الإتـــــــــزان العـــــام

نظرية : إذا أنعدم مجموع القوى لمجموعة ما و إنعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة كانت المجموعة متزنة

الشروط الكافية و اللازمة لإتزان مجموعة من القوى :

لكى تتوازن مجموعة من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط الآتية :

(١) ينعدم متجه مجموع القوى

" ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى إتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها "

(٢) ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

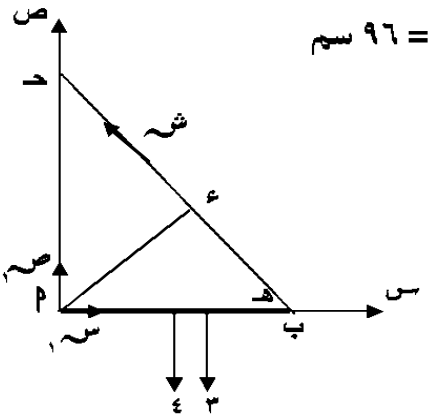
" ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها "

أى : س = ٠ ، ص = ٠ ، ج = ٠

مثـــال : أ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم و مقدار وزنه ٤ نيوتن يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى علق ثقل قدره ٣ نيوتن فى نقطة من القضيب تبعد ٨٠ سم عن أ و حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بالطرف ب للقضيب و يتصل طرفه الآخر بنقطة على الحائط تبعد ١٦٠ سم رأسياً أعلى أ أوجد الشد فى الخيط و رد فعل المفصل

الحـــــــــــل

من الشكل المقابل :



أ ب = ١٢٠ سم ، أ ب = ١٦٠ سم ∴ ب حـ = ٢٠٠ سم ، أ ء = ٩٦ سم

نفرض أن مركبتى رد فعل المفصل ر هما س١ ، ص١

حيث : ر٢ = س١٢ + ص١٢

من شروط التوازن :

س = ٠ ∴ س١ − ش حتا هـ = ٠

∴ س١ = $\frac{٣}{٥}$ ش (١)

، ص = ٠ ∴ ص١ − ٣ − ٤ + ش حا هـ = ٠

∴ ص١ = ٧ − $\frac{٤}{٥}$ ش (٢)

، ج١ = ٠ ∴ ٩٦ ش − ٤ × ٦٠ − ٣ × ٨٠ = ٠

∴ ٩٦ ش = ٤٨٠ ∴ ش = ٥ نيوتن

، لإيجاد " رد فعل المفصل " ر بالتعويض فى كل من (١) ، (٢) ينتج :

س١ = $\frac{٣}{٥}$ × ٥ = ٣ ، ص١ = ٧ − $\frac{٤}{٥}$ × ٥ = ٣ ∴ ر = ٣ √٢ نيوتن

ظا ل = $\frac{٣}{٣}$ = ١ ∴ ل = ٤٥°

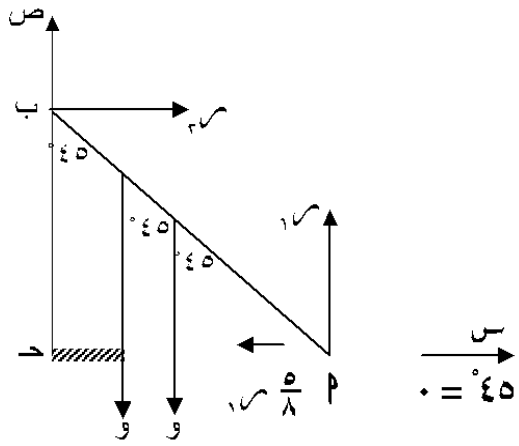
∴ رد فعل المفصل = ٣ √٢ نيوتن و يصنع زاوية قياسها ٤٥°

مثـــ٢ـــال : يستند سلم منتظم وزنه " و " بطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة و يطرفه الآخر على حائط رأسى أملس بحيث يقع السلم فى مستو رأسى و يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان معامل الإحتكاك بين السلم و الأرض $\frac{5}{8}$ أوجد طول المسافة التى يمكن أن يصعدها رجل وزنه " و " قبل أن ينزلق ثم أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند منتصف السلم لكى يتمكن الرجل من الصعود حتى نهاية

الحـــــــــــل

نفرض أن طول السلم = ل ، أن المسافة التى يصعدها الرجل = ف قبل أن ينزلق السلم

∴ قوة الإحتكاك عند أ = $\frac{5}{8}$ $ر_1$



كما بالشكل المقابل و بتحليل القوى ينتج :

$ر_2 - \frac{5}{8} ر_1 = 0$ (١)

، $ر_1 - و - و = 0$ (٢)

، $ج_1 = 0$

∴ و × $\frac{1}{2}$ ل × حا٤٥° + و × ف × حا٤٥° − $ر_2$ × ل × حتا٤٥° = ٠

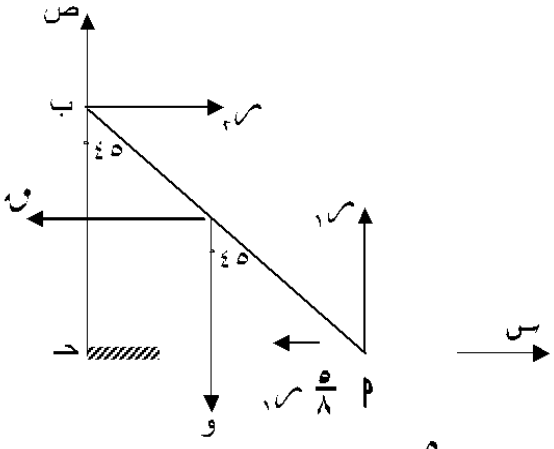
بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :

∴ وف = ل $ر_2$ − $\frac{1}{2}$ وَل = $\frac{5}{4}$ وَل − $\frac{1}{2}$ وَل ∴ ف = $\frac{5}{4}$ ل

أى أن : الرجل يصعد $\frac{5}{4}$ طول السلم قبل أن ينزلق السلم

بفرض أن مقدار القوة الأفقية = ق

بتحليل القوى فى الشكل المقابل :



∴ $ر_2 - ق - \frac{5}{8} ر_1 = 0$ (١)

، $ر_1 - و - و = 0$ (٢)

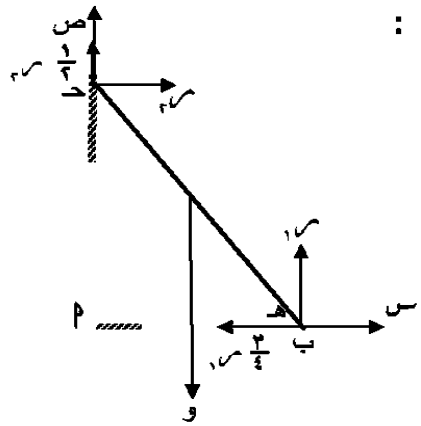
، $ج_ب = 0$

∴ $ر_1$ × ل حا٤٥° − و × $\frac{1}{2}$ ل × حا٤٥° − ق × $\frac{1}{2}$ ل × حتا٤٥° − $\frac{5}{8}$ $ر_1$ × ل × حتا٤٥° = ٠

∴ $ر_1 - \frac{1}{2}$ و − $\frac{1}{2}$ ق − $\frac{5}{8}$ $ر_1$ = ٠ بالتعويض من (٢) ∴ ق = $\frac{1}{2}$ و

مثـــ٣ـــال : قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى معامل الإحتكاك بينه و بين القضيب يساوى $\frac{1}{2}$ و بطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الإحتكاك بينه و بين القضيب يساوى $\frac{3}{4}$ أوجد زاوية ميل القضيب على الأفقى عندما يكون على وشك الإنزلاق

الحـــــــــــل



بتحليل القوى فى الشكل المقابل و نفرض أن طول السلم = ٢ ل :

$ر_٢ - \frac{3}{4} ر_١ = ٠$ ∴ $ر_٢ = \frac{3}{4} ر_١$

$ر_١ + \frac{1}{2} ر_٢ - و = ٠$ ∴ $ر_١ + \frac{1}{2} ر_٢ = و$

بالتعويض : $و = ر_١ + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} ر_١ = \frac{11}{8} ر_١$

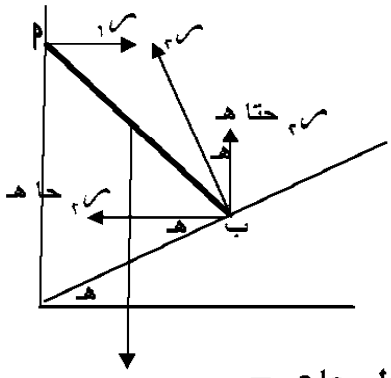
∴ $و = \frac{11}{6} ر_٢$

∴ $ج_ب = و \times ل \text{ حتا هـ} - ر_٢ \times ٢ ل \text{ جا هـ} - \frac{1}{2} ر_٢ \times ٢ ل \text{ حتا هـ} = ٠$

بالتعويض ينتج : $\frac{11}{6} ر_٢ \text{ حتا هـ} - ٢ ر_٢ \text{ جا هـ} - ر_٢ \text{ حتا هـ} = ٠$

∴ $\frac{5}{6} \text{ حتا هـ} = ٢ \text{ جا هـ}$ ∴ $\text{ظا هـ} = \frac{5}{12}$ ∴ السلم يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{5}{12}$

مثـــ٤ـــال : أ ب قضيب منتظم يرتكز طرفه العلوى أ على حائط رأسى أملس و بطرفه السفلى ب على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإذا كان السلم يميل على الحائط بزاوية قياسها ى أثبت أن ظا ى = ٢ ظا هـ



الحـــــــــــل

بتحليل القوى فى الشكل المقابل و نفرض أن طول السلم = ٢ ل :

$ر_١ - ر_٢ \text{ جا هـ} = ٠$ ∴ $ر_١ = ر_٢ \text{ جا هـ}$

$ر_٢ \text{ جتا هـ} - و = ٠$ ∵ $و = ر_٢ \text{ جتا هـ}$

∴ $ج_أ = ر_٢ \text{ جا هـ} \times ٢ ل \text{ جتا ى} + و \times ل \text{ جا ى} - ر_٢ \text{ جتا هـ} \times ٢ ل \text{ جا ى} = ٠$

∴ $٢ ر_٢ \text{ جا هـ جتا ى} + ر_٢ \text{ جتا هـ جا ى} = ٢ ر_٢ \text{ جتا هـ جا ى}$

∴ $٢ ر_٢ \text{ جا هـ جتا ى} = ر_٢ \text{ جتا هـ جا ى}$

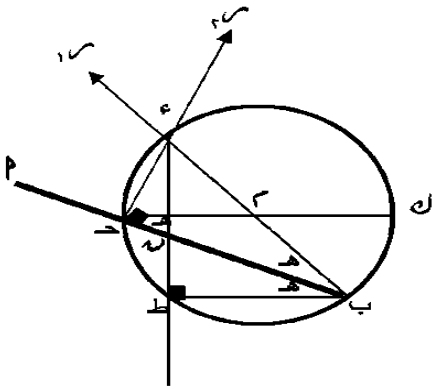
∴ $٢ \text{ جا هـ جتا ى} = \text{جتا هـ جا ى}$

∴ $٢ \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{جا ى}}{\text{جتا ى}}$ ∴ $\text{ظا ى} = ٢ \text{ ظا هـ}$

مثـــال : أ ب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم وضع داخل وعاء على نصف كرة قاعدتها المستوية أفقية و السطح الداخلي للوعاء أملس و طول نصف قطره ٥ $\sqrt{٣}$ سم فإذا إرتكز القضيب بالطرف ب على السطح الداخلي للوعاء و بإحدى نقطه حـ على الحافة المستوية للوعاء أوجد طول الجزء أ حـ

الحـــــــــــل

من هندسة الشكل :



ق (∠ م حـ أ) = ق (∠ ط أ حـ) = ق (∠ ك حـ أ) = هـ

ب ط = ب ء جتا٢ هـ = ١٠ $\sqrt{٣}$ جتا٢ هـ

، ب ط = ب ن جتا هـ = ١٠ جتا هـ

" ن منتصف القضيب "

∴ ١٠ $\sqrt{٣}$ جتا٢ هـ = ١٠ جتا هـ

∴ ١٠ $\sqrt{٣}$ (٢ جتا٢ هـ − ١) = ١٠ جتا هـ

٢ $\sqrt{٣}$ جتا٢ هـ − $\sqrt{٣}$ = جتا هـ

٢ $\sqrt{٣}$ جتا٢ هـ − جتا هـ − $\sqrt{٣}$ = ٠

(٢ جتا هـ − $\sqrt{٣}$) ($\sqrt{٣}$ جتا هـ + ١) = ٠

∴ جتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

∴ ب حـ = ب ء جتا هـ = ١٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٥ سم

∴ ن حـ = ب حـ − ب ن = ١٥ − ١٠ = ٥ سم ∴ أ حـ = ١٠ − ٥ = ٥ سم

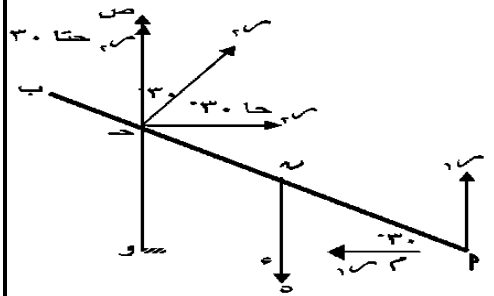
مثـــال : أ ب ساق منتظمة وزنها ٥ ث كجم و طولها ٣٠ سم ترتكز بطرفها أ على أرض أفقية خشنة و ترتكز عند إحدى نقطها حـ على وتد أملس يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٢.٥ سم فإذا كانت الساق على وشك الإنزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠° أوجد قوة رد فعل الوتد و كذلك معامل الإحتكاك بين الساق و الأرض

الحـــــــــــل

بتحليل القوى كما بالشكل في الإتجاهين و $\overleftarrow{س}$ ، و $\overleftarrow{ص}$

، ∵ الساق متزنة ∴ $\overleftarrow{س}$ = ٠

∴ $س_٢$ جا ٣٠° − م $س_١$ = ٠



∴ $\frac{١}{٢}$ $س_٢$ = م $س_١$

∴ $س_٢$ = ٢ م $س_١$ (١)

، ص = ٠ ∴ $ص_١$ + $س_٢$ جتا ٣٠° − ٥ = ٠

∴ $س_١$ = ٥ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $س_٢$ (٢)

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة أ = ٠

∴ ٥ × أ ء − $س_٢$ × أ حـ = ٠

∴ ٥ × ١٥ جتا ٣٠° − $س_٢$ × ٢ حـ و = ٠ ∴ ٥ × ١٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $س_٢$ × ٢ × ١٢.٥ = ٠

∴ $س_٢$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ث كجم " مقدار قوة رد فعل الوتد "

بالتعويض في (٢) ينتج : $س_١$ = $\frac{١١}{٤}$ ث كجم

بالتعويض في (١) ينتج : م = $\frac{٣\sqrt{٣}}{١١}$ معامل الإحتكاك بين الساق و الأرض

مثـــال ٧ : ا ب قضيب منتظم وزنه ٤٠ نيوتن يتصل بطرفه (ا) بمفصل مثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه (ب) ثقلاً قدره ٢٠ نيوتن . حفظ القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية ٣٠° بواسطة حبل مساو للقضيب فى الطول ويتصل أحد طرفيه بالطرف (ب) للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة (هـ) من الحائط تقع رأسياً أعلى (ا) وعلى بعد منها يساوى طول القضيب أوجد

(١) مقدار الشد فى الحبل (٢) مقدار قوة رد فعل المفصلة عند ا واتجاهه

الحـــــــــــل

نفرض أن طول القضيب (ل) فإن Δ ا ب جـ متساوى الأضلاع ورسم ب ن ⊥ ا حـ

∴ (ق ∠ جـ ب ن) = ق(∠ ا ب ن) = = ٣٠°

نفرض أن المركبتين الجبريتين لرد فعل المفصل عند ا

هما شـ١ ، شـ٢ فى الإتجاهين المتعامدين ا س ، ا ص

بتحليل القوى فى إتجاه ا س حيث سـ = ٠

∴ سـ١ = شـ حتا ٣٠° = صفر ..... ∴ سـ١ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ شـ ..... (١)

بتحليل القوى فى إتجاه ا ص حيث صـ = ٠

∴ صـ١ + شـ جا ٣٠° − ٤٠ − ٢٠ = صفر ∴ صـ١ = ٦٠ + $\frac{١}{٢}$ شـ

∵ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة ا = صفر

∴ − ٤٠ × ا ء − ٢٠ × ا م + شـ × ا ك = صفر

∴ − ٤٠ × $\frac{ل}{٢}$ جتا ٣٠° − ٢٠ ل جتا ٣٠° + شـ × $\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠

∴ − ١٠ ل $\sqrt{٣}$ − ١٠ ل $\sqrt{٣}$ + $\frac{ل\sqrt{٣}}{٢}$ شـ = ٠ ∴ الشد فى الحبل شـ = ٤٠ نيوتن

بالتعويض ∴ سـ١ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٤٠ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، صـ١ = ٦٠ − $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ = ٤٠ نيوتن

مقدار قوة رد فعل المفصل عند ا هى

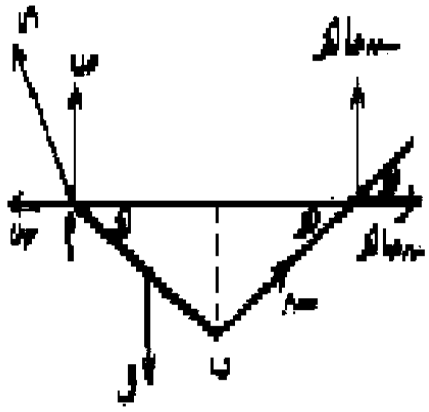
ر = $\sqrt{(٢٠\sqrt{٣})^{٢} + (٤٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٢٠٠ + ١٦٠٠}$ = ٢٠ $\sqrt{٧}$ نيوتن

وبفرض أن (ل) هو قياسالزاوية التى يصنعها خط عمل قوة رد فعل المفصل مع ا س

∴ طا (ل) = $\frac{٤٠}{٢٠\sqrt{٣}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}\times٢}{٣}$ = ١,١٥٤٧ ∴ ل = ٦′ ٤٩°

∴ مقدار قوة رد فعل المفصل = ٢٠ $\sqrt{٧}$ نيوتن ويصنع زاوية قياسها ٦′ ٤٩° مع ا س

مثـــال : قضيب منتظم وزنه (و) يتصل أحد ضرفيه بمفصل ويتصل طرفه الآخر بخيط مربوط فى نقطة فى نفس المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث كان قياس زاوية ميل كل من القضيب والخيط على الأفقى مسو (هـ) أثبت أن رد فعل المفصل يساوى $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{8 + \text{قتا}^2 هـ}$



الحـــــــل

بفرض أن مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند أ هما س ، ص

وأن طول القضيب أ ب = ل

∴ معادلات الإتزان هى : س = ش جتا هـ (١) ، ص = ش جا هـ (٢)

ج أ = ش جا هـ × ٢ ل جتا هـ − و × $\frac{1}{2}$ ل جتا هـ = صفر

أى: ش = $\frac{1}{4}$ وقتا هـ بالتعويض س = $\frac{1}{4}$ وظتا هـ ، ص = و − $\frac{1}{4}$ و = $\frac{3}{4}$ و

∴ ر (رد فعل المفصل) = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ = $\sqrt{\frac{1}{16}\text{و}^2 \text{ظتا}^2 هـ + \frac{9}{16}\text{و}^2}$ = $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{\text{ظتا}^2 هـ + 9}$

ر = $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{(\text{قتا}^2 هـ - 1) + 9}$ = $\frac{1}{4}$ و $\sqrt{8 + \text{قتا}^2 هـ}$ وهو المطلوب