ومنها $ر_٢ = ٣٠$

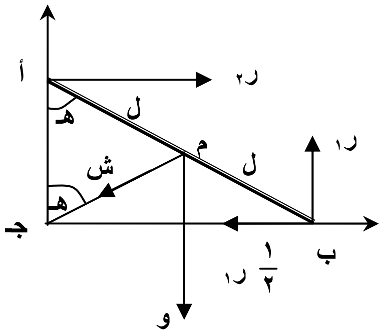
$٣٠ = \frac{٢}{٣} ر + \frac{١}{٤} \times ٨٠$

$١٠ = \frac{٢}{٣} ر$ ومنها ر = ١٥ و = ١٥نيوتن

....

٥٩- ** $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ ل ومقدار وزنه (و) يرتكز بطرفه أ على حائط راسي املس وبطرفه ب على مستوى افقي خشن حيث معامل الاحتكاك = $\frac{١}{٢}$ ربط أحد طرفي خيط خفيف طوله (ل) في منتصف القضيب وربط طرفه الاخر بقاعدة الحائط راسيا اسفل أ . اذا كان القضيب يميل بزاوية قياسها (هـ) على الرأسي عندما كان الطرف ب على وشك الانزلاق بعيدا عن الحائط ويقع في المستوى الراسي العمودي على خط تقاطع الحائط بالارض . فاثبت أن الشد في الخيط عندئذ يساوي $\frac{جاهـ - جتاهـ}{جتا^٢هـ} \times و$ ، وأن رد فعل الحائط عند أ يساوي $\left[\frac{٢\,جا^٢هـ - جاهـ\, جتاهـ}{٢\, جتا^٢هـ}\right] و$

الحل :



مركبة الشد ش فى اتجاه السينات السالب = ش جاهـ

مركبة الشد ش فى اتجاه الصادات السالب = ش جتاهـ

$\sum ص = ٠$ أى $ر_١ = و + ش\, جتاهـ$ ...... (١)

$\sum س = ٠$ أى $ر_٢ = \frac{١}{٢} ر_١ + ش\, جاهـ$

$ر_٢ = \frac{١}{٢}(و + ش\, جتاهـ) + ش\, جاهـ$ ..... (٢)

$\sum ج_{ـ} = ٠$

$ر_١ \times ٢ل\, جاهـ - و \times ل\, جاهـ - ر_٢ \times ٢ل\, جتاهـ = ٠$

$٢ر_١\, جاهـ - و\, جاهـ - ٢ر_٢\, جتاهـ = ٠$ .... (٣)

بالتعويض من (١) ، (٢) فى (٣)

$٢(و + ش\, جتاهـ) \times جاهـ - و\, جاهـ - ٢\, جتاهـ\,(\frac{١}{٢} و + \frac{١}{٢} ش\, جتاهـ + ش\, جاهـ) = ٠$

$٢و\, جاهـ + ٢ش\, جاهـ\, جتاهـ - و\, جاهـ - و\, جتاهـ - ش\, جتا^٢هـ - ٢ش\, جاهـ\, جتاهـ = ٠$

$و\, جاهـ - و\, جتاهـ = ش\, جتا^٢هـ$

$ش = \frac{و\, جاهـ - و\, جتاهـ}{جتا^٢هـ} = \frac{جاهـ - جتاهـ}{جتا^٢هـ} \times و$ وهو المطلوب أولا

من (٢)

$ر_٢ = \frac{١}{٢} و + \frac{١}{٢} ش\,(جتاهـ + ٢جاهـ)$

$= \frac{١}{٢} و + \frac{١}{٢}\left[\frac{(جاهـ - جتاهـ)(جتاهـ + ٢جاهـ)}{جتا^٢هـ}\right] و$

$= \frac{١}{٢} و \left[١ + \frac{(جاهـ - جتاهـ)(جتاهـ + ٢جاهـ)}{جتا^٢هـ}\right]$

$= \frac{١}{٢} و \left[\frac{جتا^٢هـ + ٢جا^٢هـ - جتا^٢هـ - جاهـ\, جتاهـ}{جتا^٢هـ}\right]$

$ر_٢ = \left[\frac{٢\,جا^٢هـ - جاهـ\, جتاهـ}{٢\, جتا^٢هـ}\right] و$

....

الازدواج

٦٠- مصر ٩١

أ ب جـ صفيحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه ١٨سم ، ووزنها ١٥٠ث.جم ويؤثر عند نقطة تلاقي متوسطات المثلث ، والصفيحة مثقوبة ثقبا صغيرا بالقرب من الرأس أ ومعلقة من هذا الثقب في مسمار أفقي بحيث يكون مستواها رأسيا ، أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٩٠٠ث.جم.

سم في مستويها . أوجد ميل أب على الأفقي في حالة التوازن . [٩٠° أو ٣٠°]

٦١- مصر ٩٣

صفيحة على شكل مربع أ ب جـ ء طول ضلعه ٨٠سم ، ووزنها ٢٥٠ث.جم يؤثر في نقطة تلاقي القطرين . علقت الصفيحة من مسمار في ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستويها رأسيا ، وأثر عليها ازدواج في مستويها فاتزنت في وضع يميل فيه أجـ على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠° . عين معيار عزم الازدواج [٥٠٠٠√٢]

٦٢- * السودان ٩٢ مثال ٧ المعاصر صـ٢٠٨

أب قضيب منتظم طوله ١٢٠سم ووزنه ٤ث.كجم يؤثر عند منتصفه يمكنه الدوران بسهولة في مستوى رأسي حول مسمار أفقي ثابت يمر بثقب صغير في القضيب على بعد ٢٠سم من ب . فإذا استند القضيب بطرفه أ على مستوى أفقي أملس فأوجد رد فعل كل من المستوى الأفقي والمسمار على القضيب . وإذا شد الطرف ب بقوة عمودية على القضيب وفي نفس المستوى الرأسي حتى أصبح رد فعل المستوى الأفقي مساويا وزن القضيب فأوجد هذه القوة ومقدار واتجاه رد فعل المسمار عندئذ . علما بأن القضيب يميل فيه على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° .

[١.٦ ، ٢.٤ث.كجم ، ق = ر = ٦√٣ ث.كجم وعموديتان على القضيب]

٦٣- مايو ٩٨

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ فيه أ ب = ٩سم ، أ جـ = ١٢سم . أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٤ نيوتن في أب ، ب جـ ، جـ أ على الترتيب . اثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران في أ ، ب وعموديتين على أب وتكافئان المجموعة . [٣٦ ، ٤ ، ٤]

٦٤- أغسطس ٩٦

أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ٨سم . أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٨ ، ٣ ، ٨ ث.كجم أب ، جـ ب ، ءهـ ، و هـ على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا واحسب معيار عزمه . [٤٠√٣ ث.كجم.سم]

٦٥- مايو ٩٧ – مايو ٢٠٠١

أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ٨سم ، ق (ء أ ب) = ٦٠° أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ١٠ ، ٦ ، ١٠ ث.كجم في أب ، جـ ب ، جـ ء ، أ ء على الترتيب اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه . [٣٦√٣ ث.كجم.سم]

٦٦- * مايو ٢٠٠٢

أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ، س ، ص منتصفي ب جـ ، أ ء على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٣٦ ، ٤٥ نيوتن في أب ، ب س ، س أ على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران في ب ص ، ء س حتى تتزن المجموعة

[||ج||=٨٢٤نيوتن.سم ، قيمة كل من القوتين = ٤٥نيوتن]

٦٧- أغسطس ٩٨

أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم . أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٧ ث.جم في أب ، ب جـ ، جـ ء ، ء أ على الترتيب . اثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد مقدار واتجاه قوتين تعملان عند النقطتين أ ، جـ عموديتين على أجـ بحيث تتزن المجموعة [٩٠وحدة عزم ، ٩ ، ٩ث.جم]

٦٨- مصر ٩٥ :

أ ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية في ب ، أء // ب جـ ، أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٢ أء = ٢٤سم ، هـ منتصف ب جـ . أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٧٢ ، ٤٥ ، ٣٦ نيوتن في أب ، ب جـ ، جـ ء ، ء أ على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه . أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران في هـ أ ، ء جـ حتى تتزن المجموعة . [٩٧٢ نيوتن.سم ، ١٣٥ ، ١٣٥نيوتن]

٦٩- أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفا ب جـ ، أء على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٧٢ ، ٤٥ ،

٣٦ نيوتن في $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـو}}$ ، $\overleftarrow{\text{وأ}}$ على الترتيب . اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه . ثم أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران في $\overleftarrow{\text{هـأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ حتى تتزن المجموعة .

[٩٧٢ نيوتن.سم ، ١٣٥ ، ١٣٥نيوتن]

....

٧٠- ** مثال١٢ محلول المعاصر صـ٢٣٣-

أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٤ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٦ ، ٨ ، ٦ ، ٦$\sqrt{3}$ ، ٨ ث . جم في $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـو}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـد}}$ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج واحسب معيار عزمه

[١٤$\sqrt{3}$ ث . جم . سم]

ملحوظة : ٦ ، ٦ ، ٦$\sqrt{3}$ أضلاع مثلث تكون ازدواج ، ٨ ، ٨ ازدواج آخر

....

٧١- مثال٩ المعاصر صـ٢٣١ :

أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٧سم ، ب جـ = ٨سم ، ق ($\hat{\text{أبجـ}}$) = ١٢٠° أثرت قوى مقاديرها ١٧.٥ ، ٢٠ ، ٢٢.٥ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـأ}}$ على الترتيب . بين أن مجموعة القوى تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه

....

٧٢- دور أول ٢٠١٣

سلك رفيع منتظم على شكل مثلث و أ ب قائم الزاوية فى (و) حيث و أ = ٣٠سم ، و ب = ٤٠سم أثرت القوى $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ١٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = - ١٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_3}$ = - ٢٠ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى أضلاع المثلث فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{وأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بو}}$ على الترتيب حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجا وحدة فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{وأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{وب}}$ على الترتيب ، معيار القوى بالنيوتن .

١) اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه

٢) أوجد مقدار القوتين اللتين تؤثران عند أ ، ب فى اتجاه عمودى على أ ب حتى يتزن المثلث

....

٧٣- تؤثر القوى $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_3}$ = - ٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ على الترتيب في النقط أ (٢ ، ٣) ، ب (- ٢ ، ٣) ، جـ (٤ ، - ٦) على الترتيب . اثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجا وأوجد معيار عزمه .

الحل :

$\overleftarrow{\text{ح}}$ = $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ + $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ + $\overleftarrow{\text{ق}_3}$

= ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ - ٦ $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$

= $\overleftarrow{0}$

المجموعة إما تكافى إزدواج أو تكون متزنة

$\overleftarrow{\text{ج}_\text{و}}$ = $\overleftarrow{0}$ حيث و نقطة الأصل

= $\overleftarrow{\text{وأ}}$ × $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ + $\overleftarrow{\text{وب}}$ × $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ + $\overleftarrow{\text{وجـ}}$ × $\overleftarrow{\text{ق}_3}$

(٢ ، ٣)×(٤ ، ٢) + (- ٢ ، ٣)×(٢ ، - ٣) + (٤ ، - ٦)×(- ٦ ، ١)

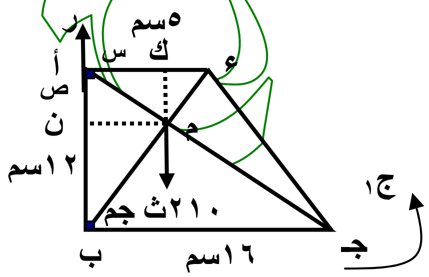
= (٤ – ١٢) $\overleftarrow{\text{ع}}$ + (٦ - ٦) $\overleftarrow{\text{ع}}$ + (٤ - ٣٦) $\overleftarrow{\text{ع}}$ = - ٤٠ $\overleftarrow{\text{ع}}$

معيار عزم الازدواج = ٤٠ وحدة عزم

....

٧٤- *** أ ب جـ ء صفيحة رقيقة على هيئة شبه منحرف فيه أ ء // ب جـ ، ق(أ) = ق(ب) = ٩٠° أ ء = ٥سم ، ب جـ = ١٦سم ، أ ب = ١٢سم ووزن الصفيحة ٢١٠ ث . جم يؤثر عن نقطة تلاقى القطرين علقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيا فإذا أثر على الصفيحة ازدواج اتجاهه عمودى على مستويها بحيث اتزنت فى وضع فيه أ ب رأسيا . أوجد معيار عزم الازدواج

[٨٠٠ث.جم.سم]



من تشابه المثلثين أ م ن ، أ جـ ب

$\frac{\text{س}}{16} = \frac{\text{ص}}{12}$ .... (١)

من تشابه المثلثين ب م ن ، ب ء أ

$\frac{\text{س}}{5} = \frac{12 - \text{ص}}{12}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن س = $\frac{80}{21}$ سم

$\text{ج}_1 + \text{ج}_2 = 0$

$\text{ج}_1 - 210 \times \frac{80}{21} = 0$ ومنها ج_1 = ٨٠٠ث.جم.سم

....