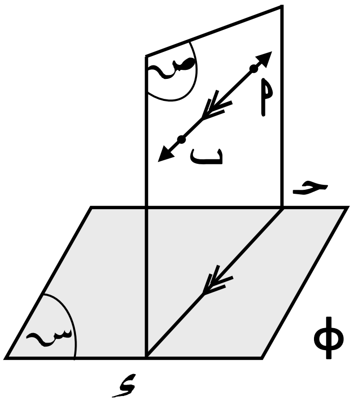
النظريات المقررة البرهان فى الهندسة الفراغية

٣ ث/ع

[١] **أثبت أن :**

" إذا وازى مستقيم مستوياً فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم . "

المعطيات : ↔أ ب // المستوى س ، المستوى ص أي مستوى يحوي ↔أ ب ويقطع المستوى س في ↔حـ ء



A.H.F.

المطلوب : إثبات أن : ↔أ ب // ↔حـ ء

البرهان : ∵ ↔أ ب // المستوى س ∴ ↔أ ب ∩ المستوى س = ϕ

، ∵ ↔حـ ء ⊂ المستوى س ∴ ↔أ ب ∩ ↔حـ ء = ϕ (متوازيان أو متخالفان)

، ∵ المستوى ص يحوي كل من ↔أ ب ، ↔حـ ء ∴ ↔أ ب // ↔حـ ء (هـ٠ط٠ث)

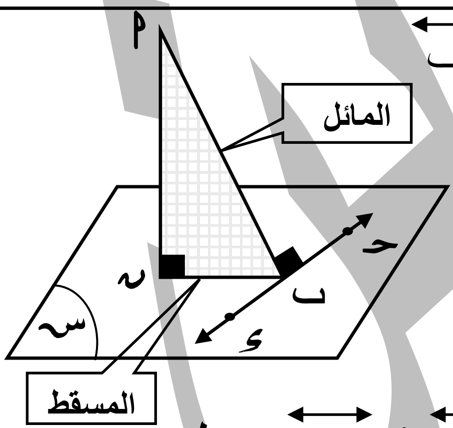
---

[٢] **أثبت أن :** [نظرية الأعمدة الثلاثة]

" إذا رسم مستقيم مائل على مستوى وكان عمودياً على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عمودياً على هذا المستقيم "

المعطيات : ↔أ ن ⊥ المستوى س ، ↔ن ب مسقط المائل ↔أ ب

المائل ↔أ ب ⊥ ↔حـ ء الواقع في المستوى س ،



أبو محمد

المطلوب : إثبات أن : ↔ن ب ⊥ ↔حـ ء

البرهان : ∵ ↔أ ن ⊥ المستوى س

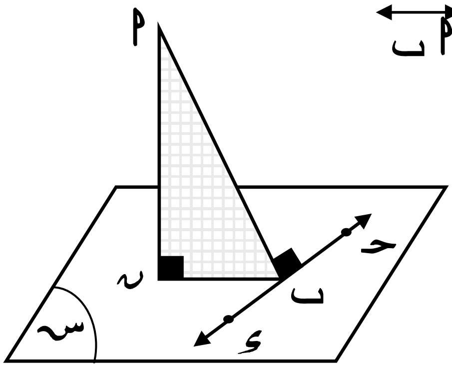
∴ ↔أ ن ⊥ ↔حـ ء (الواقع في س) ⟵ (١) ، ∵ ↔أ ب ⊥ ↔حـ ء (معطى) ⟵ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن : ↔حـ ء ⊥ كلاً من ↔أ ن ، ↔أ ب (الواقعان في المستوى أ ب ن)

∴ ↔حـ ء ⊥ مستويهما أ ب ن ∴ ↔حـ ء ⊥ ↔ن ب الواقع في المستوى أ ب ن . (هـ٠ط٠ث)

[٣] **أثبت أن :**

" إذا رسم مستقيم مائل على مستوى وكان مسقطه على المستوى عمودياً على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عمودياً على ذلك المستقيم "



المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ⊥ المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{ن ب}}$ مسقط المائل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

المسقط $\overleftrightarrow{\text{ن ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ الواقع في المستوى س

المطلوب : إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ⊥ المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ (الواقع في س) ⟵ (١) ، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ن ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ (معطى) ⟵ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن : $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ⊥ كلاً من $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ن ب}}$ (الواقعان في المستوى أ ب ن)

∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ⊥ مستويهما أ ب ن ∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ الواقع في المستوى أ ب ن . (هـ.ط.ث)

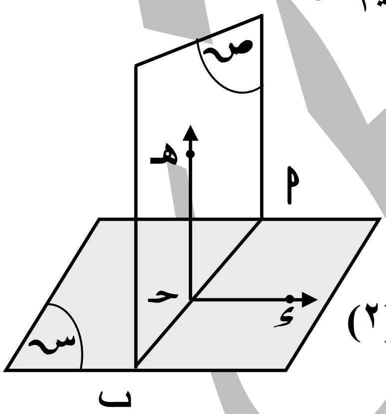
---

[٤] **أثبت أن :**

" إذا كان مستقيم عمودياً على مستوى فكل مستوى يحوي هذا المستقيم يكون عمودياً على ذلك المستوى "

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ⊥ المستوى س ، المستوى ص يحوي المستقيم $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ويقطع المستوى س في $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

المطلوب : إثبات أن : ص ⊥ س



البرهان : نرسم $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في المستوى س .... (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ⊥ المستوى س (معطى) ∴ $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ∴ ق (∠ ء حـ هـ) = ٩٠°

أيضاً من (١) ، (٢) ينتج أن : ∠ ء حـ هـ زاوية مستوية لإحدى الزوايا الزوجية الناشئة عن تقاطع المستويين س ، ص

∴ $\boxed{\text{ص ⊥ س}}$ (المستويان متعامدان) (هـ.ط.ث)

أبو علي

تعاريف ومفاهيم ونظريات ونتائج الهندسة الفراغية

٣ ث/ع

الفصل الأول : المستقيمات و المستويات .

(١) أي نقطتين مختلفتين أ، ب يمر بهما مستقيم واحد وواحد فقط هو المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

(٢) بكل ثلاثة نقط ليست علي إستقامة واحدة يمر مستوى واحد وواحد فقط .

(٣) إذا إشترك مستقيم و مستوي في نقطتين مختلفتين فإن المستقيم يقع بأكمله داخل المستوى.

(٤) أي نقطة في المستوى يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات .

A.H.F.

(٥) أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات .

(٦) أي مستقيم في الفراغ يمر به عدد لا نهائي من المستويات .

(٧) **يتعين المستوى بـ** [أ] ثلاث نقط ليست علي إستقامة واحدة [ب] أو مستقيم ونقطة لا تنتمي له [جـ] أو مستقيمان متقاطعان . [د] أو مستقيمان متوازيان

(٨) إذا كان ل مستقيم ، س~ مستوى و كان ل ∩ س~ = ϕ فإن ل // س~

(٩) إذا إشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنهما يشتركان في مستقيم يمر بهذه النقطة .

(١٠) **الزاوية بين مستقيمين متخالفين** : هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازياً الأخر .

(١١) يتوازى المستقيمان ل ، م إذا كان : [أ] يجمعهما مستوي واحد [ب] ل ∩ م = ϕ

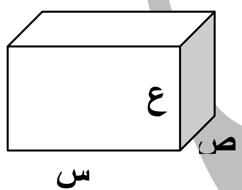
(١٢) المستويان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان .

(١٣) **المنشور**: هو الجسم المتولد من إنتقال سطح مضلع موازياً لنفسه في إتجاه ثابت و يسمي سطح المضلع قاعدة المنشور .

أبوعلي

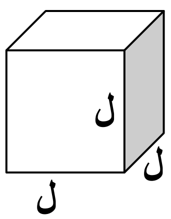
(١٤) **متوازي السطوح** : هو منشور كل من قاعدتيه متوازي أضلاع .

(١٥) **أقطار متوازي السطوح** : هي القطع المستقيمة التي تصل بين رأسين ليسا في وجهة واحدة (ليسا في مستوى واحد) وعددها أربعة وتتلاقى جميعاً في نقطة واحدة هي منتصف كل منها .



(١٦) **متوازي المستطيلات** : هو منشور قائم كل من قاعدتيه سطح مستطيل .

طول قطر متوازي المستطيلات = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2}$



(١٧) **المكعب** : هو متوازى مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة .

طول قطر المكعب = $\sqrt{3}$ ل ⬅ مجموع أطوال الأقطار= ٤ $\sqrt{3}$ ل

(١٨) **الهرم الثلاثي المنتظم**: هو هرم قائم جميع أوجهه الأربعة مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة

(١٩) **نظرية [١]** : إذا وازى مستقيم مستوى فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم .

(٢٠) إذا وازي مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه يوازي ذلك المستوى .

(٢١) إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما يكونان متوازيين .

(٢٢) إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الأخر.

(٢٣) إذا توازى مستقيمان و مر بكل منهما مستوى و تقاطع المستويان كان خط تقاطعهما موازياً لهذين المستقيمين .

(٢٤) إذا وازى مستقيم كل من مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما .

(٢٥) إذا كان المستقيم عمودياً علي كل مستقيم في مستوى كان هذا المستقيم عمودياً علي المستوى .

(٢٦) **تمرين مشهور** : إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينها تكون متناسبة .

٣ ث/ع

(٢٧) **نظرية [٢]** : إذا تقاطع مستقيمان في مستوى و كانا موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستوي اخر كان مستوى المستقيمين الأولين موازياً لمستوى المستقيمين الأخرين .

(٢٨) **نظرية [٣]** : المستقيم العمودي علي كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً علي مستويهما .

(٢٩) إذا كان مستقيم عمودياً علي كل من مستقيمين مستويين معاً و غير متوازيين فإنه يكون عمودياً علي مستويهما .

(٣٠) جميع الأعمدة المرسومة علي مستقيم من نقطة عليه تقع في مستوى واحد هو المستوى العمودي علي هذا المستقيم .

A.H.F.

(٣١) يوجد مستوى واحد وواحد فقط عمودي علي مستقيم من نقطة عليه .

(٣٢) المستقيمان العمودان علي مستوى واحد متوازيان .

(٣٣) إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيان ٠

- والمستقيم العمودي علي أحد مستويين متوازيين يكون عمودي علي الأخر .

أبو محمد

📖 الفصل الثاني : الإسقاط العمودي

(٣٤) المسقط العمودي لنقطة معلومة علي مستوى معلوم هو موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة المعلومة علي المستوى .

(٣٥) **الزاوية بين قطعة مستقيمة و مستوى** :

ربنا لا تؤاخذنا إن نسينا أو أخطأنا

هي الزاوية بين القطعة المستقيمة ومسقطها على المستوى وهي الزاويةبين المستقيم الحامل للقطعة المستقيمة والمستوى وتسمى :(**زاويةميل المستقيم على المستوى**)

(٣٦) **نظرية [٤]** : إذا رسم مستقيم مائل علي مستوى و كان عمودياً علي مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عمودياً علي هذا المستقيم .

(٣٧) **عكس نظرية [٤]** : إذا رسم مستقيم مائل علي مستوى و كان مسقطه علي المستوى عمودياً على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عمودياً علي ذلك المستقيم .

(٣٨) **الزاوية الزوجية** : إذا كان لنصفي مستويين حد مشترك فإن إتحاد نصفي المستويين مع ذلك الحد (يسمى زاوية زوجية)

(٣٩) **الزاوية المستوية لزاوية زوجية** : هي الزاوية الناشئة من تقاطع الزاوية الزوجية مع أي مستوى عمودي علي حافتها : و قياسها = قياس الزواية الزوجية

(٤٠) جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون متساوية في القياس .

(٤١) **نظرية [٥]**: اذا كان مستقيم عمودياً على مستوى فكل مستوى يحوي هذا المستقيم يكون عمودياً على ذلك المستوى .

(٤٢) **نظرية [٦]**: إذا تعامد مستويان و رسم في أحدهما مستقيم عمودي علي خط التقاطع كان هذا المستقيم عمودياً علي المستوى الأخر .

(٤٣) إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً علي مستوى ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين عمودياً على المستوى الثالث .

(٤٤) **الهرم القائم**: هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم ومركزه هو موقع العمود النازل من رأس الهرم على قاعدته وأوجهه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة .

ملاحظات هامة جداً في الهندسة الفراغية :-

١- **إذا كان المعطى : مستقيم يوازي مستوي** : نبحث عن مستوي يحتوي ذلك المستقيم و يقطع المستوى فيكون المستقيم موازياً خط تقاطع المستويين .

٢- **إذا كان المعطى : مستويين متوازيين**: نبحث عن مستوى ثالث قاطع لهما فيكون خطا تقاطعه معهما متوازيان

٣- **إذا كان المعطى مستقيم يوازي مستقيم** : نبحث عن مستويين كل مستوى منهما يحوي مستقيم فيكون خط تقاطع المستويين موازياً لهذين المستقيمين .

٤- **لإثبات أن مستقيم يوازي مستوي** : نثبت أنه يوازي مستقيم في المستوى .

٥- **لإثبات أن مستوي يوازي مستوي** : نثبت أن مستقيمين متقاطعين في المستوى الأول يوازيان مستقيمين متقاطعين في المستوىالثاني .

A.H.F.

٦- **لإثبات توازي مستقيمين** : نثبت أن تقاطعهما = ϕ و يجمعهما مستوى واحد .

- أو نبحث عن مستويين متوازيين و مستوى ثالث قاطع لهما أو منصفات أضلاع مثلث أو ....

٧- **لإثبات أن ثلاث نقط علي إستقامة واحدة** : نثبت أن كل منهم يقع علي خط تقاطع مستويين

هام جداً : نستفيد من التوازي بصفة عامة في [التشابه ، النسب ، التطابق ، المساحات ، إثبات أشكال مثل متوازي الأضلاع ، شبه المنحرف ، معين ....]

٨- **إذا كان المعطى مستقيم عمودي علي مستوي**: يكون عمودي علي كل مستقيم في المستوى .

٩- **إذا كان المعطى مستويان متعامدان** : إذا رسم في أحدهما عمود علي خط التقاطع يكون عمودي علي المستوى الأخر .

١٠- **إذا وجد مستقيم عمودي علي مستوي** : يكون هناك مستقيم مائل علي ذلك المستوى و له مسقط وذلك لإيجاد زاوية ميل مستقيم علي مستوي .

١١- **لإثبات أن مستقيم عمودي علي مستوي** : نثبت أنه عمودي علي مستقيمين متقاطعين في المستوى .

١٢- **لإثبات تعامد مستويين** : نثبت أن مستقيم في احدهما عمودي علي المستوى الأخر.

١٣- **__لإيجاد زاوية مستوية للزاوية الزوجية بين مستويين__** : نحدد خط التقاطع ـ نرسم عمودان علي خط التقاطع من المستويين فتكون الزاوية بين العمودين هي الزاوية المستوية .

__هام جداً__ : فائدة التعامد [إيجاد : أطوال أضلاع ، زوايا ، زوايا زوجية ، مساحات ، زاوية ميل قطعة مستقيمة على مستوى ، إثبات أشكال مثل المستطيل ، المربع ،]

أكمل ما يأتي:

A.H.F.

٣ث/ع

(١) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي ....

(٢) إذا وازي مستقيم كلاً من مستويين متقاطعين فإنه ....

(٣) أ ب جـ أَ بَ جَ منشور ثلاثي: خط تقاطع المستوى أ ب جَ مع المستوى أ أَ جَ جـ هو المستقيم ....

(٤) الزاوية بين قطعة مستقيمة و مستوى هي الزاوية ....

(٥) إذا قطع مستوي كلاً من مستويين متوازيين فخطا تقاطعه معهما ....

(٦) طول قطر متوازي المستطيلات الذي أبعاده ٤ سم ، ٣ سم ، ١٢ سم يساوي ....

(٧) إذا قطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينها تكون ....

(٨) إذا كان المستقيم ل عمودياً علي المستوى س فكل مستوي يحوي المستقيم ل يكون ....

(٩) المستقيمان العموديان علي مستوى واحد ....

(١٠) الهرم القائم هو ....

(١١) أقطار متوازي السطوح هي القطع المستقيمة التي تصل بين ....

(١٢) إذا رسم مستقيم مائل علي مستوى وكان عمودياً على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون ....

(١٣) إذا إشترك مستويان في ثلاث نقط ليست علي إستقامة واحدة فإنهما ....

A.H.F.

(١٤) إذا كان طول حرف مكعب٥ سم فإن طول قطره = ...

(١٥) إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيماً في المستوى فإنه ....

(١٦) المستقيم العمودي علي كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما فإنه يكون ....

(١٧) إذا كان مستقيم عمودياً علي مستوى فكل مستوى يحوي هذا المستقيم يكون ....

(١٨) إذا كان مستقيم عمودياً علي كل من مستقيمين مستويين معاً و غير متوازيين فإنه يكون ....

(١٩) إذا رسم مستقيم مائل علي مستوى وكان مسقطه علي المستوى عمودياً علي مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل ....

(٢٠) إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً علي مستوي ثالث كان خط تقاطع هذين المستويين ....

(٢١) إذا تعامد مستويان فكل مستقيم في أحدهما عمودي عل خط التقاطع يكون ....

(٢٢) إذا كانت مساحة سطح المكعب ٩٦ سم^{٢} فإن طول قطره ....

(٢٣) الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية الناشئة من ....

(٢٤) إذا كان طول قطر مكعب ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإن مساحة سطحه = ...

(٢٥) إذا كان حجم مكعب يساوي ٦٤ سم^{٣} فإن مجموع مساحات أوجهه تساوي ....

(٢٦) إذا كان لنصفي مستويين حد مشترك فإن اتحاد نصفي المستويين مع الحد ذلك المشترك يسمي ....

(٢٧) إذا كان طول قطر المكعب يساوي ٦ $\sqrt{٢}$ سم فإن مساحته الكلية تساوي ....

(٢٨) إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه ....

(٢٩) الهرم الثلاثي المنتظم هو هرم أوجهه الأربعة سطوح مثلثات ....

(٣٠) مقطع متوازي السطوح بمستوى يقطع أربعة أحرف متوازية فيه هو سطح ....

(٣١) إذا اشترك مستقيم و مستوى في نقطتين مختلفتين فإن المستقيم ....

(٣٢) أقطار متوازي السطوح تقاطع جميعاً في نقطة واحدة هي ....

(٣٣) إذا وازى مستقيم مستوي فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع ....

(٣٤) الزاوية المستوية لزوية زوجية هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع أي ....

(٣٥) إذا إشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنهما يشتركان في ....

(٣٦) مجموع أطوال أقطار متوازي المستطيلات الذي أبعاده: ١٥سم ، ٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ١٠سم يساوي ..... سم

(٣٧) إذا توازى مستقيمان و احتوى كلاً منهما مستوى و تقاطع المستويان كان خط تقاطعهما ....

(٣٨)إذا وازى مستقيم مستوي فالمستقيم الذي يمر بأي نقطة من نقط المستوى موازياً للمستقيم المعلوم .....

(٣٩) إذا كان طول قطر أحد أوجه مكعب ٣ $\sqrt{٢}$ سم فإن مربع طول قطر هذا المكعب يساوي ....

(٤٠) إذا تقاطعت ثلاث مستويات مثني مثني فإن خطوط تقاطعها تكون .... أو ....

(٤١) قاعدة الهرم الرباعي القائم علي شكل .... و أوجهه الجانبية متطابقة و كل منها علي شكل ....

(٤٢) عدد أحرف الهرم الثلاثي المنتظم .... و جميعها متساوية في الطول و عدد أوجهه ...... وكلها ....

(٤٣) خط أكبر ميل على مستوى هو المستقيم الذي يميل بزاوية ....

(٤٤) أجب عن الأسئلة الأتية :- أ - هل دائماً أي أربع نقط تقع في مستوى واحد ؟ (لا)

ب - هل المستقيمان العمودان علي مستقيم ثالث في الفراغ متوازيان ؟ (لا)

جـ - ما اقل عدد من المستويات تحدد مجسماً ؟ (أربعة – الهرم الثلاثي)

د - إذا كان مستقيم عمودي على مستوى فهل يكون المستوى عمودي علي المستقيم ؟ (نعم)