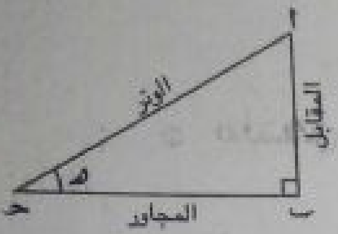
ملخص لأهم نقاط التفاضل والتكامل

مراجعة على بعض ما سبق دراسته فى السنوات السابقة

أهم قوانين حساب المثلثات

* فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب :

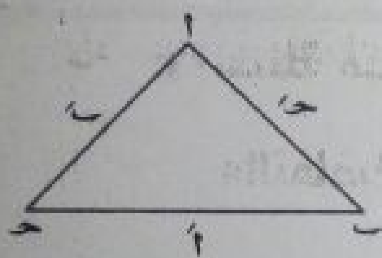


① جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

② جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

③ ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

* فى أى مثلث أ ب حـ :



① قاعدة الجيب :

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حَ}}{\text{جا حـ}} = 2\ \text{نق}$$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ

② قاعدة جيب التمام :

$\text{أَ}^2 = \text{بَ}^2 + \text{حَ}^2 - 2\,\text{بَ حَ جتا أ}$ ، $\text{بَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{حَ}^2 - 2\,\text{أَ حَ جتا ب}$ ، $\text{حَ}^2 = \text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - 2\,\text{أَ بَ جتا حـ}$

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^2 + \text{حَ}^2 - \text{أَ}^2}{2\,\text{بَ حَ}} \quad ، \quad \text{جتا ب} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{حَ}^2 - \text{بَ}^2}{2\,\text{أَ حَ}} \quad ، \quad \text{جتا حـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{حَ}^2}{2\,\text{أَ بَ}}$$

* العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية :

① $\text{جتا}^2\ \text{هـ} + \text{جا}^2\ \text{هـ} = 1$ ② $1 + \text{ظا}^2\ \text{هـ} = \text{قا}^2\ \text{هـ}$ ③ $1 + \text{ظتا}^2\ \text{هـ} = \text{قتا}^2\ \text{هـ}$

④ جا هـ قتا هـ = ١ ، جتا هـ قا هـ = ١ ، ظا هـ ظتا هـ = ١

⑤ ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ ، ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

* الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين :

① جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

② جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

③ ظا (أ ± ب) = $\frac{\text{ظا أ} \pm \text{ظا ب}}{1 \mp \text{ظا أ ظا ب}}$

* **الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية :**

① $\text{جا } ٢\text{أ} = ٢ \text{ جا أ جتا أ}$

② $\text{جتا } ٢\text{أ} = \text{جتا}^٢\text{أ} - \text{جا}^٢\text{أ}$

$= ٢ \text{ جتا}^٢\text{أ} - ١$

$= ١ - ٢ \text{ جا}^٢\text{أ}$

③ $\text{ظا } ٢\text{أ} = \dfrac{٢ \text{ ظا أ}}{١ - \text{ظا}^٢\text{أ}}$

① $\text{جا أ} = ٢ \text{ جا } \dfrac{\text{أ}}{٢} \text{ جتا } \dfrac{\text{أ}}{٢}$

② $\text{جتا أ} = \text{جتا}^٢ \dfrac{\text{أ}}{٢} - \text{جا}^٢ \dfrac{\text{أ}}{٢}$

$= ٢ \text{ جتا}^٢ \dfrac{\text{أ}}{٢} - ١$

$= ١ - ٢ \text{ جا}^٢ \dfrac{\text{أ}}{٢}$

③ $\text{ظا أ} = \dfrac{٢ \text{ ظا } \frac{\text{أ}}{٢}}{١ - \text{ظا}^٢ \frac{\text{أ}}{٢}}$

أهم قوانين النهايات

① $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن أ}^{\text{ن}-١}$

② $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}}{\text{س}^\text{م} - \text{أ}^\text{م}} = \dfrac{\text{ن}}{\text{م}} \text{ أ}^{\text{ن}-\text{م}}$

③ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س} + \text{أ})^\text{ن} - \text{أ}^\text{ن}}{\text{س}} = \text{ن أ}^{\text{ن}-١}$

④ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ وأيضًا $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$ حيث س بالقياس الدائرى.

⑤ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$ وأيضًا $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ظا أس}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$ حيث س بالقياس الدائرى.

⑥ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نها}} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} = \text{صفر}$ حيث س بالقياس الدائرى.

⑦ **نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة :**

إذا كانت : أ ∈ مجال الدالة د فإن : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نها}} \text{ د (س)} = \text{ل}$

إذًا وفقط إذا كان : $\text{د}(\text{أ}^+) = \text{د}(\text{أ}^-) = \text{ل}$

اتصال الدالة

إذا كانت الدالة د معرفة على فترة وكانت أ ∈ هذه الفترة فإن الدالة د تكون متصلة عند س = أ

إذا وفقط إذا كانت : $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نها}} \text{ د (س)} = \text{د (أ)}$

أى أن : $\boxed{\text{د}(\text{أ}^+) = \text{د}(\text{أ}^-) = \text{د (أ)}}$

قابلية الاشتقاق

① يقال أن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ ∈ مجال د)

إذا وفقط إذا كانت $\boxed{\text{د}'(\text{أ}) \text{ لها وجود}}$ حيث $\text{د}'(\text{أ}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$

② إذا كان أ ∈ مجال د :

$\boxed{\text{د}'(\text{أ}^{+}) = \text{د}'(\text{أ}^{-})}$ — فإن ← الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ ويكون $\text{د}'(\text{أ}) = \text{د}'(\text{أ}^{+}) = \text{د}'(\text{أ}^{-})$

$\boxed{\text{د}'(\text{أ}^{+}) \neq \text{د}'(\text{أ}^{-})}$ — فإن ← الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

③ المشتقة الأولى للدالة د عند النقطة (أ ، د (أ)) = د' (أ)

= معدل تغير الدالة د عند النقطة (أ ، د (أ))

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{أ} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{أ})}{\text{هـ}}$ (بشرط وجود النهاية)

= ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (أ ، د (أ))

قواعد الاشتقاق

① إذا كانت : د (س) = أ (حيث أ ثابت) فإن : د' (س) = صفر

② إذا كانت : ص = [أ د (س)] (حيث أ ثابت) فإن : ص' = أ د' (س)

③ إذا كانت : $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}}$ (حيث ن ∈ ح) فإن : $\text{ص}' = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$

④ إذا كانت : ص = د (س) ± ر (س) فإن : ص' = د' (س) ± ر' (س)

⑤ إذا كانت : ص = د (س) × ر (س) فإن : ص' = د (س) × ر' (س) + ر (س) × د' (س)

أي أن : ص' = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى

⑥ إذا كانت : $\text{ص} = \frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ فإن : $\text{ص}' = \frac{\text{ر}(\text{س}) \times \text{د}'(\text{س}) - \text{د}(\text{س}) \times \text{ر}'(\text{س})}{(\text{ر}(\text{س}))^{٢}}$

أي أن : $\text{ص}' = \frac{(\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط}) - (\text{البسط} \times \text{مشتقة المقام})}{(\text{المقام})^{٢}}$ حيث المقام : ر (س) ≠ ٠

⑦ قاعدة السلسلة :

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع ، ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\boxed{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}}$

⑧ إذا كانت : ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن : $\boxed{\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن ص}^{\text{ن}-1} \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}$

⑨ إذا كانت : ص = [د (س)]$^{\text{ن}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن}\,[\text{د (س)}]^{\text{ن}-1} \times \text{د}'\text{(س)}$

أى أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن (القوس)}^{\text{ن}-1}$ × مشتقة ما بداخل القوس

⑩ إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{د (س)}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{د (س)}}} \times \text{د}'\text{(س)}$

أى أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{٢ (الجذر)}}$ × مشتقة ما تحت الجذر

⑪ إشتقاق الدوال المثلثية :

(١) إذا كانت : ص = جا د (س) فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'\text{(س) جتا د (س)}$

(٢) إذا كانت : ص = جتا د (س) فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{د}'\text{(س) جا د (س)}$

(٣) إذا كانت : ص = ظا د (س) فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}'\text{(س) قا}^2\text{ د (س)}$

أهم نقاط الهندسة التحليلية

* لأى نقطتين أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) فى المستوى الإحداثى :

① البعد بين النقطتين أ ، ب (طول $\overline{\text{أب}}$) = $\sqrt{(\text{س}_2-\text{س}_1)^2+(\text{ص}_2-\text{ص}_1)^2}$

② إذا كانت حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ فإن : حـ = $\left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{2}\right)$

* **ميل الخط المستقيم :**

① ميل الخط المستقيم الذى معادلته : أس + ب ص + حـ = ٠ هو $\boxed{\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}}$

② ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : (س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) يساوى $\boxed{\frac{\text{ص}_2-\text{ص}_1}{\text{س}_2-\text{س}_1}}$

③ ميل المستقيم = ظا هـ

حيث (هـ) هى قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

④ إذا كان : $\overrightarrow{ى} = (أ ، ب)$ متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{ب}{أ}$

⑤ ميل المستقيم يكون موجبًا إذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

⑥ ميل المستقيم يكون سالبًا إذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

⑦ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

⑧ ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) = $\frac{1}{صفر}$ «غير معرف»

⑨ المستقيمان المتوازيان ميليهما متساويان.

⑩ المستقيمان المتعامدان حاصل ضرب ميليهما = -1

* **معادلة الخط المستقيم :**

① المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة $ن = (س_1 ، ص_1)$ والمتجه $\overrightarrow{ى} = (أ ، ب)$

متجه اتجاه له هى $\boxed{\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} + ك\,\overrightarrow{ى}}$

② المعادلة الكارتيزية :

* بدلالة نقطة عليه $(س_1 ، ص_1)$ والميل (م) هى $\boxed{(ص - ص_1) = م\,(س - س_1)}$

* بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هى $\boxed{ص = م\,س + حـ}$

* بدلالة الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات هى $\boxed{\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = 1}$

ملاحظات

① معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $\boxed{ص = ك}$

② معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $\boxed{س = ل}$

③ معادلة محور السينات هى $\boxed{ص = 0}$

④ معادلة محور الصادات هى $\boxed{س = 0}$

⑤ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى $\boxed{ص = م\,س}$

* **معادلة الدائرة :**

① معادلة الدائرة التى مركزها م (أ ، ب) وطول نصف قطرها نق هى :

$$(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = نق^٢$$

② الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ح = ٠$ حيث :

مركز الدائرة : م = (– ل ، – ك) وطول نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - ح}$

أهم النقاط المرتبطة بالعدد (هـ)

* **العدد النيبيرى (هـ) هو عدد غير نسبى ٢ < هـ < ٣**

$$هـ = ١ + \frac{١}{|١} + \frac{١}{|٢} + \frac{١}{|٣} + \cdots\cdots = \sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{١}{|ن} \text{ (متسلسلة تايلور)}$$

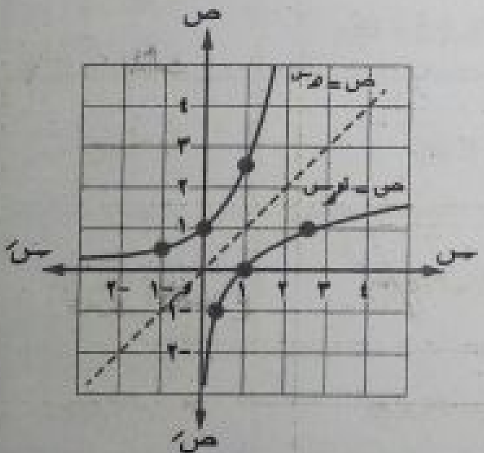
العدد هـ = ٢,٧١٨٢٨

* **الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى :**

د : ح ⟵ ح$^+$ حيث د (س) = هـ^س

دالة أسية أساسها (هـ) وهى دالة أحادية مجالها = ح

، مداها = ح$^+$ ومنحناها يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (١ ، هـ)



* **دالة اللوغاريتم الطبيعى :**

د : ح$^+$ ⟵ ح حيث د (س) = لو$_هـ$ س

دالة لوغاريتمية أساسها (هـ) وهى دالة أحادية مجالها = ح$^+$

، مداها = ح ومنحناها يمر بالنقطتين (١ ، ٠) ، (هـ ، ١)

لاحظ أن

* **من الشكل السابق نجد أن :** $\lim_{س \to \infty}$ لو$_هـ$ س = ∞ ، $\lim_{س \to ٠}$ لو$_هـ$ س = – ∞

* **بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي :**

إذا كان : س ، ص $\in$ ح$^{+}$ ، ن $\in$ ح مع مراعاة أن يكون الأساس $\in$ ح$^{+}$ − {١} فإن :

① لو$_{\text{هـ}}$ هـ = ١

② لو$_{\text{هـ}}$ ١ = صفر

③ لو$_{\text{هـ}}$ س$^{\text{ن}}$ = ن لو$_{\text{هـ}}$ س

④ هـ$^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ = س

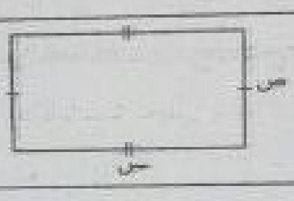
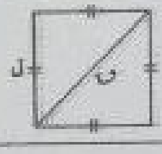
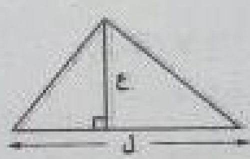
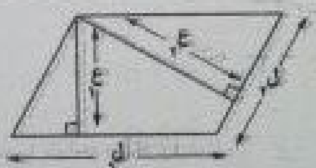
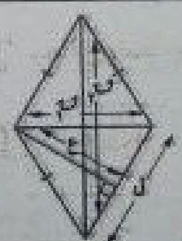
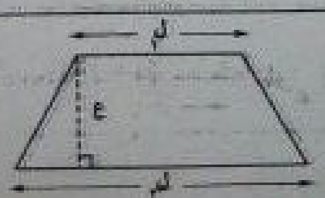
⑤ لو$_{\text{هـ}}$ س ص = لو$_{\text{هـ}}$ س + لو$_{\text{هـ}}$ ص

⑥ لو$_{\text{هـ}}$ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = لو$_{\text{هـ}}$ س − لو$_{\text{هـ}}$ ص

⑦ لو$_{\text{ص}}$ س = $\frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}}$

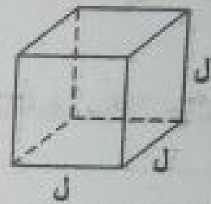
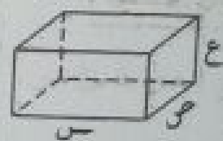
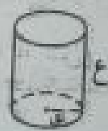
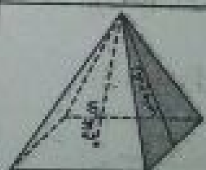
⑧ لو$_{\text{هـ}}$ س × لو$_{\text{س}}$ هـ = ١

مساحات ومحيطات بعض الأشكال الهندسية

المستطيل		المحيط = ٢ (س + ص) المساحة = س × ص
المربع		المحيط = ٤ ل المساحة = ل^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ق^{٢}
المثلث		المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ل × ع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى أى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما
متوازى الأضلاع		المحيط = ٢ (ل$_{١}$ + ل$_{٢}$) المساحة = ل$_{١}$ × ع$_{١}$ = ل$_{٢}$ × ع$_{٢}$
المعين		المحيط = ٤ ل المساحة = ل × ع = $\frac{١}{٢}$ ق$_{١}$ × ق$_{٢}$
شبه المنحرف		المحيط = مجموع أطوال أضلاعه الأربعة المساحة = $\frac{١}{٢}$ (ل$_{١}$ + ل$_{٢}$) × ع

الدائرة		المحيط = ٢ π نق المساحة = π نق^{٢}
القطاع الدائرى		المحيط = ٢ نق + ل المساحة = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ هـ^{ء} نق^{٢}

مساحات وحجوم بعض المجسمات

المجسم		المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المكعب		٤ ل^{٢}	٦ ل^{٢}	ل^{٣}
متوازى المستطيلات		٢ (س + ص) × ع	٢ (س ص + ص ع + ع س)	س × ص × ع
الأسطوانة الدائرية القائمة		٢ π نق ع	٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢} = ٢ π نق (ع + نق)	π نق^{٢} ع
الكرة		–	٤ π نق^{٢}	$\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}
المخروط		π نق ل	π نق ل + π نق^{٢}	$\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع
المنشور		محيط القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين	مساحة القاعدة × الارتفاع
الهرم المنتظم		$\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	$\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

ملخص لأهم نقاط التفاضل والتكامل للصف الثالث الثانوي

تهايات الدوال المرتبطة بالعدد ه

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{ه}$ ومنها : $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} (1 + \text{س})^{\frac{1}{\text{س}}} = \text{ه}$

لاحظ أن

① $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{أس}} = \text{ه}^{\text{أ}}$

② $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}+1} = \text{ه}$

③ $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـــا}} \left(1 + \frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{ه}^{\text{أ}}$

② $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \text{ه}^{\text{س}} = 1$

③ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{\text{لو}_{\text{أ}} (1 + \text{س})}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{أ}} \text{ه}$ ومنها : $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{\text{لو}_{\text{ه}} (1 + \text{س})}{\text{س}} = 1$

④ $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{\text{أ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{ه}} \text{أ}$ ومنها : $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ه}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = 1$

الاشتقاق

* **مشتقة الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية :**

① إذا كانت : $\text{ص} = \text{ه}^{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ه}^{\text{س}}$

② إذا كانت : $\text{ص} = \text{أ}^{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{أ}^{\text{س}} \text{لو}_{\text{ه}} \text{أ}$

③ إذا كانت : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{ه}} \text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س}}$

④ إذا كانت : $\text{ص} = \text{لو}_{\text{أ}} \text{س}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{\text{س لو}_{\text{ه}} \text{أ}} = \frac{\text{لو}_{\text{أ}} \text{ه}}{\text{س}}$

وبصفة عامة :

① إذا كانت : ص = $هـ^{د(س)}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = دَ(س) \times هـ^{د(س)}$

② إذا كانت : ص = $أ^{د(س)}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = دَ(س) \times أ^{د(س)} لو_{هـ} أ$

③ إذا كانت : ص = $لو_{هـ}$ د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{دَ(س)}{د(س)}$

④ إذا كانت : ص = $لو_{أ}$ د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{دَ(س)}{د(س)} \times لو_{أ} هـ$

لاحظ أن

إذا كان : ص = $لو_{هـ} |د(س)|$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{دَ(س)}{د(س)}$

، إذا كان : ص = $لو_{أ} |د(س)|$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{دَ(س)}{د(س)} \times لو_{أ} هـ$

* **اشتقاق الدوال المثلثية :**

① إذا كان : ص = جا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا س

② إذا كان : ص = جتا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − جا س

③ إذا كان : ص = ظا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $قا^{2}$ س

④ إذا كان : ص = ظتا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − $قتا^{2}$ س

⑤ إذا كان : ص = قا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = قا س ظا س

⑥ إذا كان : ص = قتا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − قتا س ظتا س

وبصفة عامة إذا كان :

① ص = جا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (س) جتا د (س)

② ص = جتا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − دَ (س) جا د (س)

③ ص = ظا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (س) $قا^{2}$ د (س)

④ ص = ظتا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − دَ (س) $قتا^{2}$ د (س)

⑤ ص = قا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (س) قا د (س) ظا د (س)

⑥ ص = قتا د (س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − دَ (س) قتا د (س) ظتا د (س)

الاشتقاق الضمنى

① الدالة على الصورة : ص = د (س) تسمى دالة صريحة في المتغير المستقل س

مثال : $\boxed{\text{ص} = ٥\,\text{س}^{٤} - ٣\,\text{س}^{٢} + ٢}$ ، $\boxed{\text{ص} = \text{جا}\,(٢\,\text{س} - ٥)}$

ويمكن اشتقاقها مباشرة ، ويمكن اشتقاقها مباشرة

$\boxed{\text{ص}' = ٢٠\,\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}}$ ، $\boxed{\text{ص}' = ٢\,\text{جتا}\,(٢\,\text{س} - ٥)}$

② **الدالة الضمنية** : عندما يرتبط المتغير ص بالمتغير س بمعادلة تحوى س ، ص معًا.

مثال : ص − س ص − س = ٠ $\boxed{\text{وبالاشتقاق الضمنى بالنسبة لـ س}}$

$\therefore$ ص′ − (س ص′ + ص) − ١ = ٠ $\therefore$ ص′ (١ − س) = ص + ١

$$\therefore \text{ص}' = \frac{\text{ص} + ١}{١ - \text{س}} = \frac{\frac{\text{س}}{١ - \text{س}} + ١}{١ - \text{س}} = \frac{\text{س} + ١ - \text{س}}{(١ - \text{س})^{٢}} = \frac{١}{(١ - \text{س})^{٢}}$$

الاشتقاق البارامترى

إذا كانت : ص = د (ن) ، س = ر (ن) هما معادلتا منحنى على الصورة البارامترية حيث :
د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$

فمثلاً : إذا كانت : س = ٣ ن^{٤} + ١ ، ص = ٥ ن^{٢} فإن : $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ١٢\,\text{ن}^{٣}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ١٠\,\text{ن}$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ١٢\,\text{ن}^{٣} \div ١٠\,\text{ن} = ١,٢\,\text{ن}^{٢}$$

المشتقات العليا للدالة

المشتقات لدالة بدءًا من المشتقة الثانية تسمى بالمشتقات العليا ونكتب المشتقة من الرتبة ن كما يلى :

$\text{ص}^{(ن)} = \frac{\text{ء}^{ن}\text{ص}}{\text{ءس}^{ن}} = \text{د}^{(ن)}(\text{س})$ حيث ن عدد صحيح موجب.

ملاحظة

* $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = ١$ بينما $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} \times \frac{\text{ء}^{٢}\text{س}}{\text{ءص}^{٢}} \neq ١$
* $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بينما $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءع}^{٢}} \times \frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءس}^{٢}} \neq \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$

«حيث لا توجد قاعدة سلسلة في المشتقة الثانية».

تطبيقات على المشتقة الأولى (معادلتا المماس والعمودى على منحنى)

إذا كانت : أ ($س_1$ ، $ص_1$) نقطة على منحنى الدالة د حيث :

ص = د (س) فإن :

* ميل المماس للمنحنى عند أ = $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(س_1 ، ص_1)}$
* ميل العمودى على المنحنى عند أ = $\frac{-1}{\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{(س_1 ، ص_1)}}$
* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) هى : $ص - ص_1 = م\,(س - س_1)$
* معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) هى : $ص - ص_1 = \frac{-1}{م}\,(س - س_1)$

ملاحظة

* ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة.
* العمودى على المنحنى هو العمودى على المماس عند نقطة التماس.

ملاحظات

(١) لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

(٢) لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

(٣) لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

(٤) ميل المماس للمنحنى : ص = $هـ^{س}$ عند أى نقطة عليه هو نفسه قيمة الإحداثى الصادى لهذه النقطة.

(٥) ميل المماس للمنحنى : ص = $لو_{هـ}$ س عند أى نقطة عليه هو مقلوب قيمة الإحداثى السينى لهذه النقطة.

المعدلات الزمنية المرتبطة

(١) إذا كانت لدينا علاقة بين عدة متغيرات س ، ص ، ع وباشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن ن نحصل على علاقة بين المعدلات الزمنية : $\frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ ، $\frac{ءع}{ءن}$

(٢) معدل التغير الزمنى فى المساحة = $\frac{ءم}{ءن}$

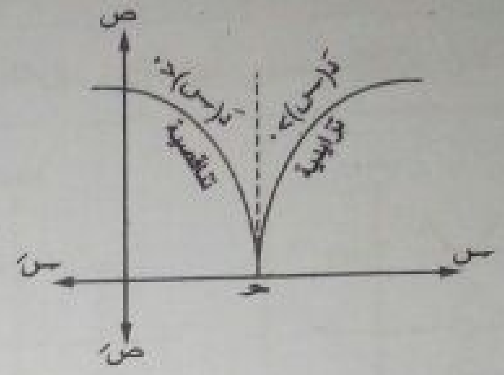
(٣) معدل التغير الزمنى فى الحجم = $\frac{ءح}{ءن}$

(٤) إذا كان المتغير س

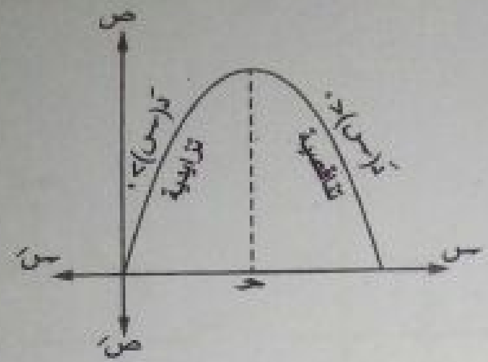
يتزايد/يبتعد/يتمدد/يُصب/يتراكم — يتزايد الزمن فإن $\frac{ءس}{ءن}$ يكون — موجبًا

يتناقص/يقترب/ينكمش/يتسرب/ينصهر — يتزايد الزمن فإن $\frac{ءس}{ءن}$ يكون — سالبًا

ولذلك نستخدم المشتقة الأولى فى خطوات بحث تزايد وتناقص الدالة كالآتى :



توجد نقطة حرجة عند س = حـ لأن دَ (حـ) غير معرفة



توجد نقطة حرجة عند س = حـ لأن دَ (حـ) = ٠

(١) نحدد مجال الدالة.　　(٢) نوجد دَ (س)

(٣) نوجد النقط الحرجة أى [النقط التى يكون عندها دَ (س) = ٠ أ، دَ (س) غير موجودة]

(٤) نحدد الفترات التى ينقسم إليها مجال الدالة بهذه النقط.

(٥) نعين إشارة دَ (س) فى كل فترة من هذه الفترات وبذلك يتم تعيين فترات التزايد حيث [دَ (س) > ٠] وفترات التناقص حيث [دَ (س) < ٠]

القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

تعريف

* إذا كانت د دالة متصلة مجالها ف ، حـ ∈ ف فإنه يوجد للدالة د :

(١) قيمة عظمى محلية عند س = حـ إذا وجدت فترة مفتوحة]أ ، ب[⊂ ف تحوى حـ بحيث يكون د (س) ≤ د (حـ) لكل س ∈]أ ، ب[

(٢) قيمة صغرى محلية عند س = حـ إذا وجدت فترة مفتوحة]أ ، ب[⊂ ف تحوى حـ بحيث يكون د (س) ≥ د (حـ) لكل س ∈]أ ، ب[

* استخدام المشتقة الأولى فى تحديد القيم العظمى والصغرى المحلية :

إذا كانت (حـ ، د (حـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند حـ ووجدت فترة مفتوحة حول حـ بحيث :

(١) دَ (س) > ٠ عندما س < حـ ، دَ (س) < ٠ عندما س > حـ ، فإن د (حـ) قيمة عظمى محلية.

(٢) دَ (س) < ٠ عندما س < حـ ، دَ (س) > ٠ عندما س > حـ ، فإن د (حـ) قيمة صغرى محلية.

(٣) إذا لم يحدث تغيير فى إشارة دَ (س) على جانبى حـ فإنه لا يوجد للدالة د قيم عظمى أو صغرى محلية عند حـ

ملاحظات

* حجم الجزء المحصور بين كرتين متحدتي المركز طولا نصفي قطريهما نق_1 ، نق_2 يساوى $\frac{4}{3}\pi(\text{نق}_2^3 - \text{نق}_1^3)$
* إذا كانت $س_.$ القيمة الإبتدائية للمتغير س عند ($ن = ٠$)
، $\frac{ءس}{ءن}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ، س قيمة المتغير بعد زمن ن

فإن : $\boxed{س = س_. + \frac{ءس}{ءن} \times ن}$

* إذا كان قياس زاوية س بالتقدير الدائرى فإن :

① $\frac{ء(\text{جا}\,س)}{ءن} = (\text{جتا}\,س) \times \frac{ءس}{ءن}$

② $\frac{ء(\text{ظا}\,س)}{ءن} = (\text{قا}^2\,س) \times \frac{ءس}{ءن}$

③ $\frac{ء(\text{جتا}\,س)}{ءن} = (-\,\text{جا}\,س) \times \frac{ءس}{ءن}$

تزايد وتناقص الدوال

* **تعريف :**

إذا كانت الدالة د معرفة في الفترة]أ ، ب[ولكل $س_1 < س_2$ فى هذه الفترة كان :

① $د(س_1) < د(س_2)$ فإن الدالة تكون متزايدة.

② $د(س_1) > د(س_2)$ فإن الدالة تكون متناقصة.

* **النقط الحرجة :**

يكون للدالة د المتصلة على الفترة]أ ، ب[نقطة حرجة (حـ ، د(حـ)) حيث حـ ∈]أ ، ب[

إذا كان : $\boxed{\text{دَ}(حـ) = \text{صفر}}$ أو $\boxed{\text{دَ}(حـ)\ \text{غير موجودة}}$

* **استخدام المشتقة الأولى لبحث تزايد وتناقص الدالة :**

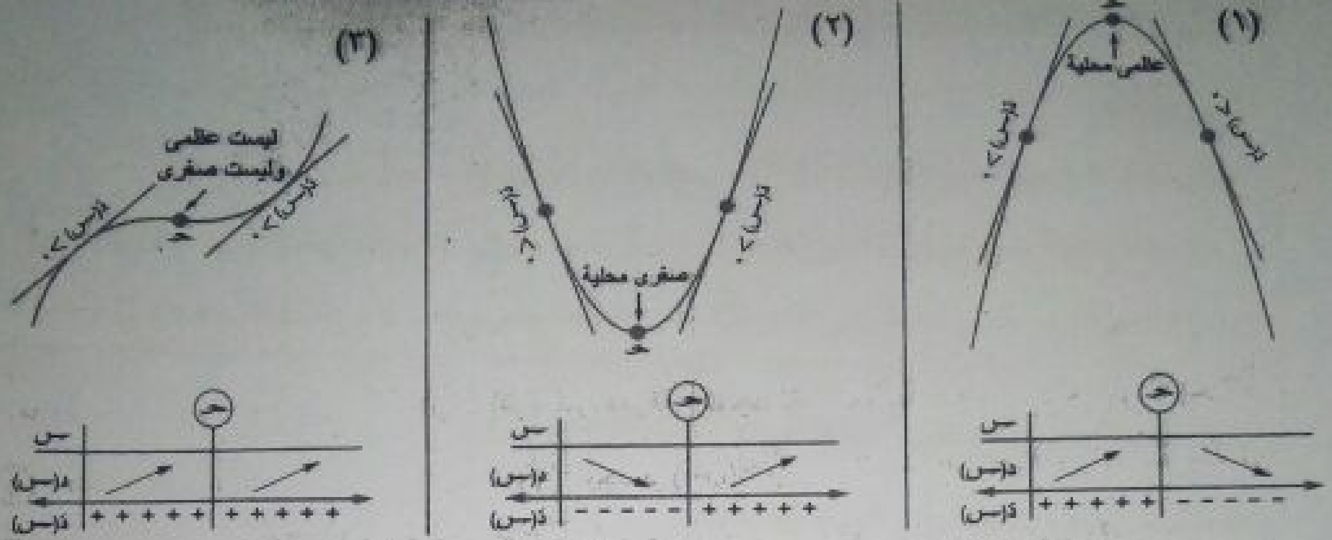
① الدالة تتزايد فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أى نقطة عليه فى هذه الفترة موجبًا.

أى أن : إذا كان دَ(س) > ٠ لكل س ∈]أ ، ب[فإن الدالة تزايدية.

② الدالة تتناقص فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحناها عند أى نقطة عليه فى هذه الفترة سالبًا.

أى أن : إذا كان دَ(س) < ٠ لكل س ∈]أ ، ب[فإن الدالة تناقصية.

والأشكال التالية توضح ذلك :



• استخدام المشتقة الثانية :

إذا كانت الدالة د قابلة للاشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوى حـ حيث دَ (حـ) = ٠ وكانت :

① دً (حـ) < ٠ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية.

② دً (حـ) > ٠ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية.

③ دً (حـ) = ٠ فإن : اختبار المشتقة الثانية لا يستطيع تحديد نوع النقطة (حـ ، د (حـ)) من حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية.

ملاحظات

① إذا كانت للدالة د قيمة عظمى أو صغرى محلية عند حـ ∈]أ ، ب[

فإن : دَ (حـ) = صفر إذا كانت د قابلة للاشتقاق على]أ ، ب[أو دَ (حـ) غير موجودة

والعكس غير صحيح أى أن إذا كان دَ (س$_1$) = صفر لدالة قابلة للاشتقاق عند س$_1$ فليس بالضرورة وجود قيمة عظمى أو صغرى محلية عند هذه النقطة.

② نقط القيم العظمى والصغرى المحلية تكون نقط حرجة ولكن العكس غير صحيح أى أنه ليس بالضرورة أن تكون النقط الحرجة عظمى أو صغرى محلية.

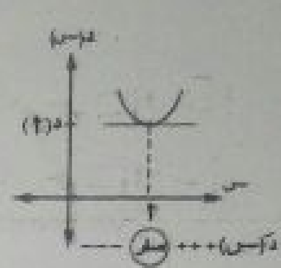
③ إذا كانت الدالة د تزايدية (أو تناقصية) فقط فى فترة ما فليس لهذه الدالة قيم عظمى (أو صغرى) محلية فى هذه الفترة.

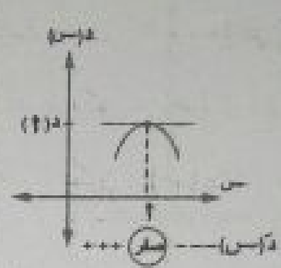
④ النقطة الحرجة التى عندها المشتقة الأولى = صفر أى المماس للمنحنى عندها يكون أفقى يطلق عليها أحيانًا نقطة التوقف.

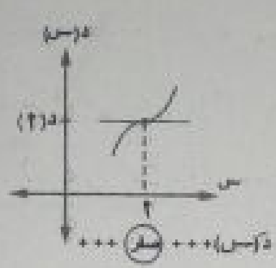
⑤ الدالة كثيرة الحدود من الدرجة ن بها (ن − ١) على الأكثر من القيم العظمى أو الصغرى المحلية.

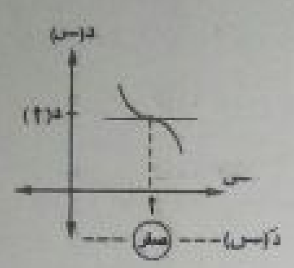
* بعض الأشكال التى توضح العلاقة بين النقط الحرجة والقيم العظمى والصغرى المحلية للدالة [حيث د (أ) معرفة]

① إذا كان : دَ (أ) = صفر أى أن : ميل المماس أفقى



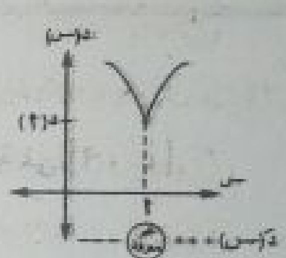


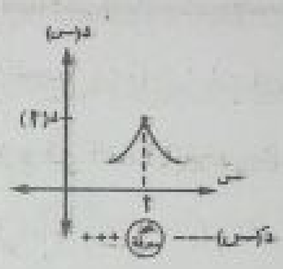


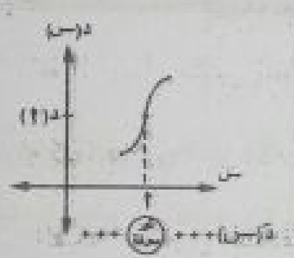


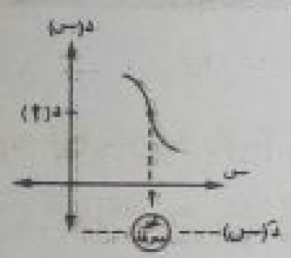
∴ د (أ) قيمة صغرى محلية | ∴ د (أ) قيمة عظمى محلية | ∴ د (أ) ليست قيمة عظمى محلية وليست قيمة صغرى محلية

② إذا كان : دَ (أ) غير معرفة









∴ د (أ) قيمة صغرى محلية | ∴ د (أ) قيمة عظمى محلية | ∴ د (أ) ليست قيمة عظمى محلية وليست قيمة صغرى محلية

* خطوات بحث القيم العظمى والصغرى المحلية للدوال المتصلة الغير مشتملة على دالة ثابتة :

① تحدد مجال الدالة.

② توجد دَ (س)

③ توجد قيم النقط الحرجة أى [النقط التى يكون عندها دَ (س) = صفر أ، غير موجودة]

ولكن إحداثيها السينى س

④ اختبار نوع النقط الحرجة من حيث كونها عظمى أو صغرى محلية : باستخدام إشارة المشتقة الأولى أو المشتقة الثانية كما سبق.

تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

* عند إيجاد أكبر حجم (ح) نضع $\frac{ءح}{ءس} = ٠$ ، وتتأكد من أن : $\frac{ء^٢ح}{ءس^٢} <$ صفر

* عند إيجاد أقل تكاليف (ت) نضع $\frac{ءت}{ءس} = ٠$ ، وتتأكد من أن : $\frac{ء^٢ت}{ءس^٢} >$ صفر وهكذا ...

تعريف

إذا كانت د دالة معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكانت حـ ∈ [أ ، ب] فإن :

① د (حـ) هى قيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب] عندما يكون د (حـ) ≥ د (س) لكل س ∈ [أ ، ب]

② د (حـ) هى قيمة عظمى مطلقة على الفترة [أ ، ب] عندما يكون د (حـ) ≤ د (س) لكل س ∈ [أ ، ب]

* بحث القيم العظمى والصغرى المطلقة فى فترة مغلقة [أ ، ب] :

إذا كانت : د دالة متصلة على الفترة [أ ، ب]

① نعين النقط الحرجة التى عندها دَ (س) = صفر أو غير موجودة والتى تنتمى للفترة [أ ، ب]

② نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة وقيمتى النقط الحدية د (أ) ، د (ب)

③ نقارن بين القيم السابقة كلها فتكون أكبر هذه القيم هى القيمة العظمى المطلقة فى [أ ، ب]

، أصغر هذه القيم هى القيمة الصغرى المطلقة فى [أ ، ب]

ملاحظة

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة [أ ، ب] وكانت :

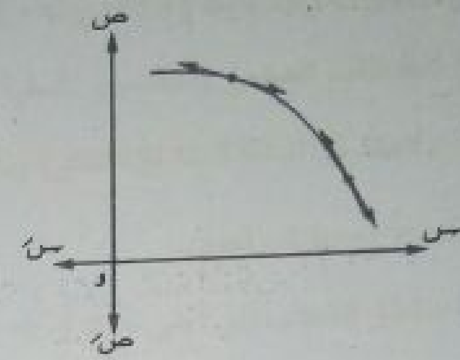
① دَ (س) > ٠ أى أن : الدالة تزايدية على نفس الفترة. فإن
* القيمة الصغرى المطلقة = د (أ)
* القيمة العظمى المطلقة = د (ب)

② دَ (س) < ٠ أى أن : الدالة تناقصية على نفس الفترة. فإن
* القيمة الصغرى المطلقة = د (ب)
* القيمة العظمى المطلقة = د (أ)

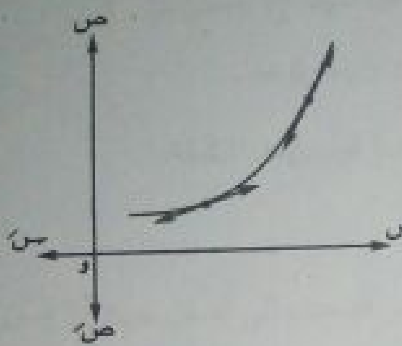
ولذلك إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب]

التحدب لأعلى والتحدب لأسفل ونقط الانقلاب

* **التحدب لأعلى :** المنحنى يقع أسفل مماساته.



* **التحدب لأسفل :** المنحنى يقع أعلى مماساته.



(١) إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة]أ ، ب[يكون منحنى الدالة د

① محدبًا لأسفل إذا كانت د' متزايدة على]أ ، ب[

② محدبًا لأعلى إذا كانت د' متناقصة على]أ ، ب[

(٢) إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة]أ ، ب[

① وكان : د''(س) > ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبًا لأسفل على الفترة]أ ، ب[

② وكان : د''(س) < ٠ لجميع قيم س ∈]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبًا لأعلى على الفترة]أ ، ب[

* **نقطة الانقلاب :** النقطة (حـ ، د (حـ)) تكون نقطة انقلاب لمنحنى الدالة د إذا تحقق ما يلى :

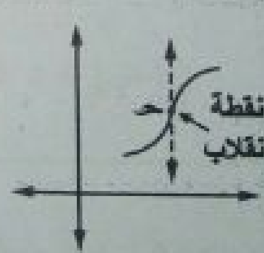
① منحنى الدالة د متصل عند حـ

② يمكن رسم مماس وحيد لمنحنى الدالة د عند حـ

أى أن : [د'(حـ) ∈ ح أ، د'(حـ) = ∞ أى المماس رأسى]

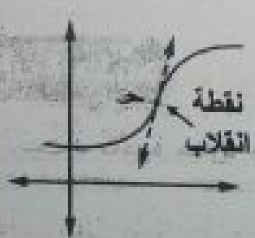
③ تتغير إشارة د''(س) قبل وبعد النقطة حـ **أى أن :** [د''(حـ) = صفر أ، غير موجودة]

والأشكال التالية توضح ذلك :

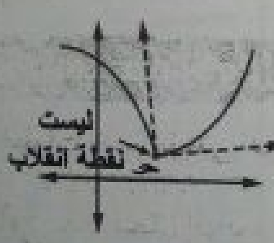


شكل (١)

شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

* **توجد نقط انقلاب فى شكل (١) ، (٢) ، (٣) وذلك لأنها منحنيات لدوال متصلة لها مماس عند حـ وبتغير اتجاه تحدب المنحنى قبل وبعد النقطة حـ**

* **لا توجد نقطة انقلاب فى شكل (٤) وذلك لعدم وجود مماس وحيد عند النقطة حـ**

* **خطوات بحث فترات التحدب ونقط الانقلاب :**

① نوجد دً (س) ثم نوجد قيم س التى تجعل دً (س) = صفر أو غير موجودة.

② نعين إشارة دً (س) لتعيين فترات التحدب لأعلى حيث [دً (س) > ٠] وفترات التحدب لأسفل حيث [دً (س) < ٠]

③ نحدد نقط الانقلاب من النقط التى حصلنا عليها حيث تتغير إشارة دً (س) على يمين ويسار كل نقطة من هذه النقط.

وإذا لم تتغير إشارة دً (س) حول أى من هذه النقط فإنها لا تكون نقطة انقلاب.

ملاحظات

① نقطة الانقلاب عند س = أ لابد وأن تنتمى لمجال الدالة د **أى أن** : د (أ) تكون معرفة.

② نقطة الانقلاب هى النقطة التى تفصل بين مناطق التحدب لأعلى وإلى أسفل.

③ المماس عند نقطة الانقلاب يقطع منحنى الدالة.

④ النقطة الحرجة للدالة د هى النقطة التى عندها دَ (س) = صفر أو غير معرفة وإذا تغيرت إشارة دَ (س) حول هذه النقطة فإنها تكون عظمى أو صغرى محلية.

كذلك نجد أن : النقطة الحرجة للدالة دَ هى النقطة التى عندها دً (س) = صفر أو غير معرفة وإذا تغيرت إشارة دً (س) حول هذه النقطة فإنها تكون انقلاب.

⑤ نقط الانقلاب للدالة د القابلة للاشتقاق مرتين هى نقط عظمى أو صغرى محلية للدالة دَ

⑥ إذا كانت النقطة (حـ ، هـ) ∋ لمنحنى دالة قابلة للاشتقاق مرتين وكانت :

(أ) (حـ ، هـ) نقطة انقلاب فإن : دً (حـ) = صفر ، د (حـ) = هـ

(ب) (حـ ، هـ) نقطة عظمى محلية أو صغرى محلية أو حرجة فإن : دَ (حـ) = صفر ، د (حـ) = هـ

رسم منحنيات دوال كثيرات الحدود

* **خطوات رسم منحنى الدالة د (حيث د كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل)**

① نحدد مجال الدالة د ثم نحدد تماثل الدالة د حيث :

(أ) د (− س) = د (س) لكل س ∋ لمجال د

∴ الدالة د زوجية وبالتالى يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لمحور الصادات.

(ب) د (− س) = − د (س) لكل س ∋ لمجال د

∴ الدالة د فردية وبالتالى يكون منحناها متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.

(٢) نوجد دَ (س) ، دً (س)

(٣) نستخدم دَ (س) في تعيين :

(أ) مناطق التزايد حيث [دَ (س) > ٠] ، مناطق التناقص حيث [دَ (س) < ٠]

(ب) نقط القيم العظمى والصغرى المحلية (إن وجدت) حيث دَ (س) = ٠

(لاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق) وتتغير إشارة دَ (س) قبل وبعد النقطة.

(٤) نستخدم دً (س) في تعيين :

(أ) مناطق التحدب إلى أعلى حيث [دً (س) < ٠] ، مناطق التحدب إلى أسفل حيث [دً (س) > ٠]

(ب) نقط الانقلاب (إن وجدت) حيث دً (س) = صفر (لاحظ أن الدالة قابلة للاشتقاق مرتين) وتتغير إشارة دً (س) قبل وبعد النقطة.

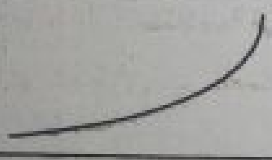
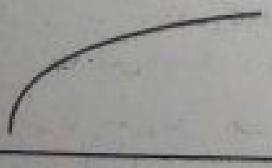
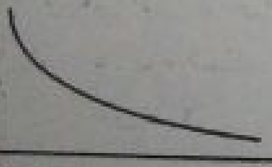
(٥) نعين بعض النقط المساعدة في الرسم مثل :

(أ) نقط التقاطع مع محور السينات بوضع د (س) = ٠

(ب) نقط التقاطع مع محور الصادات بوضع س = ٠

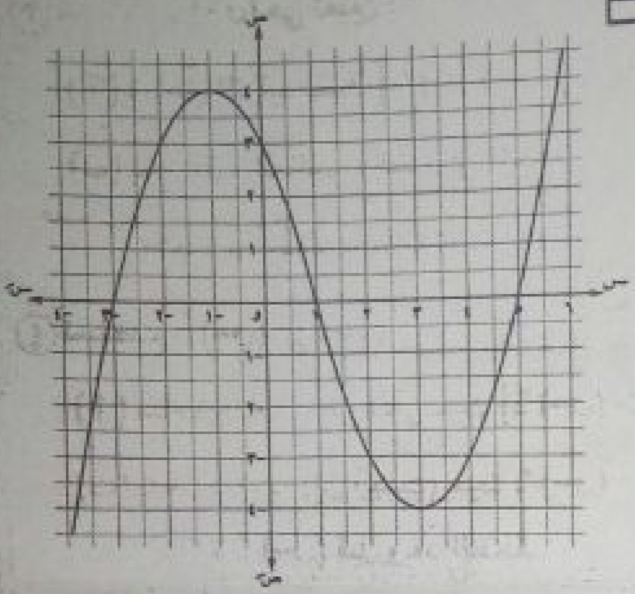
(جـ) بعض النقط الإضافية الأخرى بالتعويض عن س بأي قيمة وإيجاد قيمة د (س)

(٦) نرتب النقط التي حصلنا عليها في جدول ونمثلها بيانيًا ثم نكمل رسم المنحنى بتوصيل هذه النقط مع أخذ ما يلي في الاعتبار :

إشارات دَ (س) ، دً (س)	خواص منحنى الدالة د	شكل المنحنى
دَ (س) > ٠ ، دً (س) > ٠	متزايد ، محدب لأسفل	
دَ (س) > ٠ ، دً (س) < ٠	متزايد ، محدب لأعلى	
دَ (س) < ٠ ، دً (س) > ٠	متناقص ، محدب لأسفل	
دَ (س) < ٠ ، دً (س) < ٠	متناقص ، محدب لأعلى	

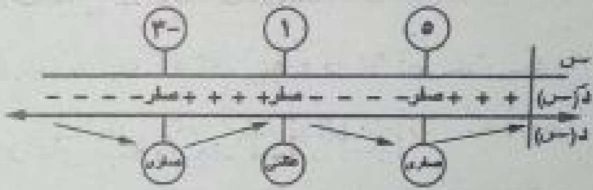
ملاحظة

إذا كان الشكل يمثل منحنى د (س)



* نقطة قيمة عظمى للدالة هى : (-١ ، ٤)
* نقطة قيمة صغرى للدالة هى : (٣ ، -٤)
* الدالة متزايدة فى]- ∞ ، -١[،]٣ ، ∞[
* الدالة متناقصة فى]-١ ، ٣[
* نقطة الانقلاب هى : (١ ، ٠)
* المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، ١[
* المنحنى محدب لأسفل فى]١ ، ∞[

إذا كان الشكل يمثل منحنى دَ (س)



* توجد قيمة عظمى للدالة د عند س = ١
* توجد قيمة صغرى للدالة د عند س = ٥
س = -٣
* الدالة د متزايدة فى]-٣ ، ١[،]٥ ، ∞[
* الدالة د متناقصة فى]- ∞ ، -٣[،]١ ، ٥[
* لاحظ أن ميل المماس للمنحنى دَ (س) يكافئ دً (س)

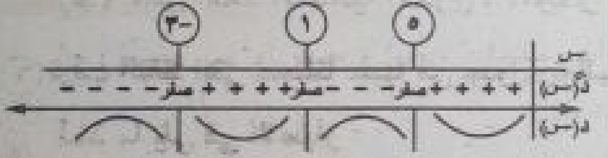
∵ ميل المماس للمنحنى دَ (س) يساوى صفر عند س = -١ ، س = ٣

∴ دً (س) = ٠ عند س = -١ ، س = ٣ وتتغير قيم دً (س) حول هذه القيم

∴ توجد نقط انقلاب للدالة د عند س = -١ ، س = ٣

* المنحنى محدب لأعلى فى]-١ ، ٣[
* المنحنى محدب لأسفل فى]- ∞ ، -١[،]٣ ، ∞[

إذا كان الشكل يمثل منحنى دً (س)



* المنحنى محدب لأعلى فى]- ∞ ، -٣[،]١ ، ٥[
* المنحنى محدب لأسفل فى]-٣ ، ١[،]٥ ، ∞[
* توجد نقط انقلاب عند س = ٥ ، س = ١ ، س = -٣

التكامل غير المحدد

*** التكاملات الأساسية (القياسية) :**

① $\int \text{أ}\, \text{ء}\text{س} = \text{أ}\text{س} + \text{ث}$

② $\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{ء}\text{س} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

③ $\int (\text{أ}\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}}\, \text{ء}\text{س} = \dfrac{(\text{أ}\text{س} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{ث}$

④ $\int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ء}\text{س} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

⑤ $\int \text{هـ}^{\text{ك}\text{س}+\text{ب}}\, \text{ء}\text{س} = \dfrac{\text{هـ}^{\text{ك}\text{س}+\text{ب}}}{\text{ك}} + \text{ث}$

⑥ $\int \text{أ}^{\text{س}}\, \text{ء}\text{س} = \dfrac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} + \text{ث}$

⑦ $\int \text{أ}^{\text{ك}\text{س}+\text{ب}}\, \text{ء}\text{س} = \dfrac{\text{أ}^{\text{ك}\text{س}+\text{ب}}}{\text{ك}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} + \text{ث}$

⑧ $\int \dfrac{1}{\text{س}}\, \text{ء}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{ث}$

*** أهم قواعد التكامل :**

① $\int (\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}}\, \text{دَ}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \dfrac{(\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

② $\int \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})}\, \text{دَ}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \text{هـ}^{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$

③ $\int \text{أ}^{\text{د}(\text{س})}\, \text{دَ}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \dfrac{\text{أ}^{\text{د}(\text{س})}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{أ}} + \text{ث}$

④ $\int \dfrac{\text{دَ}(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\, \text{ء}\text{س} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{د}(\text{س})| + \text{ث}$

⑤ $\int \dfrac{\text{دَ}(\text{س})}{\sqrt{\text{د}(\text{س})}}\, \text{ء}\text{س} = 2\sqrt{\text{د}(\text{س})} + \text{ث}$

*** بعض خواص التكامل الغير محدد :**

① $\int \text{أ}\,\text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \text{أ} \int \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ حيث $\text{أ} \neq 0$

② $\int [\text{د}(\text{س}) \pm \text{ر}(\text{س})]\, \text{ء}\text{س} = \int \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} \pm \int \text{ر}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$

③ $\dfrac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}} \int \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \text{د}(\text{س})$

④ $\int \dfrac{\text{ء}}{\text{ء}\text{س}} [\text{د}(\text{س})]\, \text{ء}\text{س} = \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$

⑤ $\int \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} - \int \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} =$ ثابت (وليس بالضرورة صفر)

*** تكامل الدوال المثلثية :**

① $\int \text{جا}\text{س}\, \text{ء}\text{س} = -\text{جتا}\text{س} + \text{ث}$

② $\int \text{جتا}\text{س}\, \text{ء}\text{س} = \text{جا}\text{س} + \text{ث}$

③ $\int \text{قا}^2\text{س}\, \text{ء}\text{س} = \text{ظا}\text{س} + \text{ث}$

④ $\int \text{قتا}^2\text{س}\, \text{ء}\text{س} = -\text{ظتا}\text{س} + \text{ث}$

⑤ $\int \text{قا}\text{س}\ \text{ظا}\text{س}\, \text{ء}\text{س} = \text{قا}\text{س} + \text{ث}$

⑥ $\int \text{قتا}\text{س}\ \text{ظتا}\text{س}\, \text{ء}\text{س} = -\text{قتا}\text{س} + \text{ث}$

نتائج

① $\int \text{جا}(\text{أ}س + \text{ب})\,\text{ء}س = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{جتا}(\text{أ}س + \text{ب}) + \text{ث}$

② $\int \text{جتا}(\text{أ}س + \text{ب})\,\text{ء}س = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{جا}(\text{أ}س + \text{ب}) + \text{ث}$

③ $\int \text{قا}^2(\text{أ}س + \text{ب})\,\text{ء}س = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظا}(\text{أ}س + \text{ب}) + \text{ث}$

④ $\int \text{قتا}^2(\text{أ}س + \text{ب})\,\text{ء}س = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{ظتا}(\text{أ}س + \text{ب}) + \text{ث}$

⑤ $\int \text{قا}(\text{أ}س + \text{ب})\,\text{ظا}(\text{أ}س + \text{ب})\,\text{ء}س = \frac{1}{\text{أ}}\,\text{قا}(\text{أ}س + \text{ب}) + \text{ث}$

⑥ $\int \text{قتا}(\text{أ}س + \text{ب})\,\text{ظتا}(\text{أ}س + \text{ب})\,\text{ء}س = -\frac{1}{\text{أ}}\,\text{قتا}(\text{أ}س + \text{ب}) + \text{ث}$

تذكر أن:

① $\int \text{ظا}س\,\text{ء}س = \int \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}\,\text{ء}س = -\int \frac{(-\text{جا}س)}{\text{جتا}س}\,\text{ء}س$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{-\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}س| + \text{ث}} = \boxed{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قا}س| + \text{ث}}$

② $\int \text{ظتا}س\,\text{ء}س = \int \frac{\text{جتا}س}{\text{جا}س}\,\text{ء}س$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا}س| + \text{ث}}$

③ $\int \text{قا}س\,\text{ء}س = \int \frac{\text{قا}س\,(\text{قا}س + \text{ظا}س)}{(\text{قا}س + \text{ظا}س)}\,\text{ء}س$ «بالضرب بسطًا ومقامًا فى (قاس + ظاس)»

$= \int \frac{\text{قا}س\,\text{ظا}س + \text{قا}^2س}{(\text{قا}س + \text{ظا}س)}\,\text{ء}س$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قا}س + \text{ظا}س| + \text{ث}}$

④ $\int \text{قتا}س\,\text{ء}س = \int \frac{\text{قتا}س\,(\text{قتا}س + \text{ظتا}س)}{\text{قتا}س + \text{ظتا}س}\,\text{ء}س$ «بالضرب بسطًا ومقامًا فى (قتاس + ظتاس)»

$= \int \frac{\text{قتا}س\,\text{ظتا}س + \text{قتا}^2س}{\text{قتا}س + \text{ظتا}س}\,\text{ء}س$

$= -\int \frac{-\text{قتا}س\,\text{ظتا}س - \text{قتا}^2س}{\text{قتا}س + \text{ظتا}س}\,\text{ء}س$ «لاحظ أن البسط هو تفاضل المقام»

$= \boxed{-\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قتا}س + \text{ظتا}س| + \text{ث}}$

تعميم

① $\int \text{حا}\left(\text{د}(\text{س})\right) \times \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = -\,\text{جتا}\left(\text{د}(\text{س})\right) + \text{ث}$

② $\int \text{جتا}\left(\text{د}(\text{س})\right) \times \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{حا}\left(\text{د}(\text{س})\right) + \text{ث}$

③ $\int \text{قا}^2\left(\text{د}(\text{س})\right) \times \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ظا}\left(\text{د}(\text{س})\right) + \text{ث}$

④ $\int \text{قتا}^2\left(\text{د}(\text{س})\right) \times \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = -\,\text{ظتا}\left(\text{د}(\text{س})\right) + \text{ث}$

⑤ $\int \text{قا}\left(\text{د}(\text{س})\right) \text{ظا}\left(\text{د}(\text{س})\right) \times \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = \text{قا}\left(\text{د}(\text{س})\right) + \text{ث}$

⑥ $\int \text{قتا}\left(\text{د}(\text{س})\right) \text{ظتا}\left(\text{د}(\text{س})\right) \times \text{د}'(\text{س})\,\text{ءس} = -\,\text{قتا}\left(\text{د}(\text{س})\right) + \text{ث}$

* **طرق التكامل :**

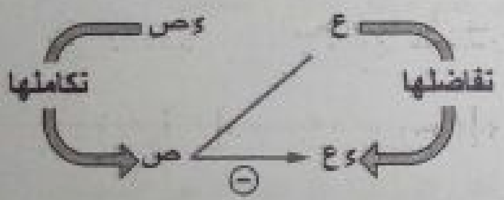
① التكامل بالتعويض :

* **إذا كان التكامل المعطى على الصورة $\int \text{د}\left(\text{ر}(\text{س})\right) \text{ر}'(\text{س})\,\text{ءس}$ نستخدم التعويض** $\boxed{\text{ر}(\text{س}) = \text{ع}}$
* **إذا احتوى التكامل المعطى على الجذر النونى لدالة أى $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}(\text{س})}$ نستخدم التعويض :**

$\boxed{\text{ر}(\text{س}) = \text{ع}^{\text{ن}}}$ أو $\boxed{\text{ر}(\text{س}) = \text{ع}}$

* **فى بعض المسائل نستخدم تعويض معين مناسب لها حتى يتم تبسيط التكامل وكتابته على الصورة القياسية.**

② التكامل بالتجزئ :



$\therefore \boxed{\int \text{ع}\,\text{ءص} = \text{ص}\,\text{ع} - \int \text{ص}\,\text{ءع}}$

أى أن : $\int$ (حاصل ضرب دالتين) = (الدالة الأولى) × (تكامل الثانية) − $\int$ (تكامل الثانية) × (تفاضل الأولى)

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [ا ، ب] وكانت ت أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة

فإن : $\boxed{\int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس = ت(ب) - ت(ا)}$

* **خواص التكامل المحدد :**

① إذا كانت د دالة متصلة على [ا ، ب] ، حـ ∋]ا ، ب[فإن :

(١) $\int_{ب}^{ا} د(س)\, ءس = - \int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس$

(٢) $\int_{ا}^{ا} د(س)\, ءس =$ صفر

(٣) $\int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{ا}^{حـ} د(س)\, ءس + \int_{حـ}^{ب} د(س)\, ءس$

② إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [-ا ، ا]

فإن : $\boxed{\int_{-ا}^{ا} د(س)\, ءس = \text{صفر}}$

③ إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة [-ا ، ا]

فإن : $\boxed{\int_{-ا}^{ا} د(س)\, ءس = ٢ \int_{.}^{ا} د(س)\, ءس}$

④ إذا كانت : د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [ا ، ب] فإن :

(١) $\int_{ا}^{ب} [د(س) \pm ر(س)]\, ءس = \int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس \pm \int_{ا}^{ب} ر(س)\, ءس$

(٢) $\int_{ا}^{ب} ك \,.\, د(س)\, ءس = ك \int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس$ حيث ك ∋ ح

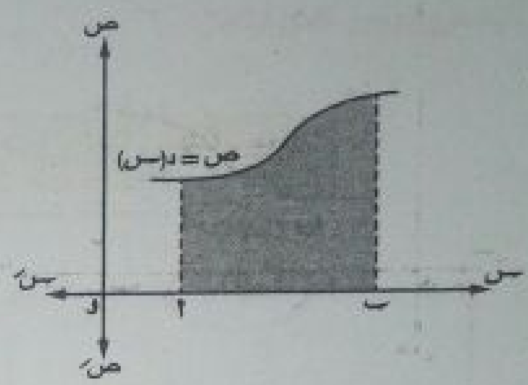
التكامل المحدد والمساحات فى المستوى

أولاً مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات فى الفترة [ا ، ب]

* إذا كانت : د دالة متصلة على الفترة [ا ، ب] وكانت م مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات والمستقيمين س = ا ، س = ب وكان :

① $\text{د}(\text{س}) \geq 0$

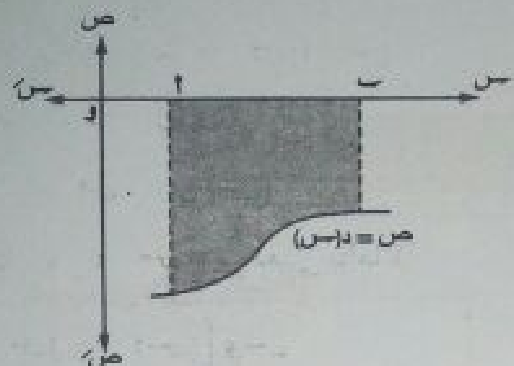
أى : «المنطقة فوق محور السينات»



فإن : $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

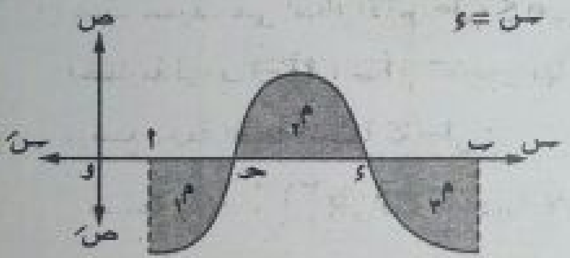
② $\text{د}(\text{س}) \leq 0$

أى : «المنطقة تحت محور السينات»



فإن : $\text{م} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \left|\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}\right|$

* إذا قطع منحنى الدالة د محور السينات عند س = حـ ، س = ء



حيث حـ ، ء ينتميان للفترة [أ ، ب] كما بالشكل المقابل :

نجد أن : $\text{د}(\text{س}) \geq 0$ لكل $\text{س} \in [\text{حـ} ، \text{ء}]$

، $\text{د}(\text{س}) \leq 0$ لكل $\text{س} \in [\text{أ} ، \text{حـ}]$ ، $\text{س} \in [\text{ء} ، \text{ب}]$

∴ المساحة المظللة (م) = $\text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3$

أى أن : $\text{م} = \left|\int_{\text{أ}}^{\text{حـ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}\right| + \int_{\text{حـ}}^{\text{ء}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \left|\int_{\text{ء}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}\right|$

* **لاحظ أن :** تم وضع علامة القيمة المطلقة للمنطقتين م_1 ، م_3 لأنها تقع أسفل محور السينات

ملاحظات

① يفضل الاستعانة برسم منحنى الدالة المعطاة لتحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات.

② نظرًا لصعوبة رسم كثير من المسائل بيانيًا فيفضل إيجاد أصفار الدالة (حتى إذا علم حدود التكامل) والتى تجزئ مجال الدالة [أ ، ب] إن وجدت إلى فترات جزئية ثم نحدد إشارة الدالة فى كل فترة جزئية ومنها يتم تحديد المناطق التى تقع فوق أو تحت محور السينات.

③ قيمة التكامل المحدد قد تكون موجبة أو سالبة أما المساحة تكون دائمًا موجبة.

④ بصفة عامة مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى أى دالة متصلة : ص = د (س) ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب هى : $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{د}(\text{س})|\,\text{ءس}$

ثانيًا مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين

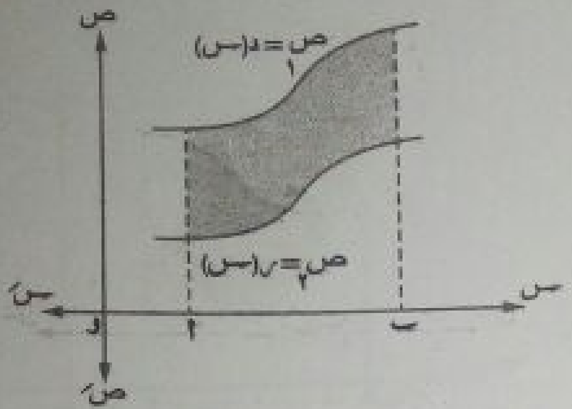
إذا كانت د ، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ ، ب]

وكانت د (س) ≥ ر (س) لكل س ∈ [أ ، ب]

فإن مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين

$ص_1$ = د (س) ، $ص_2$ = ر (س)

والمستقيمان س = أ ، س = ب تعطى بالعلاقة



م = $\int_{أ}^{ب}$ [د (س) − ر (س)] ءس

ملاحظات

① سوف نتعرف على الدالة الأكبر $ص_1$ ≥ $ص_2$ لكل س ∈ [أ ، ب] باستخدام الرسم أو بأخذ قيمة اختيارية لـ س ∈ [أ ، ب] والتعويض بها فى معادلتى الدالتين ويمكن الاستغناء عن معرفة ذلك بوضع علامة القيمة المطلقة كما يلى :

المساحة (م) = | $\int_{أ}^{ب}$ (أى دالة − الدالة الأخرى) ءس |

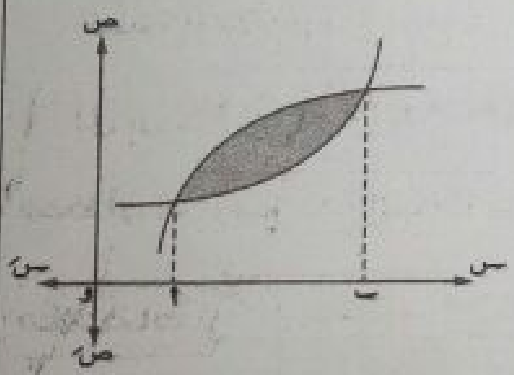
② عندما تنحصر منطقة بين منحنيين متقاطعين

فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هى

الإحداثيات السينية لنقط التقاطع

والتى نوجدها بحل معادلتى

المنحنيين جبريًا.



③ إذا كان المنحنيان يتقاطعان فى نقطة

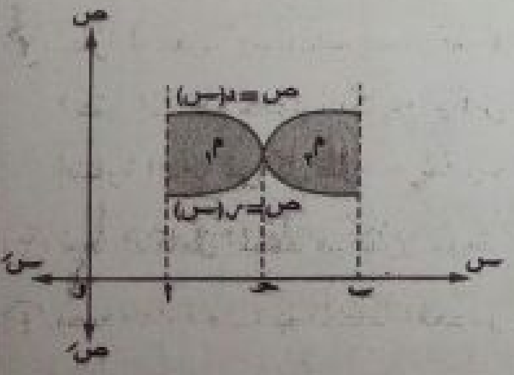
وكانت : حـ ∈]أ ، ب[

وكان : د (س) ≥ ر (س) لكل س ∈ [أ ، حـ]

وكان : ر (س) ≥ د (س) لكل س ∈ [حـ ، ب]

فإن : م = $م_1$ + $م_2$

= $\int_{أ}^{حـ}$ [د (س) − ر (س)] ءس + $\int_{حـ}^{ب}$ [ر (س) − د (س)] ءس

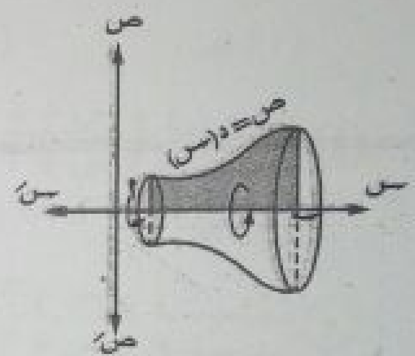


حجوم الأجسام الدورانية

* **المجسم الدوراني :** هو المجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها يسمى «محور الدوران».

حجم الجسم الناشيء من دوران منطقة مستوية حول محور

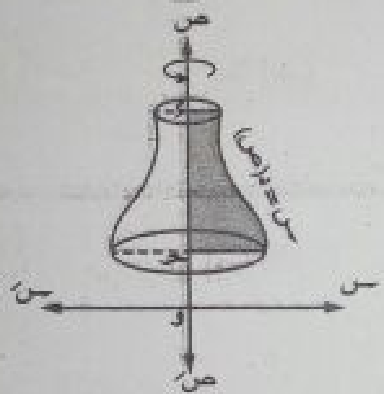
السينات



$$ح = \boxed{\pi \int_{أ}^{ب} ص^{2} \, ء س}$$

$$= \boxed{\pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^{2} \, ء س}$$

الصادات



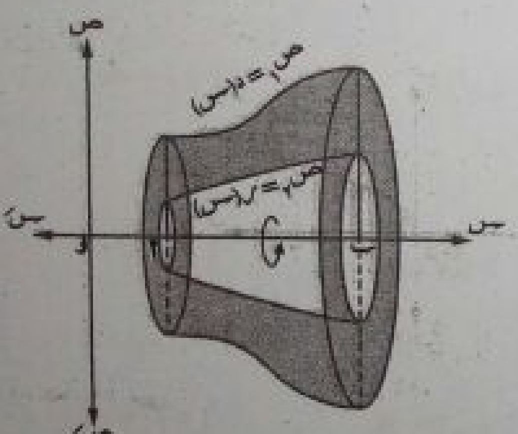
$$ح = \boxed{\pi \int_{جـ}^{ء} س^{2} \, ء ص}$$

$$= \boxed{\pi \int_{جـ}^{ء} [د(ص)]^{2} \, ء ص}$$

* **حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين :**

$$ح = \boxed{\pi \int_{أ}^{ب} (ص_{1}^{2} - ص_{2}^{2}) \, ء س}$$

$$= \boxed{\pi \int_{أ}^{ب} \left[(د(س))^{2} - (ر(س))^{2}\right] ء س}$$



ملاحظات

① إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين $\text{ص}_1 = \text{د}(\text{س})$

، $\text{ص}_2 = \text{ر}(\text{س})$ حيث $\text{ص}_1 \leq \text{ص}_2$

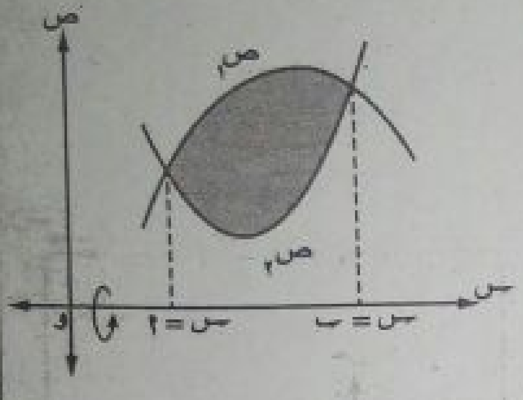
لكل $\text{س} \in [\text{أ} ، \text{ب}]$ دورة كاملة حول محور السينات

فإن الإحداثيين السينيين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما

حدود التكامل أ ، ب حيث أ < ب ويكون

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [(\text{ص}_1^2 - \text{ص}_2^2)] \, \text{ء س}$$

$$\text{أى : ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ص}_1^2 \, \text{ء س} - \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ص}_2^2 \, \text{ء س}$$



② إذا دارت المنطقة المحددة بالمنحنيين المتقاطعين.

$\text{س}_1 = \text{د}(\text{ص})$ ، $\text{س}_2 = \text{ر}(\text{ص})$

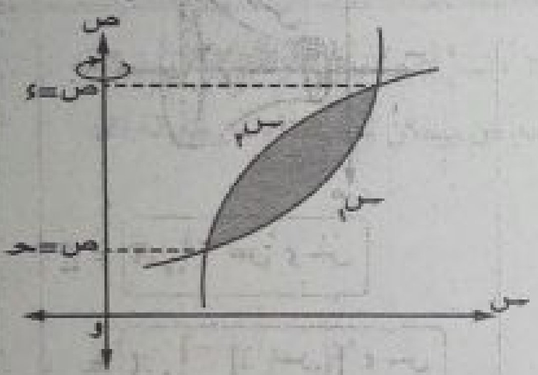
حيث $\text{س}_1 \leq \text{س}_2$

لكل $\text{ص} \in [\text{جـ} ، \text{ء}]$ دورة كاملة حول محور الصادات

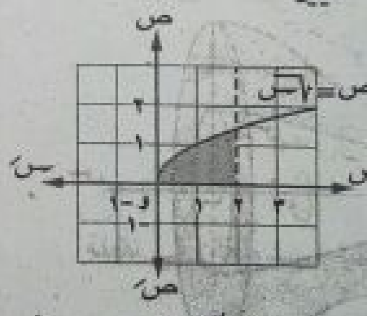
فإن الإحداثيين الصاديين لنقطتى تقاطع المنحنيين هما

حدود التكامل جـ ، ء حيث جـ < ء ويكون

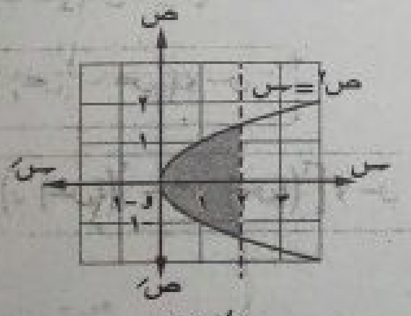
$$\text{ح} = \pi \int_{\text{جـ}}^{\text{ء}} [(\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2)] \, \text{ء ص} \quad \text{أى : ح} = \pi \int_{\text{جـ}}^{\text{ء}} \text{س}_1^2 \, \text{ء ص} - \pi \int_{\text{جـ}}^{\text{ء}} \text{س}_2^2 \, \text{ء ص}$$



③ فى الشكلين الآتيين :



شكل (١)



شكل (٢)

نلاحظ ما يلى :

(١) مساحة المنطقة [فى شكل (١)] = $\frac{1}{2}$ مساحة المنطقة فى [شكل (٢)]

(٢) حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المنطقة المظللة فى [شكل (١)] دورة كاملة حول محور السينات يساوى حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المنطقة المظللة فى [شكل (٢)] نصف دورة حول محور السينات.