[81] ث.ع / ثان / غ

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
امتحان شهادة إتمام الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٣ م
[المرحلة الثانية – الدور الثانى]

[A] 13

الجبر والهندسة الفراغية [رياضيات (٢)]

الزمن : ساعتان

(تنبيه مهم : الإجابات المتكررة عن أسئلة الاختيار من متعدد والصواب والخطأ لن تقدر ويتم تقدير الإجابة الأولى فقط)
يسمح باستخدام الآلة الحاسبة
[الأسئلة فى صفحتين]

أولا : الجـــبر

ملحوظة : { ١ ، ω ، ω^{٢} } هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح ، ت^{٢} = − ١

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

السؤال الأول : (ثمان درجات)

(أ) إذا علم أن $ر^{ن} : ر^{ن} + ٢ : ر^{ن} + ٤ = ٣ : ١٤ : ١٤$

فأوجد قيمة $ل ر^{ن}$.

(ب) حل المعادلة الآتية فى ك :

(٣س − ٢)^{٦} − ٩ (٣ س − ٢)^{٣} + ٨ = صفر

السؤال الثانى : (ثمان درجات)

(أ) أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات الآتية حلا وحيدًا :

س + ص + ع = ٦ ، س + ٢ ص + ٣ ع = ١٤ ، ٣س + ٤ ص + ك ع = ١٤

ثم استخدم طريقة كرامر لحل هذه المعادلات فى حالة ك = ١

(ب) فى مفكوك (١ + س)^{ن} حسب قوى س التصاعدية إذا كان :

ح$_{٤}$ = $\frac{٢٥}{٣}$ ح$_{٣}$ ، ح$_{٥}$ = ح$_{٦}$. أوجد قيمة كل من ن ، س .

السؤال الثالث : (ثمان درجات)

(أ) إذا كان ع + ٢ = ت (ع − ٢) فأوجد العدد المركب ع فى الصورة المثلثية

ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة الأسية .

(ب) بدون فك المحدد ، أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix} = ٤ س ص ع$$

[بقية الأسئلة فى الصفحة الثانية]

ثانيا : الهندسة الفراغية

أجب عن سؤالين فقط مما يأتى :

السؤال الرابع : (سبع درجات)

(أ) أكمل العبارات الآتية :

(١) المستقيمان الموازيان لثالث فى الفراغ ..... .

(٢) طول قطر متوازى المستطيلات الذى أبعاده ٣ سم ، ٤ سم ، ١٢ سم يساوى ..... سم .

(٣) الهرم القائم هو ..... .

(٤) جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية تكون ..... .

(ب) م أ ب حـ هرم ثلاثى . أخذت النقط س ، ص ، ع على الأحرف $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م حـ}$ على الترتيب بحيث كان : $\frac{م س}{س أ} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{م ع}{ع حـ} = \frac{١}{٣}$

أثبت أن المستوى س ص ع يوازى المستوى أ ب حـ . وإذا فرضت النقطة ن ∈ $\overline{ب حـ}$ ورسمت $\overline{م ن}$ فقطعت $\overline{ص ع}$ فى ل فأثبت أن أ ن = ٤ س ل .

السؤال الخامس : (سبع درجات)

(أ) أثبت أن أقطار المكعب متساوية فى الطول وطول كل منها ل $\sqrt{٣}$

حيث ل هو طول حرف المكعب .

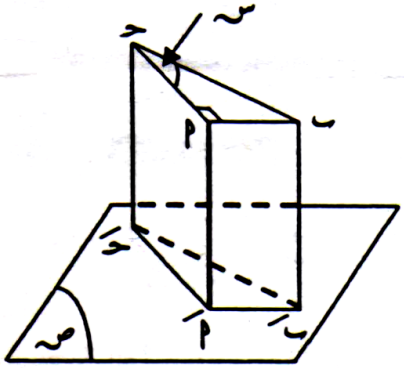
(ب) فى الشكل المقابل : سـ ، صـ مستويان غير متوازيين ،

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى أ مرسوم فى المستوى سـ

أَ ، بَ ، حَ هى مساقط رؤوسه على المستوى صـ

على الترتيب . فإذا كان $\overline{أ ب}$ // المستوى صـ

فأثبت أن المثلث أَ بَ حَ قائم الزاوية فى أَ .



السؤال السادس : (سبع درجات)

م أ ب حـ ء هرم قائم قاعدته أ ب حـ ء مربع طول ضلعه يساوى الارتفاع الجانبى للهرم .

(أولا) أثبت أن المستوى م أ حـ عمودى على المستوى أ ب حـ ء .

(ثانيا) إذا كان (ى) هو قياس زاوية ميل $\overline{م أ}$ على مستوى القاعدة أ ب حـ ء

فأوجد حتا ى .

(ثالثا) أوجد قياس الزاوية بين المستويين م أ ب ، م حـ ء .

⊙□□□□⊙

[انتهت الأسئلة]

[81] الدور الثانى المرحلة الثانية	جمهورية مصر العربية وزارة التربيـة والتعليم امتحان شهادة إتمام الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٣ م نموذج إجابة الجبر والهندسة الفراغية (٢)	الدرجة العظمى (١٥) الدرجة الصغرى (-) عدد الصفحـات (٦)

الدرجة الكلية : (٣٠) درجة ثم تقسم علي (٢) لتصبح الدرجة الفعلية (١٥) درجة

أولا : الجبر

إجابة السؤال الأول : (ثمانى درجات) الفقرة (أ) أربع درجات والفقرة (ب) أربع درجات

(أ) $\because$ $ن^{ن+٢} = ن^{ن+٤}$ $\Leftarrow$ $ر+٢ = ر+٤$ (مرفوض)

أو $ن = ٢ر+٦$ ..... (١) **(نصف درجة)**

$$\frac{ن^{ن+٢}}{ر^{ن}} = \frac{ن^{ن+٢}}{ن^{ن+١}} \times \frac{ر^{ن}}{ر^{ن+١}} = \frac{١٤}{٣}$$ **(نصف درجة)**

$\therefore$ $\frac{ن-ر-٢+١}{ر+٢} \times \frac{ن-ر-١+١}{ر+١} = \frac{١٤}{٣}$ **(نصف درجة)**

، من (١) $\therefore$ $\frac{ر+٥}{ر+٢} \times \frac{ر+٦}{ر+١} = \frac{١٤}{٣}$ **(نصف درجة)**

$\therefore$ ١٤ $(ر^{٢} + ٣ر + ٢) = ٣(ر^{٢} + ١١ر + ٣٠)$

$\therefore$ ١١ $ر^{٢}$ + ٩ر - ٦٢ = صفر $\therefore$ $(١١ر + ٣١)(ر - ٢)$ = صفر **(نصف درجة)**

$\therefore$ $ر = ٢$ **(نصف درجة)**

، من (١) $\therefore$ $ن = ١٠$ **(نصف درجة)** $\Leftarrow$ $ل_{ر} = ل_{٢}^{١٠} = ٩٠$ **(نصف درجة)**

(ب) $\because$ $(٣س-٢)^{٦} - ٩(٣س - ٢)^{٣} + ٨ = ٠$

$\therefore$ $[(٣س - ٢)^{٣} - ١][(٣س - ٢)^{٣} - ٨] = ٠$ **(درجة)**

$\therefore$ $(٣س - ٢)^{٣} = ١$ أو $(٣س - ٢)^{٣} = ٨$

$\therefore$ ٣س - ٢ = ١	$\therefore$ ٣س - ٢ = $ω$	$\therefore$ ٣س - ٢ = $ω^{٢}$	$\therefore$ ٣س - ٢ = ٢	$\therefore$ ٣س - ٢ = ٢$ω$
$\therefore$ ٣س = ٣	$\therefore$ ٣س = $ω$ + ٢	$\therefore$ ٣س = $ω^{٢}$ + ٢	$\therefore$ ٣س = ٤	$\therefore$ ٣س = ٢$ω$ + ٢
$\therefore$ س = ١	$\therefore$ س = $\frac{ω+٢}{٣}$	$\therefore$ س = $\frac{ω^{٢}+٢}{٣}$	$\therefore$ س = $\frac{٤}{٣}$	$\therefore$ س = $\frac{٢ω+٢}{٣}$
(نصف درجة)	**(نصف درجة)**	**(نصف درجة)**	**(نصف درجة)**	**(نصف درجة)**

(تراعى الحلول الأخرى)

إجابة السؤال الثانى : (ثمانى درجات) الفقرة (أ) أربع درجات والفقرة (ب) أربع درجات

(أ)

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ل & ٤ & ٣ \end{vmatrix} = (٣ل - ١٢) - (ل - ٩) - ٢$$

$\therefore \Delta = ل - ٥$ **(نصف درجة)**

ولكى يكون للمعادلات حل وحيد $\Leftarrow \Delta \neq ٠ \Leftarrow ل \neq ٥$ $\therefore ل \in ح - \{٥\}$ **(نصف درجة)**

وفى حالة $ل = ١ \Leftarrow \Delta = -٤$

$$\Delta_١ = \begin{vmatrix} ٦ & ١ & ١ \\ ١٤ & ٢ & ١ \\ ١٤ & ٤ & ١ \end{vmatrix} = -٤$$ **(نصف درجة)** $\&$ $\Delta_٣ = \begin{vmatrix} ١ & ٦ & ١ \\ ١ & ١٤ & ٣ \\ ٣ & ١٤ & ١ \end{vmatrix} = -٨$ **(نصف درجة)**

$$\Delta_٣ = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٦ \\ ١ & ٢ & ١٤ \\ ٣ & ٤ & ١٤ \end{vmatrix} = -١٢$$ **(نصف درجة)**

$س = \frac{\Delta_١}{\Delta} = ١$ **(نصف درجة)** $\&$ $ص = \frac{\Delta_٢}{\Delta} = ٢$ **(نصف درجة)**

$ع = \frac{\Delta_٣}{\Delta} = ٣$ **(نصف درجة)** $\therefore م.ح = \{(١ ، ٢ ، ٣)\}$

(ب)

$\frac{ح_٤}{ح_٢} = \frac{ح_٤}{ح_٣} \times \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٢٥}{٣}$ **(نصف درجة)**

$\Leftarrow \frac{ن-٣+١}{٣} \times \frac{س}{١} \times \frac{ن-٢+١}{٢} \times \frac{س}{١} = \frac{٢٥}{٣}$ **(درجة)**

$\therefore (ن - ٢)(ن - ١)س^٢ = ٥٠$ ..... (١) **(نصف درجة)**

$\frac{ح_٦}{ح_٥} = ١ \Leftarrow \frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{س}{١} = ١$

$\therefore (ن - ٤)س = ٥$ $\therefore (ن - ٤)^٢ س^٢ = ٢٥$ ..... (٢) **(نصف درجة)**

من (١) ، (٢) $\therefore ٢(ن - ٤)^٢ = (ن - ٢)(ن - ١)$ **(نصف درجة)**

$\therefore ن^٢ - ١٣ن + ٣٠ = ٠$ **(نصف درجة)** $\therefore ن = ٣$ (مرفوض) أ، $ن = ١٠$

من (١) $\therefore س = \frac{٥}{٦}$ **(نصف درجة)** أو $س = -\frac{٥}{٦}$ (مرفوض)

(تراعى الحلول الأخرى)

إجابة السؤال الثالث : (ثمانى درجات) الفقرة (أ) أربع درجات والفقرة (ب) أربع درجات

(أ)

∵ ع + ٢ = ع ت ـ ٢ ت

∴ ع (١ - ت) = -٢ - ٢ ت **(نصف درجة)**

∴ ع = $\frac{-٢ - ٢ت}{١ - ت} \times \frac{١ + ت}{١ + ت}$ **(نصف درجة)**

∴ ع = -٢ ت **(درجة)**

∴ ع = ٢ (حتا $\frac{٣ط}{٢}$ + ت حا $\frac{٣ط}{٢}$) **(نصف درجة)**

∴ $\overrightarrow{ع_{٧}}$ = $\overrightarrow{٢_{٧}}$ هـ $^{\frac{\frac{٣ط}{٢} + ٢ر ط}{٢} ت}$ ، ر = ٠ ، ١ **(نصف درجة)**

عند ر = ٠ ∴ $\overrightarrow{ع_{٧}}$ = $\overrightarrow{٢_{٧}}$ هـ $^{\frac{٣ط}{٤} ت}$ **(نصف درجة)**

عند ر = ١ ∴ $\overrightarrow{ع_{٧}}$ = $\overrightarrow{٢_{٧}}$ هـ $^{\frac{٧ط}{٤} ت}$ **(نصف درجة)**

(ب)

المحدد = $\begin{vmatrix} ص & س & س \\ ص & ع+س & ص \\ ٠ & ع & س+ص \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} ع & س & س \\ ٠ & ع+س & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix}$ **(نصف درجة)**

= ص $\begin{vmatrix} ١ & س & س \\ ١ & ع+س & ص \\ ٠ & ع & س+ص \end{vmatrix}$ + ع $\begin{vmatrix} ١ & س & س \\ ٠ & ع+س & ص \\ ١ & ع & س+ص \end{vmatrix}$ **(نصف درجة)** **(نصف درجة)**

ص٣ - ص١ ص٣ - ص١

= ص $\begin{vmatrix} ١ & ٠س & س \\ ٠ & ع & ص-س \\ ٠ & ع & س+ص \end{vmatrix}$ + ع $\begin{vmatrix} ١ & س & س \\ ٠ & ع+س & ص \\ ٠ & ع-س & ص \end{vmatrix}$ **(نصف درجة)** **(نصف درجة)**

ص٣ - ص٣ ص٣ - ص٣

= ص $\begin{vmatrix} ١ & س & س \\ ٠ & ع & ص-س \\ ٠ & ٠ & ٢س \end{vmatrix}$ - ع $\begin{vmatrix} ١ & س & س \\ ٠ & ص & ع+س \\ ٠ & ٠ & -٢س \end{vmatrix}$ **(نصف درجة)**

= ٢س ص ع + ٢س ص ع **(نصف درجة)** = ٤س ص ع **(نصف درجة)**

(تراعى الحلول الأخرى)

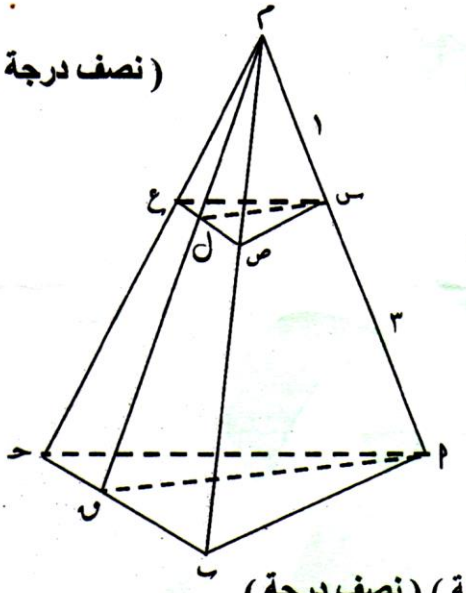
ثانيا : الهندسة الفراغية

إجابة السؤال الرابع : (سبع درجات) الفقرة (أ) أربع درجات والفقرة (ب) ثلاث درجات

(أ)

رقم الجزئية	الإجابة الصحيحة	درجة الجزئية
١	متوازيان	درجة
٢	١٣	درجة
٣	الهرم القائم هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها	درجة
٤	متساوية فى القياس	درجة

(ب)



(نصف درجة)

$\because \frac{م س}{س أ} = \frac{م ص}{ص ب} = \frac{١}{٣}$ (معطى)

$\therefore \overline{س ص} \parallel \overline{أ ب}$ ..... (١) **(نصف درجة)**

بالمثل

$\frac{م ص}{ص ب} = \frac{م ع}{ع حـ} = \frac{١}{٣}$ (معطى)

$\therefore \overline{ص ع} \parallel \overline{ب حـ}$ ..... (٢) **(نصف درجة)**

من (١) ، (٢) ∴ المستوى س ص ع // المستوى أ ب حـ (نظرية) **(نصف درجة)**

∵ المستوى م أ ن يقطعهما فى $\overleftrightarrow{س ل}$ ، $\overleftrightarrow{أ ن}$

$\therefore \overline{س ل} \parallel \overline{أ ن}$ **(نصف درجة)**

$\therefore \frac{س ل}{أ ن} = \frac{م س}{م أ} = \frac{١}{٤}$

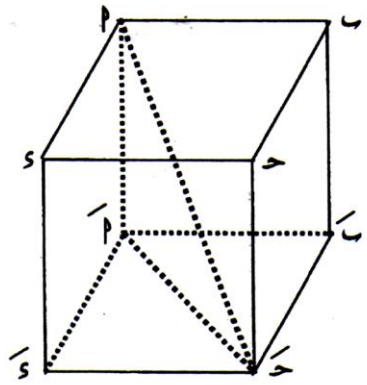
$\therefore$ أ ن = ٤ س ل **(نصف درجة)** وهو المطلوب

(تراعى الحلول الأخرى)

إجابة السؤال الخامس : (سبع درجات) الفقرة (أ) ثلاث درجات والفقرة (ب) أربع درجات

(أ)

(نصف درجة)



فى Δ أأ،حـ،

(أ حـ،)² = (أأ،)² + (أ،حـ،)² **(نصف درجة)**

= (أأ،)² + (أ،ء،)² + (حـ ء،)² **(نصف درجة)**

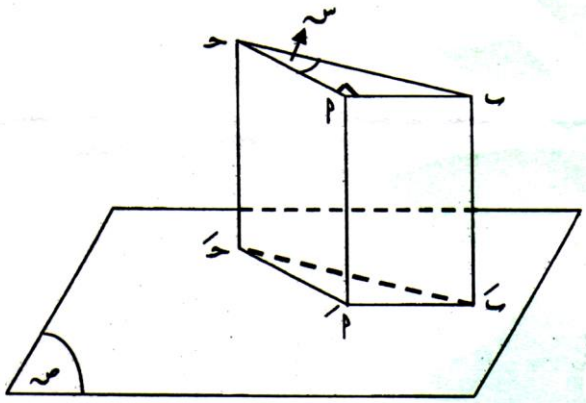
∴ (أ حـ،)² = ٣ ل² **(نصف درجة)**

∴ أ حـ، = $\sqrt{٣}$ ل **(نصف درجة)**

بالمثل

ب ء، = ب، ء = أ،حـ = $\sqrt{٣}$ ل **(نصف درجة)**

(ب)



∵ $\overline{أ ب}$ // المستوى هـ

، $\overline{أ ب}$ ⊂ المستوى أ ب ب، أ، **(نصف درجة)**

المستوى أ ب ب، أ، ∩ هـ = $\overline{أ، ب،}$

∴ $\overline{أ ب}$ // $\overline{أ، ب،}$ **(درجة)**

∵ $\overline{حـ أ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ $\overline{حـ أ}$ ⊥ $\overline{أ، ب،}$ **(درجة)**

، ∵ $\overline{حـ حـ،}$ ⊥ المستوى هـ

، $\overline{حـ أ}$ مائل على المستوى هـ

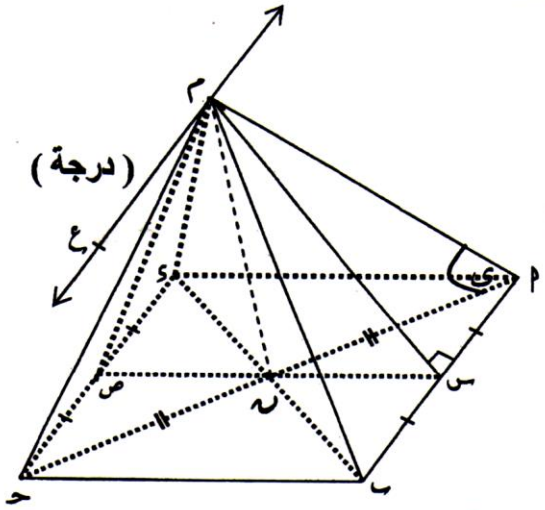
∴ $\overline{حـ أ}$ ⊥ $\overline{أ، ب،}$ **(نصف درجة)**

∴ مسقطه $\overline{حـ، أ}$ ⊥ $\overline{أ، ب،}$ **(نصف درجة)**

∴ Δ أ، ب، حـ، قائم الزاوية فى أ، **(نصف درجة)** وهو المطلوب

(تراعى الحلول الأخرى)

إجابة السؤال السادس : (سبع درجات)



(أولا)

∵ $\overline{مـن}$ ⊥ المستوى ا ب حـ ء　(نصف درجة)

، $\overline{مـن}$ ⊂ المستوى م ا حـ

∴ المستوى م ا حـ ⊥ المستوى ا ب حـ ء　(درجة)

(ثانيا)

نفرض أن طول ضلع المربع ا ب حـ ء يساوى ٢ ل

∴ م س = م ص = ٢ ل

، ا س = ل　(نصف درجة)

∵ مسقط $\overline{مـا}$ على المستوى ا ب حـ ء هو $\overline{نـا}$

∴ ∠ م ا ن هى زاوية ميل $\overline{مـا}$ على المستوى ا ب حـ ء　(نصف درجة)

∵ ا حـ = ٢ $\sqrt{٢}$ ل　∴ ا ن = $\sqrt{٢}$ ل　(نصف درجة)

ولكن

$(م ا)^{٢} = (م س)^{٢} + (س ا)^{٢}$

∴ $(م ا)^{٢} = ٥ ل^{٢}$　∴ م ا = $\sqrt{٥}$ ل　(نصف درجة)

∴ جتاى = $\frac{ا ن}{ا م} = \frac{\sqrt{٢} ل}{\sqrt{٥} ل} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٥}} = \frac{\sqrt{١٠}}{٥}$　(نصف درجة)

(ثالثا)

نرسم $\overline{مـع}$ // $\overline{اب}$　∴ $\overline{مـع}$ // $\overline{ءحـ}$

∵ $\overline{مـس}$ ⊥ $\overline{اب}$　∴ $\overline{مـس}$ ⊥ $\overline{مـع}$　(نصف درجة)　بالمثل $\overline{مـص}$ ⊥ $\overline{مـع}$　(نصف درجة)

ولكن $\overleftrightarrow{مـع}$ هو خط تقاطع المستويين م ا ب ، م حـ ء

∴ ∠ س م ص هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (س – $\overleftrightarrow{مـع}$ – ص)　(نصف درجة)

ولكن Δ س م ص متساوى الأضلاع

∴ ق (∠ س م ص) = ٦٠°　(نصف درجة)

(تراعى الحلول الأخرى)

انتهى نموذج الإجابة