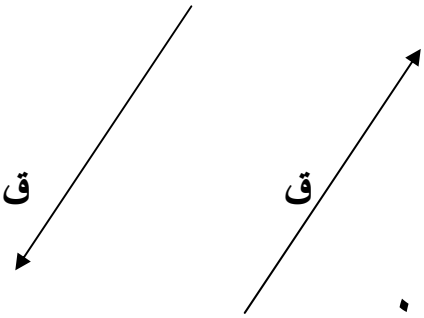
١

الازدواج

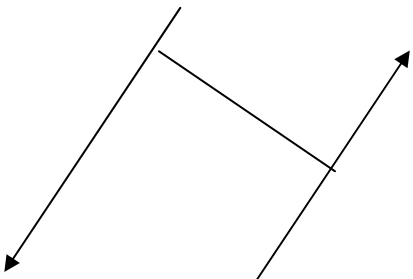
قوتين متساويتين فى المقدار
متوازيتين
متضادتين فى الاتجاه
خط عملهما ليسا على استقامة واحدة .



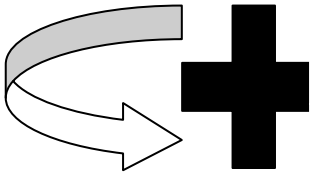
←

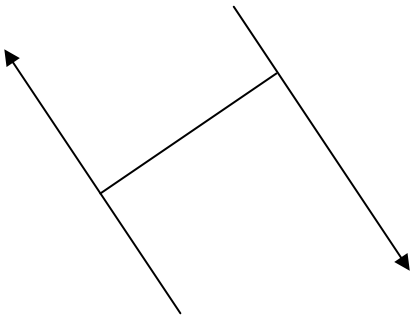
تعريف : متجه عزم الازدواج ج هو مجموع عزمي قوتيه عند اى نقطة

ذراع الازدوج ل : ـ هو البعد العمودي بين خطي عمل قوتيه
عزم الازدواج = ± إحدى قوتيه × البعد العمودي بينهمـا

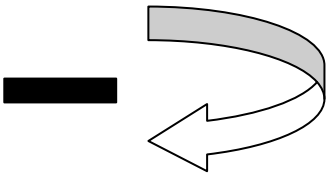


عكس دوران عقرب الساعة

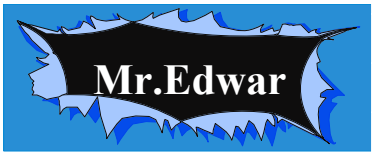




مع دوران عقرب الساعة



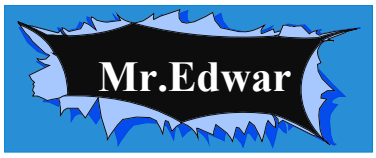
الأزدواجين المتزنين : متساويتان فى عزميهما ، مختلفان فى الإشارة



تكافؤ مجموعة من القوى ازدواج

الحالة الأولى : المجموعة من القوى تكافئ ازدواج اذا كان

القوى تعمل فى اضلاع شكل هندسي فى اتجاه دوري واحد ويكون



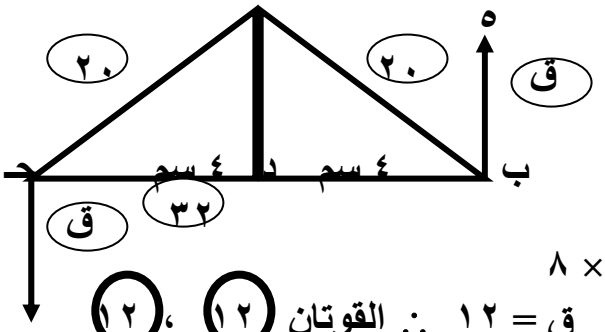
$$\frac{\text{القوة الاولى}}{\text{طول ضلعها}} = \frac{\text{القوة الثانية}}{\text{طول ضلعها}} = \cdots\cdots = \text{ك}$$

فأن المجموعة تكافيء ازدواج عزمه = ٢ × ك × مساحة الشكل الهندسي .

مثال (١) : أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ حـ = ٥ سم ، ب حـ = ٨ سم .
أثرت القوى (٢٠) ، (٣٢) ، (٢٠) فى الاتجاهات أ ب ، ب حـ ، حـ أ أثبت أن القوى تكافئ ازدواج و أوجد عزمه ثم احسب القوتين المتساويتين اللتين تؤثران عند ب ، حـ عموديتين عليه لكى يحدث اتزان .

الحل

القوى فى اتجاه دوري واحد ، $\frac{٢٠}{٥} = \frac{٣٢}{٨} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$

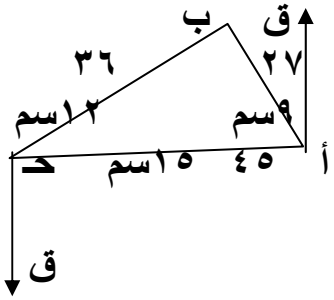


المجموعة تكافئ ازدواج عزمه =
٢ × ٤ × مساحة المثلث أ ب حـ
= ٨ × $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٣ = ٩٦ وحدة عزم

(ق) ، (ق) يكونان ازدوج عزمه = ق × ٨
ويتزن مع الازدواج السابق ∴ ق × ٨ = ٩٦ ∴ ق = ١٢ ∴ القوتان (١٢) ، (١٢)

=*=*=*=

مثال : أ ب حـ Δ قائم الزاوية فى ب فيه ا ب = ٩ سم ، ب حـ = ١٢ سم أثرت القوى ٢٧ ، ٣٦ ، ٤٥ فى ا ب ، ب حـ ، حـ أ اوجد مقدار القوتين المتساويتين اللتين تؤثران فى نهاية أ حـ عموديتين عليه وتكافئان المجموعة .



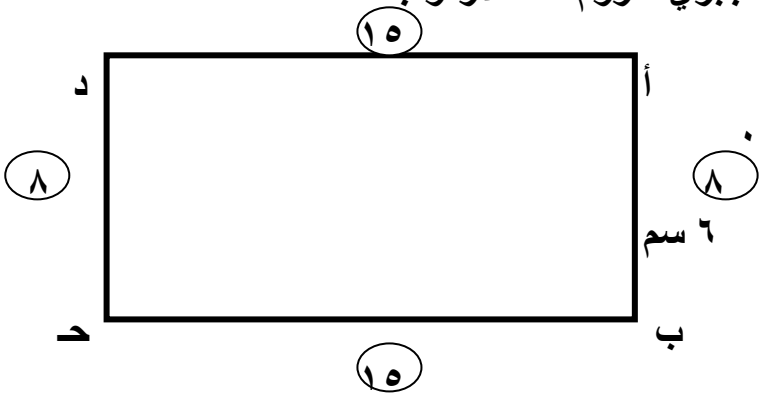
الحل : القوى في اتجاه دوري واحد ، $\frac{٢٧}{٩} = \frac{٣٦}{١٢} = \frac{٤٥}{١٥} = ٣$

المجموعة تكافئ ازدواج عزمه =
٢ × ٣ × ٥، × ٩ × ١٢ = ٣٢٤ وحدة عزم ق ، ق يكونان ازدواج
عزمه = ق × ١٥ ويتزن مع الازدواج السابق ق × ١٥ = ٣٢٤
ق = ٢١،٦ القوتان ٢١،٦ ، ٢١،٦

يتكافئ ازدواجان اذا كان متساويان فى المقدار ومتحدان فى الاشارة

٣ الحالة الثانية

تكون المجموعة مكافئة لازدواج محصل اذا كانت المجموعة مكونة من عدة ازدواجات ويكون عزم الازدواج المحصل = المجموع الجبري لعزوم هذه الازدواجات ٠

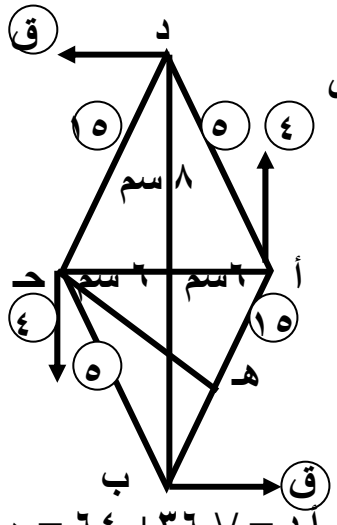


(١٥) ، (١٥) يكونان ازدواج عزمه = ـ ١٥ × ٦ = ـ ٩٠ وحدة عزم ٠

(٨) ، (٨) يكونان ازدوج عزمه = ٨ × ٩ = ٧٢ وحدة عزم ٠

المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = ـ ٩٠ + ٧٢ = ـ ١٨ وحدة عزم ٠

مثال : أ ب حـ د معين فيه ا حـ = ١٢ سم ، ب د = ١٦ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٥ ، ١٥ ، ٥ ث كجم ٠ فى أ ب ، ب حـ ، حـ د ، د أ على الترتيب ٠ كما أثرت قوتان مقداريهما ٤ ، ٤ ث كجم ٠ فى أ ، حـ فى اتجاهي ب د ، د ب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه ١٤٤ ث كجم ٠ سم ثم اوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران فى ب ، د وتوازيان القطر أ حـ وتجعلان المجموعة متزنة ٠



المجموعة مكونة من ٣ ازدواجات ∴ فهى تكافئ ازدواج محصل

(١٥) ، (١٥) يكونان ازدواج عزمه = ـ ١٥ × حـ هـ

= ـ ١٥ × ٩،٦ = ـ ١٤٤

(٥) ، (٥) يكونان ازدواج عزمه = ـ ٥ × ٩،٦ = ـ ٤٨

(٤) ، (٤) يكونان ازدواج عزمه = ٤ × ١٢ = ٤٨

المجموعة تكافئ ازدواج عزمه المحصل = ـ ١٤٤ ـ ٤٨ + ٤٨

= ـ ١٤٤

∴ معيار عزم الازدواج = ١٤٤ ، ق × ١٦ = ١٤٤ ∴ ق = ٩

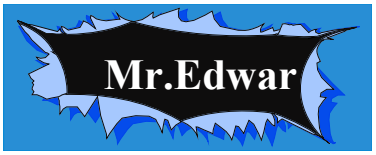
القوتان هما (٩) ، (٩)

ا د = √ ٣٦ + ٦٤ = ١٠

مساحة المعين = ½ حاصل ضرب القطرين = ق × ع

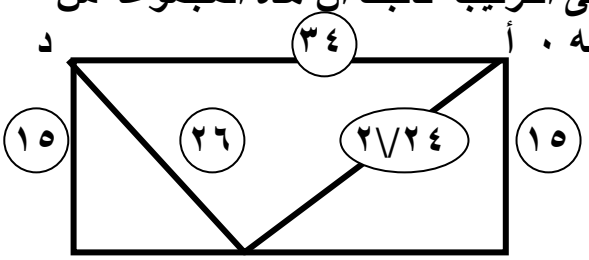
= ½ × ١٢ × ١٦ = ١٠ × حـ هـ

حـ هـ = ٩،٦ سم ٠



مثال : أ ب حـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨،٥ سم اخذت نقطة هـ على ب جـ بحيث كان حـ هـ = ٢،٥ سم أثرت قوى مقاديرها ١٥ ، ٣٤ ، ١٥ ، ٢٦ ، ٢٤\ ٢ ث فى ← ← ← ← ← ←

أ ب ، أ د ، حـ د ، د هـ ، هـ أ على الترتيب فأثبت أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجا ٠ احسب معيار عزمه ٠



١٥ ، ١٥ يكونان ازدواجا

عزمه = ـ ١٥ × ٨،٥ = ـ ١٢٧،٥

أ هـ = \ ٣٦ + ٣٦ = ٦ \ ٢

د هـ = \ ٣٦ + ٦،٢٥ = ٦،٥

٣٤ ، ٢\٢٤ ، ٢٦ فى اتجاه دوري واحد ،

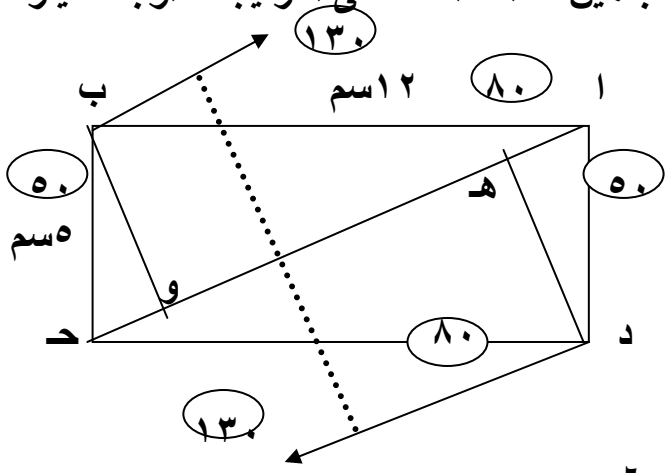
$\frac{٣٤}{٨،٥} = \frac{٢\٢٤}{٢\٦} = \frac{٢٦}{٦،٥}$ = ٤

∴ المجموعة تكون ازدواج

معيار عزم الازدواج = ٢ × ٤ × مساحة Δ أ هـ د = ٨ × ٠،٥ × ٨،٥ × ٦ = ٢٠٤

المجموعة كلها تكافئ ازدواج محصل عزمه = ـ ١٢٧،٥ + ٢٠٤ = ٧٦،٥ ٠

مثال : ا ب حـ د مستطيل فيه أب = ١٢ سم ، ب حـ = ٥ سم أثرت القوى التي مقاديرها ٨٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٥٠ ث جم فى ا ب ، ب حـ ، حـ د ، د أ على الترتيب كما أثرت قوتان مقدارهما ١٣٠ ، ١٣٠ ث جم ٠ فى ب ، د فى الاتجاهين حـ أ ، ا حـ على الترتيب ٠ أوجد معيار عزم الازدواج المحصل لهذه القوى ٠



٨٠ ، ٨٠ يكونان ازدواجاً

عزمه = ٨٠ × ٥ = ٤٠٠

٥٠ ، ٥٠ يكونان ازدواجاً

عزمه = ٥٠ × ١٢ = ٦٠٠

د هـ = $\frac{١٢ \times ٥}{١٣}$ = $\frac{٦٠}{١٣}$ ، ب و = $\frac{٦٠}{١٣}$

١٣٠ ، ١٣٠ يكونان ازدواجاً عزمه = ـ ١٣٠ × $\frac{١٢٠}{١٣}$ = ١٢٠٠

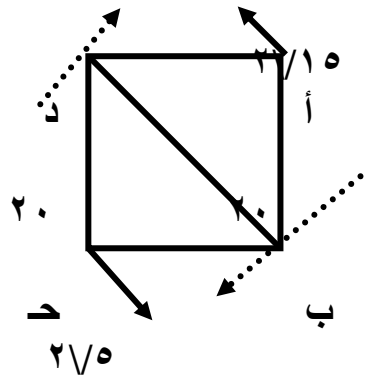
المجموعة كلها تكافئ ازدوج محصل عزمه = ٤٠٠ + ٦٠٠ ـ ١٢٠٠ = ـ ٢٠٠

∴ معيار الازدواج المحصل = ٢٠٠ ث حم ٠ سم ٠

Mr.Edwar

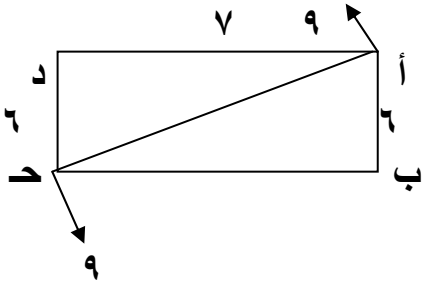
٥

مثال : ا ب حـ د مربع طول ضلعه ١٠ سم ٠ أثرت قوتان مقداريهما ٢ ، ٢٠ نيوتن فى أ ب ، حـ د على الترتيب ، كما أثرت فى أ ، حـ قوتان مقدار كل منهما ٢\١٥ نيوتن فى اتجاهي ب د ، د ب على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه ٠
ثم اوجد مقدار واتجاه قوتين تؤثران فى ب ، د وتوازيان أ حـ وتجعلان المجموعة فى حالة توازن ٠



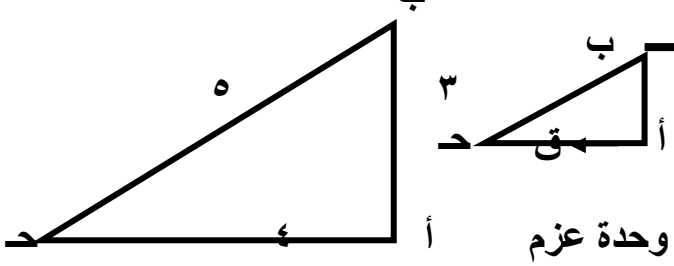
٢٠ ، ٢٠ يكونان ازدواج عزمه
= ـ ٢٠ × ١٠ = ـ ٢٠٠ نيوتن ٠ سم ٠
١٥ \ ٢ ، ١٥ \ ٢ يكونان ازدواج
عزمه = ٢\١٥ × ٢\١٠ = ٣٠٠نيوتن
عزم الازدواج المحصل = ـ ٢٠٠ + ٣٠٠
= ١٠٠ نيوتن ٠ سم
المجموعة فى حالة اتزان
← ←
∴ ١٠٠ = ٢ ق × ١٠ /٢ ∴ ق = ٥ \ ٢ نيوتن فى اتجاه احـ ، حـ أ على الترتيب ٠

مثال : أ ب حـ د مستطيل فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٧ ، ٦ ، ٧ ث جم فى أ ب ، ب حـ ، جـ د ، د أ على الترتيب ٠ أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج واوجد معيار عزمه ٠ ثم اوجد مقدار واتجاه قوتين تعملان عند النقطتين أ ، حـ عموديتين على أ حـ بحيث تتزن المجموعة ٠



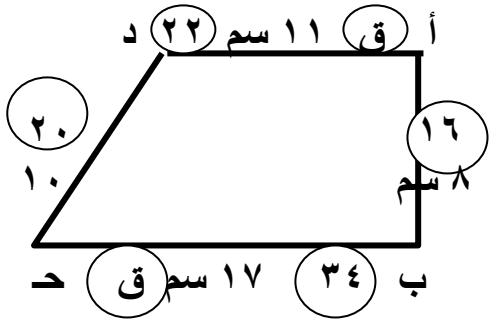
٦ ، ٦ يكونان ازدواج عزمه = ـ ٦ × ٨
= ـ ٤٨ ث جم ٠ سم
٧ ، ٧ يكونان ازدواج عزمه
= ـ ٧ × ٦ = ـ ٤٢ ث جم ٠ سم
المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ٩٠ ث جم ٠ سم ٠
اتزان المجموعة ـ ٩٠ + ج / = ٠ ق × ١٠ = ٩٠ ∴ ق = ٩
٩ ، ٩ الاتجاه كما هو موضح بالرسم ٠
Mr.Edwar

مثال : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ فيه أ ب = ٩ سم ، أ حـ = ١٢ سم ن أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٤ نيوتن فى أ ب ، ب حـ ، حـ أ على الترتيب ٠ أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج واوجد معيار عزمه ثم اوجد قوتين تؤثران فى أ ، ب وعموديتين على أ ب وتكافئان المجموعة ٠



مجموعة القوى فى اتجاه دوري واحد
ك = ١/٣ = ٥/١٥ = ٤/١٢ = ٣/٩
المجموعة تكافئ ازدواج عزمه
= ٢ × ١/٣ × مساحة المثلث أ ب حـ = ٣٦ وحدة عزم
← ←
ج – ج / = صفر ∴ ٣٦ = ق × ٩ ∴ ق = ٤ القوتان ٤ ، ٤

مثال : أ ب حـ د شبه منحرف فيه أ د // ب حـ ، ق (< ا ب حـ) = ٩٠ ° ، أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٧ سم ، أ د = ١١ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٢ ، ١٦ ، ٣٤ ، ٢٠ ث جم فى أ ب ، ب جـ ، حـ د على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج واوجد معيار عزمه ثم اوجد القوتين اللتين تؤثران فى أ د ، حـ ب حتى تتزن المجموعة ٠



محموعة القوى فى اتجاه دوري واحد ،

$$\frac{١٦}{٨} = \frac{٣٤}{١٧} = \frac{٢٠}{١٠} = \frac{٢٢}{١١} = ٢$$

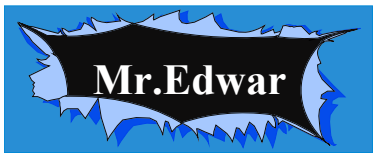
المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه

$$= ٢ \times ٢ \times \frac{١٧ + ١١}{٢} \times ٨ = ٤٤٨ \text{ ث جم ٠}$$

لكي تتزن المجموعة ٤٤٨ = ق × ٨ ∴ ق = ٥٦ ث جم

القوتان ٥٦ ، ٥٦ ٠

=*=*=*=*=*=*=*=*=*=*=



تمرينات :

(١) ا ب حـ د معين طولا قطريه أحـ ، ب د ١٦ سم ، ١٢ سم على الترتيب أثرت قوتان مقدار كل منهما ١٥ نيوتن فى أ ب ، د حـ على الترتيب ٠ أوجد مقدار عزم الازدواج الناتج [١٤٤ نيوتن ٠ سم]

(٢) أ ب حـ د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ل سم ٠ أثرت قوتان مقدار كل منهما ٣√١٦ نيوتن فى حـ د ، و أ ٠ اوجد القوتين المؤثرتين في أ ، د وعموديتين على أ ب بحيث تحدثا اتزان مع القوتين المعلومتين ٠ ٢٤ نيوتن

(٣) أ ب حـ د متوازي اضلاع فيه ق (أ) = ٦٠ ° ، أ ب = ٨ سم ٠ ، القطر ب د عمودي على أ ب أثرت قوتان مقدار كل منهما ٧ √٣ ث كجم ٠ في أ ب ، د حـ اوجد مقدار كل من القوتين ق ، - ق المؤثرتين فى أ ، حـ وعموديتين على القطر أ حـ بحيث تكونان ازدواجا مكافئا للازدواج المكون من القوتين المعلومتين ٠ ٧√٣ ، ٧√٣

(٤) أ ب حـ د مربع طول ضلعه ٢٠ سم ٠ أثرت القوى ٩ ، ٦ ، ٣ ، ١٨ ، ٢√١٢ نيوتن فى أ ب ، ب حـ ، د حـ ، د أ ، ب د على الترتيب اوجد المركبات الجبرية للقوة ٢√١٢ نيوتن فى اتجاهي ب حـ ، ب أ ومن ثم اثبت ان هذه المجموعة تكافئ ازدواج ٠ احسب معيار عزمه ٣٠٠ نيوتن ٠ سم