



أجب عن الأسئلة التالية:

(1) [8 درجات] إذا كانت $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $f(x) = \cos^{-1}x$ ، فأوجد دالتي التحصيل $f \circ g$ ،

$g \circ g$ وحدد نطاق كل منهما، ثم أوجد المشتقة الأولى لكل من الدالتين $f \circ g$ ، $g \circ g$ علي نطاق اشتقاقهما.

(2) [9 درجات] إذا علمت أن $\forall x \in]0, \pi/2[$ ، $\sin x < x < \tan x$ ، فبرهن أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، ثم

احسب النهايتين التاليتين (إن وجدت):

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{5}{x}\right) \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x \cos 5x|}{x}$$

(3) [6 درجات] إذا كانت $f(x) = \begin{cases} a+x+1 & , x \leq 0 \\ 3+b \frac{\sin(x^2)}{x} & , x > 0 \end{cases}$ ، فأوجد قيمة الثابت a لكي تكون

الدالة f متصلة علي \mathbb{R} ، ومن ثم أوجد قيمة الثابت b لتصبح الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = 0$.

(4) [6 درجات] إذا كانت $y = \sin^{-1}x$ ، فبرهن باستخدام قانون مشتقة الدالة العكسية أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{، ومن ثم أثبت أن } (1-x^2)y'' - xy' = 0 .$$

(5) [8 درجات] أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية علي نطاق اشتقاقها:

$$(i) y = x^x \sec^{-1} \sqrt{x} \quad (ii) xy^2 + \sin y = 1$$

$$(iii) x = 3^t + \cos t \quad , \quad y = \ln(t^2 + 1)^3 .$$

(6) [8 درجات] استنتج المشتقة النونية للدالة $f(x) = e^{ax+b}$ ، حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، ثم اكتب واستخدم

قاعدة ليبنتز لإيجاد المشتقة النونية للدالة $h(x) = (1-x)^2 e^{-x+1}$ ومن ذلك استنتج قيمة $h^{(3)}(0)$

وضعها في أبسط صورة.

(7) [6 درجات] حقق شروط قاعدة لوبيتال واستخدمها لحساب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \cot x \tan^{-1} x$.

(8) [9 درجة] ابحث أطراف الدالة $f(x) = x^2(x^2 - 2)$ موضعاً فترات التزايد وفترات التناقص والقيم

العظمي والصغري المحلية وفترات التقعر ونقاط الانقلاب ، ثم ارسم منحناها.

انتهت الأسئلة.