المراجعة النهائية

في

التفاضل والتكامل

الصف الثالث الثانوي

إعداد

أ/ ناصر أبوزيد

مكتبة دينا وأمين

اختر من بين الاقواس

(١) إذا كانت $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ فإن $\frac{د ص}{د س} =$ ـــــ

(أ) $-س$ (ب) $\frac{١}{ص}$ (ج) $\frac{-س}{ص}$ (د) $\frac{-ص}{س}$

(٢) إذا كانت $س^{٢} + ص^{٢} = ٢ س ص$ فإن $\frac{د ص}{د س} =$ ـــــ

(أ) $ص$ (ب) -١ (ج) ١ (د) ٢

(٣) إذا كانت $ص^{٢} - ٢\sqrt{س} = ٠$ فإن $\frac{د ص}{د س} =$ ـــــ

(أ) $\frac{٢ ص}{\sqrt{س}}$ (ب) $\sqrt{س}$ (ج) $\frac{س}{ص^{٢}}$ (د) $\frac{١}{ص}$

(٤) إذا كانت $س = ٢ ن^{٢} + ٢$ ، $ص = \sqrt{ن}$ ، $ن = ١$

فإن $\frac{د ص}{د س} =$ ـــــ

(أ) $\frac{٢}{٨}$ (ب) $\frac{٢}{٤}$ (ج) $\frac{١}{١٢}$ (د) ٦

(٥) ميل المماس للمنحنى $س ص^{٢} = ٢$ عند $(١، ٢)$ = ـــــ

(أ) -٢ (ب) $-\frac{١}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٤}$

(٦) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث

فإن معدل محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل : ـــــ سم/ث

(أ) $\frac{٤}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (ج) $\frac{١}{٨}$ (د) ٨

(٧) يتصبب حمض من الثلج محتفظاً بشكل مكعب بمعدل $٢ سم^{٣}/ث$

فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه $٨ سم^{٣}$ هو ـــــ

(أ) $-\frac{١}{١٢}$ سم/ث (ب) $\frac{١}{١٢}$ سم/ث (ج) $-\frac{١}{٦}$ سم/ث (د) $\frac{١}{٦}$ سم/ث

(٨) جسم يتحرك على المنحنى $ص^{٢} = س^{٢}$ ، إذا كان $\frac{د كمية الحركة}{د ن} = \frac{١}{٢}$

عندما $ص = -١$ فإن $\frac{د ص}{د ن} =$ ـــــ وحدة/ث

(أ) $-\frac{٢}{٤}$ (ب) $-\frac{٢}{٨}$ (ج) $\frac{٢}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٢}$

(٩) إذا كان $ص = ٤ جا س$ فإن $ص'(\frac{\pi}{٤}) =$ ـــــ

(أ) -٨ (ب) صفر (ج) $٤\sqrt{٢}$ (د) ١٦

(١٠) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما = ١/٤ وكان الاحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدة/ث فإن معدل تغير الاحداثى الصادى = ـــ وحدة/ث

(أ) ١/٦ (ب) ٢/٤ (ج) ١/٦ (د) ٢/٤

(١١) إذا كان ص = جتا٢س فإن ص''(π/٢) = ـــ

(أ) ٤ (ب) صفر (ج) ٢٧٤ (د) ٨

(١٢) تتحرك نقطة على المنحنى س ص^٢ = ١٢ عند النقطة (٢، ٢) فإن dس/dص = ـــ

(أ) ٤ (ب) ٢/٤ (ج) ١/٣ (د) ٢

(١٣) إذا كان ص = ٢س^٢ + ٧ ، ع = س^٢ - ٤ فإن معدل تغير ص بالنسبة لـ ع = ـــ

(أ) ٨س^٢ (ب) ٨س^٣ (ج) ٦ (د) ١٢

(١٤) تتزايد طول نصف قطر دائرة بمعدل ٢سم/د وتتزايد مساحتها بمعدل ٢٠π سم^٢/د فإن طول نصف قطرها عند هذه اللحظة =

(أ) ٥/٢ (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) ٢٠

(١٥) إذا كانت ص = ظتا س فإن ص''(π/٤) = ـــ

(أ) ٤/٩ (ب) ٤/٩ (ج) ٤ (د) ٩/٤

(١٦) إذا كان معادلة المماس للمنحنى ص = د(س) عند النقطة (١، ١) هى ص + ٤س = ٥ فإن د'(١) = ـــ

(أ) ٢ (ب) ١/٤ (ج) ٤ (د) ٤

(١٧) تتحرك نقطة على المنحنى ص^٢ = ٢٥ - س^٢ بحيث dس/dن = ١/(٢ + س^٢) فإن dص/dن = ـــ عند النقطة (٣، ٤)

(أ) ١/٤ (ب) ١/٤ (ج) ١/٩ (د) ٩

(١٨) المماس للمنحنى ص = ٢ س^{٢} − ٥ عند النقطة (١، −٣) يمر بالنقطة ـــــ

(أ) (٥، −٢) (ب) (١، ٢) (ج) (−٣، −٤) (د) (٠، −٨)

(١٩) $\lim_{س \to \infty} (١ + \frac{١}{س})^{٢س}$ = ـــــ

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) هـ (د) هـ^{٢}

(٢٠) $\lim_{س \to ٠} (١ + س)^{\frac{١}{٢س}}$ = ـــــ

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) هـ^{٢} (ج) هـ$^{\frac{١}{٢}}$ (د) $\frac{هـ}{٢}$

(٢١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢^{س} - ١}{٢ س}$ = ـــــ

(أ) ٢ لو$_{هـ}$ ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ لو$_{هـ}$ ٢ (ج) ٢ لو$_{هـ}$ ٢ (د) لو$_{هـ}$ $\frac{٢}{هـ}$

(٢٢) $\lim_{س \to ١} \frac{لو_{هـ} س}{س - ١}$ = ـــــ

(أ) صفر (ب) ١ (ج) هـ (د) هـ$^{-١}$

(٢٣) اذا كانت د(س) = هـ^{٢س} فإن د(س) = ـــــ

(أ) هـ^{٢س} (ب) ٢ هـ^{٢س} (ج) ٩ هـ^{٢س} (د) ٢ هـ^{٢س}

(٢٤) اذا كان د(س) = ٩ هـ^{٣س} فإن د(−٢) = ـــــ

(أ) − د(٢) (ب) − د(٢) (ج) − د(−٢) (د) د(−٢)

(٢٥) منحنى الدالة د(س) = ١ + لو$_{هـ}$ (س − ٢) هو نفس منحنى د(س) = لو$_{هـ}$ س بالانتقال ـــــ

(أ) (٢، ١) (ب) (١، −٢) (ج) (−٢، ١) (د) (٢، −١)

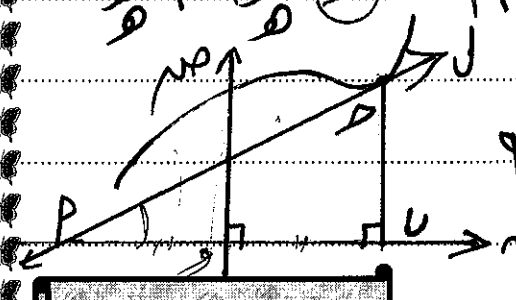
(٢٦) البعد بين ميل مماس المنحنى ص = لو$_{٢}$ $\sqrt{س + ٢}$ وميل مماس المنحنى ص = لو$_{٥}$ $\sqrt{س + ٢}$ عند س = ٢ كنسبة ـــــ

(أ) ٢ : ٥ (ب) ٥ : ٢ (ج) ١ : ١ (د) لو$_{هـ}$ ٢ : لو$_{هـ}$ ٥

(٢٧) في الشكل المقابل ل مماس للمنحنى د

ص = ٩ (−٤، ٠) ، ب (٤، ٠) ، د(٤) + د(٤) = ٩

فإن م(Δ أ ب ص) = ـــــ



(١٨) إذا كان $د''(س) = \frac{1}{2}[هـ^{س} + هـ^{-س}]$ ، $د(٠) = ١$

، $د'(٠) = ٠$ فإن $د(س) =$ ـــــ

(أ) $-د(س)$ (ب) $د(س)$ (ج) $-د''(س)$ (د) $د''(س)$

(١٩) إذا كان ميل المماس عند نقطة $(س، ص)$ عليه يساوى

$٤هـ^{٢س}$ ، $د(٠) = ٤$ فإن $د(-٢) =$ ـــــ

(أ) ٤ (ب) $٤هـ^{-٤}$ (ج) $٢هـ^{-٤}$ (د) $٢هـ$

(٢٠) $\int ط هـ ص د ص =$ ـــــ $+ ث$

(أ) $-لو_{هـ}|ص هـ|$ (ب) $-لو_{هـ} ص هـ$ (ج) $لو_{هـ} ص هـ$ (د) $|لو_{هـ} ص هـ|$

(٢١) $\int ٤س هـ^{س^٢} د س =$ ـــــ $+ ث$

(أ) $\frac{1}{2}هـ^{س^٢}$ (ب) $هـ^{س^٢}$ (ج) $٢هـ^{س^٢}$ (د) $٤هـ^{س^٢}$

(٢٢) $\int \frac{لو_{هـ} س^٢}{لو_{هـ} س} د س =$ ـــــ $+ ث$

(أ) $\frac{س}{٢}$ (ب) $\frac{١}{س}$ (ج) $٢س$ (د) $لو_{هـ}|س|$

(٢٣) $\int \frac{١}{س لو_{هـ} ٢س} د س =$ ـــــ $+ ث$

(أ) $٢لو_{هـ}|س|$ (ب) $٢لو_{هـ}|لو_{هـ}٢س|$ (ج) $\frac{١}{٢}لو_{هـ}|س|$ (د) $\frac{١}{٢}لو_{هـ}|لو_{هـ}س|$

(٢٤) $م = هـ^{لو_{هـ}٧}$ فإن $م =$ ـــــ

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{هـ}$ (ج) هـ (د) ٧

(٢٥) مجموعة حل المعادلة $لو_{هـ}(س-٢) + لو_{هـ}(س-٣) = لو_{هـ}٦$ هى ـــــ

(أ) $\{٥، ٠\}$ (ب) $\{٥\}$ (ج) $\{٦، ٠\}$ (د) $\emptyset$

(٢٦) إذا كانت $د(س) = س^٢ - ٢لو_{هـ} س$ فإن $د(٢) =$ ـــــ

(أ) -١ (ب) ١ (ج) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٦

(٢٧) يكون للدالة عيد صغرى محلية إذا كانت $د(س) =$ ـــــ

(أ) $٢س - ١$ (ب) $-س^٢ + ١$ (ج) $س^٢$ (د) $-س^٢$

(٣٨) إذا كانت د : [-٢، ٤] ← ع ، د(س) = س^{٢} - ٢س
فإن عدد النقاط الحرجة للدالة د =
(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(٣٩) منحنى الدالة د محدباً لأسفل فإن إذا كانت د(س) =
(أ) ٢ - س^{٢} (ب) ٢ - س^{٢} (ج) ٢ - س^{٤} (د) ٢ + س^{٤}

(٤٠) إذا كانت لمنحنى الدالة د نقطة انقلاب عندما س = ٢
صفر د(س) = س^{٢} + لـ س^{٢} + ٤ فإن لـ =
(أ) -٦ (ب) -٢ (ج) ٢ (د) ٦

(٤١) يكون للدالة قيمة صغرى محلية إذا كانت د(س) =
(أ) س^{٢} - ٢ (ب) س^{٢} + ١ (ج) س^{٢} + ٢س (د) س^{٤} - ٢س^{٢}

(٤٢) ∫ س (س^{٢} + ٢)^{٥} د س = ـــــ + ث
(أ) $\frac{١}{٦}$ (س^{٢} + ٢)^{٦} (ب) $\frac{١}{١٢}$ (س^{٢} + ٢)^{٦} (ج) $\frac{١}{٤}$ (س^{٢} + ٢)^{٤} (د) $\frac{١}{٨}$ (س^{٢} + ٢)^{٤}

(٤٣) إذا كانت ق (س) لو$_{هـ}$ (س^{٢} + ٢) لو$_{هـ}$ س ، ص ع - ق ع د ص
فإن ص ع = ـــــ
(أ) ٢ س لو$_{هـ}$ س (ب) (س^{٢} + ٢) لو$_{هـ}$ س (ج) $\frac{١}{٢}$ (س^{٢} + ٢) لو$_{هـ}$ س (د) (س^{٢} + ٢) لو$_{هـ}$ س

(٤٤) إذا كانت د(س) = |س| فإن ق^{٢} د(س) د س = ـــــ
(أ) -١ (ب) صفر (ج) ٢ (د) ٤

(٤٥) إذا كانت ق (٢س - ١) هـ$^{س^{٢}+٢}$ د س = ص ع - ق ع د ص
(أ) (ب) (ج) (د)
فإن ق ع د ص = ـــــ + ث
(أ) هـ$^{س^{٢}+٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ هـ$^{س^{٢}+٢}$ (ج) هـ$^{س^{٢}+٢}$ (د) - هـ$^{س^{٢}+٢}$

(٤٦) إذا كانت ص' = ظتا^{٢} س ، ص = ٤ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$
فإن ص = ـــــ
(أ) -٤ - ظتا س (ب) ٤ - ظتا س (ج) -٢ - ظتا س (د) ٢ - ظتا س

(٤٧) $\int \frac{2}{\sqrt{5-x^2}}\,dx =$ ـــــــ + ث

(أ) $x+\frac{1}{2}\sin 2x$ (ب) $x+2\sin 2x$ (ج) $x-\frac{1}{2}\sin 2x$ (د) $x-\sin 2x$

(٤٨) $\int \cos^2 x \tan x\,dx =$ ـــــــ + ث

(أ) $\frac{1}{5}\cos^5 x$ (ب) $\frac{1}{4}\cos^4 x$ (ج) $\frac{1}{2}\tan^2 x$ (د) $-\frac{1}{2}\tan^2 x$

(٤٩) $\int (2x+2)\tan(x^2+2x)\,dx =$ ـــــــ + ث

(أ) $(2x+2)\sec(x^2+2x)$ (ب) $\sec(x^2+2x)$ (ج) $\sec(x^2+2x)\tan(x^2+2x)$

(د) $(2x+1)\sec(x^2+2x)\tan(x^2+2x)$ (هـ) $-(2x+1)\sec(x^2+2x)\tan(x^2+2x)$

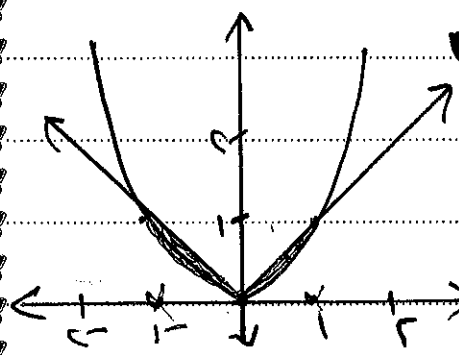
(٥٠) إذا كانت $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 12$ ، $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = 16$

فإن $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx =$ ـــــــ

(أ) -8 (ب) -4 (ج) 4 (د) 8

(٥١) مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=x^2$

، $y=|x|$ = ـــــــ

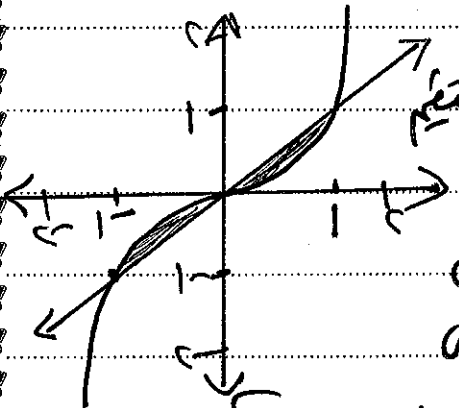


(أ) $2\int_{-1}^{1} (x^2-x)\,dx$ (ب) $2\int_{0}^{1} (x-x^2)\,dx$

(ج) $2\int_{-1}^{1} (x-x^2)\,dx$ (د) $\int_{-1}^{1} (x^2-x)\,dx$

(٥٢) مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y=x^2$ والمستقيم

$y=x$ هي ـــــــ



(أ) $\int_{-1}^{1} (x^2-x)\,dx$ (ب) $2\int_{0}^{1} (x^2-x)\,dx$

(ج) $\int_{0}^{1} (x-x^2)\,dx$ (د) $2\int_{0}^{1} (x-x^2)\,dx$

(٥٣) مساحة المنطقة المحدودة بالمستقيمات $y=x$ ، $x=2$ ، $y=0$

= ـــــــ (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) 2 (د) 4

(٥٤) حجم الجسم الدوراني الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى

$y=2\sin x$ ، $y=0$ ، $x=0$ ، $x=\pi$ دورة كاملة حول المحور x

(أ) $-\pi$ (ب) 0 (ج) π (د) 2π

٥٥) حاصر المنطقة المحدده بالمنحنى ص = س٢ والمستقيمات
ص = ٠ ، ٦ س = ٢ = ـــــ

(أ) ٨ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ١

٥٦) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدده بالمنحنى
ص = ١/س والمستقيمين ص = ١ ، ص = ٢ ومحور الصادات
دوره كامله حول الصادات = ـــــ

(أ) π/٤ (ب) π/٢ (ج) π (د) ٢π

٥٧) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدده بالمنحنى ص = س٢
والمستقيم ص = ١ دوره كامله حول الصادات = ـــــ

(أ) π (ب) ١/٢ π (ج) ١/٤ π (د) ٢π

٥٨) π ∫ (٤ − س٢) دس هو حجم

(أ) كره طول نصف قطرها ٤ وحدات (ب) مخروط دائري قائم ارتفاعه ٤ وحدات
(ج) كره طول نصف قطرها ٢ وحده (د) اسطوانه دائريه قائمه ارتفاعها ٤

٥٩) اذا كان د(س) = ∫ (٢ س٢ − ٥) دس وكان د(٢) = ٣
فإن د(−٢) = ـــــ

(أ) −٦ (ب) −٢ (ج) ٧ (د) ١٢

٦٠) اذا كان دص/دس = س + ١/س ، ص = ١/٢ عندما س = ١
، عندما س = هـ فإن ص = ـــــ

(أ) هـ٢ − هـ (ب) (هـ٢ − ١)/٢ (ج) (هـ٢ + ١)/٤ (د) هـ/٢ + ١

٦١) ∫ ظا٢ س دس = ـــــ + ث

(أ) ظا س − س (ب) ظا س + س (ج) ظا٤ س (د) ١/٢ ظا٢ س

٦٢) اذا كان ∫٥ د(س) دس = ٤ فإن ∫٥ [٢ د(س) − ١] دس
= ـــــ

(أ) ٩ (ب) ١١ (ج) ١٢ (د) −٨

(٦٢) حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى
د(س) = س² ومحور السينات والمستقيمين س = ٠ ، س = ٢
دورة واحدة حول محور السينات =
أ $\frac{16\pi}{5}$ ب $\frac{22\pi}{5}$ ج $\frac{44\pi}{5}$ د ٤π

(٦٤) $\int (4 - \cos s \tan s)\, ds =$
أ ٤س − جتا س ب ٤س + جتا س ج ٤س − ظا س د ٤س + ظا س

(٦٥) $\int \frac{هـ^{ص}}{هـ^{ص} - 2}\, ds =$
أ $-\frac{1}{2}(هـ^{ص} - 2)$ ب $-$ لو |هـ^ص − ٢|
ج لو |هـ^ص − ٢| د $\frac{1}{2}$ لو |هـ^ص − ٢|

(٦٦) $\int (1 - 2س)^{2}\, ds =$
أ ٤ ب ٢ ج ١ د صفر

(٦٧) حاصل المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = $\sqrt{4 - س}$ ومحور السينات
ومقدرة بالوحدات المربعة =
أ ٢ ب ٤ ج ٢π د ٤π

(٦٨) إذا كان $\int_{1}^{4} د(س)\, ds = 5$ ، $\int_{1}^{4} ر(س)\, ds = 7$ فإن
$\int_{1}^{4} (4 د(س) + ر(س) + 2)\, ds =$
أ −١٢ ب −٧ ج ١٢ د ١٩

(٦٩) حجم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بين المنحنى
ص = $\frac{4}{س}$ والمستقيمات س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠
دورة كاملة حول محور السينات =
أ $\frac{\pi}{2}$ ب $\frac{\pi}{4}$ ج ٢π د ٣π

(٧٠) أي المعادلات التفاضلية التالية تحقق العلاقة $\frac{د^{2}ص}{د س^{2}} = ص$
أ ص = $\frac{1}{12}(س + 1)^{4}$ ب ص = ظا س
ج ص = $\frac{س}{1 - س}$ د ص = $س^{س}$

(٧١) إذا كان طول نصف قطر دائره يتزايد بمعدل $\frac{1}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائره يتزايد بمعدل ـــــ سم/ث

(أ) $\frac{2}{\pi}$ (ب) ٢ (ج) ٢π (د) π٢

(٧٢) مقدار الدالة $د(س) = س^{٢} - ٢س^{٣} + ٢$ محدبة لأعلى عندما $س \in$ ـــــ

(أ) $]-\infty, ٠[$ (ب) $]-\infty, ١[$ (ج) $]٢, ١[$ (د) $]\infty, ١[$

(٧٣) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} (ب جتا س + جا س) \, دس =$ ـــــ

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) صفر (د) π

(٧٤) إذا كانت د متصلة على $[٢, ٥]$ ، $\int_{٢}^{٥} د(س) \, دس = ٨$ ، $\int_{٢}^{٤} ٢[د(س)] \, دس = ٩$ فإن $\int_{٤}^{٥} د(س) \, دس =$ ـــــ

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٣ (د) ٥

(٧٥) عدد نقط القيم القصوى المحلية للدالة د حيث $د(س) = ٧ - ١٦س^{٢}$ في مجال الدالة $ح$ هو ـــــ

(أ) π١٦ (ب) π١٢ (ج) π٨ (د) π٤

(٧٦) معادلة المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة $(-\frac{1}{٢}, ١)$ هي ـــــ

(أ) $ص = ٢س + ١$ (ب) $ص = ٢س + ٢$ (ج) $ص = ٢س - ٢$ (د) $ص = ٢س + ١$

(٧٧) إذا كان $ص = ٤ن^{٢} + ٤$ ، $ع = ٢ن^{٢} - ٢$ فإن معدل تغير ع بالنسبة إلى ص = ـــــ

(أ) ٢ن (ب) ٢ (ج) $\frac{١}{٢ن}$ (د) ٤

(٧٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة $د(س) = س^{٣} - ٨س$ عند $س = ٢$ هو ـــــ

(أ) ٨ (ب) ١٦ (ج) ٢٤ (د) ٦٤

(٧٩) ميل المماس لمنحنى الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ عند $س = ٣$ هو ـــــ

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٣}{٤}$ (ج) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٨٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أي نقطة هو $\frac{1}{س-٢}$ وكان المنحنى يمر بالنقطة (٢، ٠) فإن د(٥+٢) =
(أ) ٢ (ب) ٢ (ج) $\ln ٢$ (د) $\ln ٥$

(٨١) إذا كانت د متصلة على [١، ٦] وكان $\int_{١}^{٦} د(س)\,دس = ٩$ فإن $\int_{١}^{٦} [٢ - د(س)]\,دس$ =
(أ) ٢ (ب) ٨ (ج) ١٦ (د) ٦٢-

(٨٢) حجم الجسم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى
(أ) (ب) (ج) (د)
ص = $\sqrt{س+١}$ والمستقيمات ص = ٠، س = ٠، س = ١
(أ) π (ب) $\frac{٣\pi}{٢}$ (ج) $٣\pi٢$ (د) $\frac{٥\pi}{٢}$

(٨٣) إذا كان د(س) = $\frac{س}{س-٢}$ فإن د‴(٣) = ـــــ
(أ) ٣٦- (ب) ١٢- (ج) ٦ (د) ٢

(٨٤) إذا كانت $\frac{دص}{دس}$ = ظتا س، ص = ٢ عندما س = $\frac{\pi}{٤}$
فإن ص = ـــــ
(أ) ٢- ظتا س (ب) ٢- ظتا س (ج) ٢- ظتا س (د) ٣- ظتا س

(٨٥) إذا كان $\int_{٢}^{٤} د(س)\,دس = ٧$ فإن $\int_{٢}^{٤} [٥ - (س-٢)د(س)]\,دس$ =
(أ) ١٨- (ب) ٨- (ج) ١٠ (د) ١٤

(٨٦) حاصر المنطقة المحدودة بالمستقيمات ص = ٢س - ٢، ص = س + ١، س = ٢ =
(أ) ٢ (ب) ٢ (ج) $\frac{٩}{٢}$ (د) ٦

(٨٧) حجم الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = ظا س، المستقيم س = $\frac{\pi}{٤}$، س = $\frac{\pi}{٢}$ ودورة كاملة حول
(أ) $\pi^{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}^{٢}$ (ج) $\frac{٢\pi}{٥}^{٢}$ (د) $٢\pi^{٢}$

(٨٨) إذا كان ص = $\frac{٢س - ٥}{س - ٢}$ فإن عند س = ١ ، $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = ـــــ

(أ) -١٢ (ب) -٦ (ج) ٦ (د) ١٢

(٨٩) $\int$ جا^٢ س ظا س د س = ـــــ + ث

(أ) $\frac{١}{٤}$ جا^٤ س (ب) $\frac{١}{٢}$ جا^٢ س (ج) $\frac{١}{٢}$ ظا^٢ س (د) $-\frac{١}{٢}$ ظا^٢ س

(٩٠) المحوى للدائرة س^٢ + ص^٢ = ١٢ عند أى نقطة تقع على محيطها ـــــ

(أ) (٢، ٢) (ب) (١، ١) (ج) (٠، ٠) (د) (-٢، -٢)

(٩١) منحنى الدالة د(س) = (س - ٢) هى محدبا لأسفل فى الفترة (أ)]-∞، ∞[(ب)]-١، ١[(ج)]٠، ∞[(د)]١، ∞[

(٩٢) $\int_{-١}^{٢}$ (٢ - س^٢ - ٤) د س = ـــــ

(أ) -٧ (ب) -٢ (ج) ٢ (د) ٧

(٩٣) عند دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى س = $\frac{١}{\sqrt{ص}}$ ، ص = ١ ، ص = ٤ ومحور الصادات دورة كاملة حول الصادات فإن حجم الناتج هو ـــــ

(أ) $\frac{٣}{٢}\pi$ (ب) ٢π (ج) π لو ٤ (د) $\frac{٣}{٢}\pi$ لو ٢

(٩٤) إذا كان س = ٢ن^٢ + ٧ ، ص = $\sqrt{٢ن^٢ + ٧}$ ، ن = ١

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = ـــــ

(أ) $\frac{٢}{٨}$ (ب) $\frac{٢}{٤}$ (ج) ٢ (د) ٦

(٩٥) منحنى الدالة د محدبا لأسفل إذا كان د(س) = ـــــ

(أ) ٢ - س^٤ (ب) ٣ + س^٢ (ج) ٢ - س^٣ (د) ٢ + س^٤

(٩٦) إذا كان لمنحنى د(س) = س^٢ + ل س^٢ + ٤ نقطة انعطاف عند س = ٢ فإن ل = ـــــ (أ) -٦ (ب) -٢ (ج) ٦ (د) ٩

(٩٧) $\int_{-١}^{٢}$ |س - ١| د س = ـــــ

(أ) -٦ (ب) صفر (ج) ٤ (د) ٨

(٩٨) إذا كانت د متصله على $[1, 2]$ ، $\int_1^2 د(س)\,دس = ٧$

$\int_1^2 ٥\,د(س)\,دس = -١١$ فإن $\int_1^2 د(س)\,دس =$ ـــــ

(أ) -٤ (ب) ١٨ (ج) -١٨ (د) ٧٧

(٩٩) ما المنطقة المحدودة بمنحنى $ص = -س^٢$ والمستقيمين

$ص = ٠$ ، $س = ٢$ = ـــــ

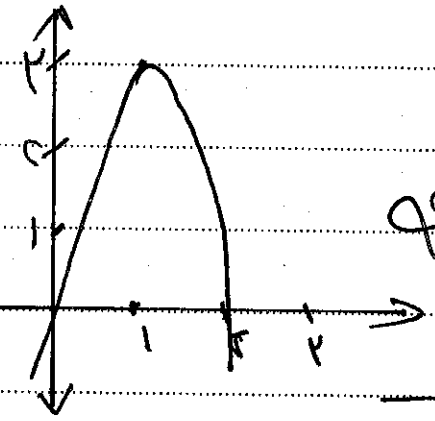
(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٤ (د) ٨

(١٠٠) إذا كان $س ص = ط س$ ص فإن

$س ص'' + ٢ ص' + ٤ س ص =$ ـــــ

(أ) صفر (ب) ٢ (ج) ٤ (د) $٤ ط س$

س ١ : أكمل



(١) الشكل المقابل يمثل د(س) حيث

د(س) = $أ س^٢ + ب س + ج$ فإن

(أ) الدالة د متناقصة لكل س ∈ ـــــ

(ب) منحنى الدالة نقطة رجوعها عند س = ـــــ

(ج) منحنى الدالة محدب لأعلى على الفترة ـــــ

(د) تقعر منحناه صغرى محلية للدالة عند س = ـــــ

(هـ) د(١) = ـــــ

(و) ما المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة د والمستقيمين

س = ٢ ، ص = ٠ ، بالوحدات المربعة = ـــــ

(٢) إذا كان للدالة د(س) = ل $س^٢ + ٩ + ٢ س^٣$ نقطة

انقلاب عند س = -١ فإن ل = ـــــ

(٣) إذا كان د متصلة على $[١, ٤]$ فإن $\int_١^٤ د(س)\,دس + \int_١^٤ د(س)\,دس =$ ـــــ

إجابة الخامسة

(١) المماس متعامد مع س
$\frac{ص}{-س}$ = $\frac{د ص}{د س}$ ← $\frac{د ص}{د س}$ × ص + ٢س = ٠ ←

(٢) س^{٢} − ٢س ص + ص^{٢} = صفر
(س − ص)^{٢} = صفر ← س − ص = صفر
← ص = س ← $\frac{د ص}{د س}$ = ١

(٣) ص^{٢} = ٢ل س المماس متعامد
٢ص $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢}{٢س}$ ← $\frac{د ص}{د س}$ ص = $\frac{١}{ص}$
← $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٢ص}$

(٤) $\frac{د س}{د ن}$ = ٤ ن ، $\frac{د ص}{د ن}$ = $\frac{١}{٢}$ ن$^{-\frac{١}{٢}}$
← $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٢}$ ن$^{-\frac{١}{٢}}$ ÷ ٤ ن
وعند ن = ١ عاريه
← $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{٢}$ ÷ ٤ = $\frac{١}{١٢}$

(٥) المماس متعامد
١ ص^{٢} + ٢ ص $\frac{د ص}{د س}$ × س = صفر عند (٣،١)
← ١ + ٢ $\frac{د ص}{د س}$ × ٣ = صفر ← $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{-١}{٦}$

(٦) محيط الدائرة (ط) = ٢ π نق
$\frac{د ط}{د ن}$ = ٢π $\frac{د نق}{د ن}$ ← $\frac{د ط}{د ن}$ = ٢π × $\frac{د ق}{د ن}$
← $\frac{د ط}{د ن}$ = ٨ سم/ث

(٧) حجم المكعب ح = ل^{٣} عند ح = ٨ ← ل = ٢ سم
$\frac{د ح}{د ن}$ = ٣ ل^{٢} × $\frac{د ل}{د ن}$ يتصغر ← $\frac{د ح}{د ن}$ = −١
← −١ = ٣ × ٤ × $\frac{د ل}{د ن}$ ← $\frac{د ل}{د ن}$ = $\frac{-١}{١٢}$

(٨) $٢ص \frac{دص}{دس} = ٢ - س^{٢} \frac{دس}{دس}$

$\frac{١}{٤} \times ١ \times ٢ = \frac{دص}{دس} \times ١ - ٢ \times ٢$

$\Leftarrow -٢ \times \frac{دص}{دس} = \frac{٣}{٤} \Leftarrow \boxed{\frac{-٢}{٤} = \frac{دص}{دس}}$

عند ص = -١ ، س = ١

(٩) $ص' = ٨ \text{ جتا}^{٣} س \times \text{جا} س \text{ جتا} س = ٨ \text{ جا} س \text{ جتا}^{٣} س$

عند $س = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow ص'(\frac{\pi}{٤}) = ٨ \times ٢ \times ١ = \boxed{١٦}$

(١٠) $\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \times \frac{دن}{دس} \Leftarrow \frac{١}{٤} = \frac{دص}{دن} \times \frac{-٢}{٢}$

$\Leftarrow \frac{دص}{دن} = \boxed{\frac{-٢}{٤}}$

(١١) $ص = \frac{١}{٤} \text{ جا}^{٤} س \Leftarrow ص' = ٤ \times \frac{١}{٤} \text{ جا}^{٣} س$

$\therefore ص' = ٣ \text{ جا}^{٣} س \text{ جتا} س \Leftarrow ص'' = -٨ \text{ جا}^{٣} س$

عند $س = \frac{\pi}{٢} \Leftarrow ص'' = -٨ \times ١ \times \frac{\pi}{٢}$

$\Leftarrow ص'' = -٨٠٫٤ = \boxed{٣٢\pi}$

(١٢) $١ ص^{٢} + ٢ ص \frac{دص}{دس} \times س = صفر$

عند (٢، ٤) $\Leftarrow ٤ + ٤ \frac{دص}{دس} \times ٢ = صفر$

$\Leftarrow \frac{دص}{دس} = \boxed{\frac{-١}{٢}}$

(١٣) $\frac{دص}{دن} = ٦ن^{٢} \Rightarrow \frac{دص}{دن} = ٢٤$

$\therefore \frac{دص}{دن} = ٦٤^{٢} \div ٢٤ = \boxed{٤٣}$

(١٤) م المائله $= ٣ \pi نصـ^{٢} \Leftarrow \frac{دم}{دن} = ٢ \pi نصـ \frac{دنصـ}{دن}$

$٢٠ \pi = ٢ \pi \times ٣ \times ٢ \Leftarrow ٢٠ = ٤ نصـ$

$\Leftarrow \boxed{نصـ = ٥}$

(١٥) $ص = ظا س \Leftarrow ص' = -ظا س$

$\Leftarrow ص'' = -٢ ظا س \times -ظا س$

$\Leftarrow ص'' = ٢ ظا^٢ س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$\Leftarrow ص'' = ٢ \times ٢ \times ١ = \boxed{٤}$

---

(١٦) ميل المحور $ص = \frac{-١}{٤} \Leftarrow$ ميل المماس $= ٤$

$\Leftarrow د'(١) = ٤$ وهو ميل المماس عند (١، ١)

(١٧) $٢ص \frac{دص}{دس} = ص ص - ٢س \frac{دص}{دس}$ عند $(-٢، ٤)$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{-٦+٢} = \frac{-١}{٢}$

$\therefore ٢ \times ٤ \times \frac{دص}{دس} = -٢ \times \frac{١}{٣} \times -٢$

$٨ \frac{دص}{دس} = \frac{-٤}{٢} \Longleftarrow \boxed{\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{٤}}$

---

(١٨) $\frac{دص}{دس} = ٦س$ عند $(١، -٣) \Longleftarrow \boxed{م = ٦}$

معادلة المماس $\Leftarrow ص + ٣ = ٦(س - ١)$

$\Leftarrow ص - ٦س + ٨ = ص ص$ ، المماس يمر بـ $(ص، -٨)$

---

(١٩) $\left[\lim_{س \to ص} (١ + \frac{١}{س})^{س} \right]^{٢} = ص ص$

(٢٠) $\lim_{س \to ٠} (١ + س)^{\frac{١}{٢س}} = ص^{\frac{١}{٢}}$

(٢١) $\frac{١}{٣} \lim_{س \to ٠} \frac{ن(١ + ٢س) - ١}{س} = \frac{١}{٢}$ لو$_{ص}$ ٢

(٢٢) بوضع $\boxed{ص = س - ١} \Longleftarrow$ عندما $ص \to ٠$ ، $\lim \frac{ن(ص + ١)}{ص} = ١$

(٢٣) $د(س) = ص^{٣س} \Longleftarrow \boxed{د'(س) = ٣ ص^{٣س}}$

(٢٤) $د(س) = ٩ ق^{٢س} \Leftarrow د(-س) = ٩ ق^{-٢س}$

$\therefore د(-س) = ٩ ق^{٢س} \Leftarrow د(-س) = د(س)$

(٢٥) اذا صه من (بجاه) الساعات مقدارها ؟

" " " " الصادات " ١

∴ الاستقال هو (٢، ٢)

(٢٦)

$$ص_١ = \frac{١}{١+س٢} \times \frac{١}{١+س٢} = \frac{١}{(١+س)^٢}$$

بالمثل

$$ص_٢ = \frac{١}{(١+س)^{١٠}} \quad ∴ \quad \frac{ص_١}{ص_٢} = \frac{١}{٢} ; \frac{١}{١٠} = \boxed{٥ : ٣}$$

(٢٧)

$ب(-٤، ٠) ، ج(٤، ٠) \Leftarrow ب ج = ٨$ وهو طول

$د(٤) = ٥ ، د(٤) =$ ميل المماس $= ٩$

$\therefore د(٤) =$ التعويض في العلاقة $= \frac{٥}{٨}$

$\therefore ٥ + \frac{٥}{٨} = ٩ \Leftarrow \boxed{٥ = ٨}$

$\Leftarrow$ م Δ ب ج $= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ = \boxed{٣٢}$ وحده مربعه

(٢٨) التكامل $د = \frac{١}{٢}[ق^{٢س} - ق^{-٢س}] + ج$

$د(٠) = ٠ \Leftarrow ٠ = \frac{١}{٢}[١ - ١] + ج$

$\Leftarrow ج = ٠ \Leftarrow د = \frac{١}{٢}[ق^{٢س} - ق^{-٢س}]$

التكامل في المرة الثانية

$ع = \frac{١}{٢}[ق^{٢س} + ق^{-٢س}] + ج_١$

$د(٠) = ١ \Leftarrow ١ = \frac{١}{٢}[١ + ١] + ج$

$\Leftarrow ج = ٠ ، ص = ع \Leftarrow ع(س) = \frac{١}{٢}[ق^{٢س} + ق^{-٢س}]$

$\Leftarrow د(س) = ع(س)$

(٢٩) $\frac{ص}{س} = ٤ هـ^{٢س}$ ← $ص = \frac{٤}{٢} هـ^{٢س} + ث$ بالتكامل

$ص = ٢ هـ^{٢س} + ث$

$د(٠) = ٢$ ← $٢ = ٢ \times ١ + ث$ ← $ث = صفر$

$\therefore ص = ٢ هـ^{٢س}$ ← $د(-س) = ٢ هـ^{-٢س}$

---

(٣٠) $= ٦ \int \frac{٥ هـ^{٥س}}{٥ هـ^{٥س} - ٦} د س = \frac{٥ هـ^{٥س} - ٦}{٥ هـ^{٥س}} د س$

$= \ln | ٥ هـ^{٥س} - ٦ | + ث$ ← قاعدة مشتقة لوغاريتم

---

(٣١) $٢ ظا^{٢} س \, هـ^{ظا س} د س = ٢ هـ^{ظا س} + ث$

---

(٣٢) $= ٦ \int \frac{\ln ٢ \, هـ^{س}}{٣ \ln ٢ \, هـ^{س}} د س = ٦ \int \frac{١}{٣} د س = ٢ س + ث$

---

(٣٣) $= \frac{١}{٣} \ln | ٣ هـ^{س} | + ث$ ← قاعدة مشتقة لوغاريتم

---

(٣٤) $م = ٧$ ← قاعدة $= \ln ٧ هـ$

---

(٣٥) $\ln (س-٢)(س-٣) = \ln ٦$ ← صواب لو

$\ln (س^{٢} - ٥س + ٦) = \ln ٦$

$س^{٢} - ٥س + ٦ = ٦$

$س^{٢} - ٥س = ٠$ ← صواب $س (س-٥) = ٠$

$س = ٠$ أو $س = ٥$ ← مرفوض $= ٥$

---

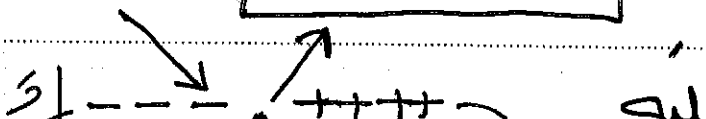
(٣٦) $ق(س) = ٢ س^{٢} - ٢ \times \frac{٥}{٥ س}$

$ق(٢) = ٤ - \frac{٢}{٥} = \frac{١٨}{٥}$

(٢٧) $د(س) = س^٣ + ٢س^٢ + ١$ ⟵ $د' = ٣س^٢ + ٤س$

$د' = ٠$ عند $س = ٠$ ⟵ $س = ٠$

∴ عند $(٠، ١)$ صغرى محلية



(٢٨) $د'(س) = ٢س^٢ - ٣$

$د' = صفر$ ⟵ $س^٢ = ١$ ⟵ $س = \pm ١$

∴ عدد النقط الحرجة $= ٢$ ∵ $١ \notin]-١، ١[$

---

(٢٩) $د = ٢س^٤ + ٢ك س$ ⟵ $د' = ٦س + ٢ك$

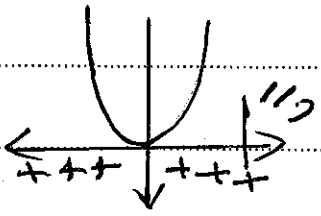
$د'' = صفر$ ⟵ عند $س = ٢$ نقطة انعطاف

∴ $١٢ + ٢ك = صفر$ ⟵ $\boxed{ك = -٦}$

---

(٣٠) $د(س) = ٢ + س^٤$ ⟵ $د' = ٤س^٣$

$د'' = ١٢س^٢$ ⟸ $د'' = ٠$ ⟵ $س = ٠$



∴ منحنى الدالة محدب لكل $س \in ح$

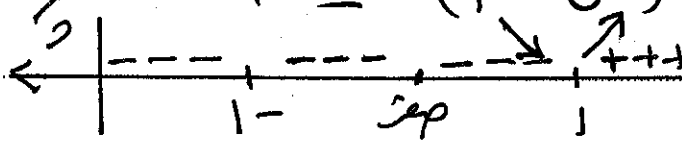
---

(٣١) $د(س) = س^٤ - ٤س^٣$ ⟵ $د' = ٤س^٣ - ١٢س^٢$

$د' = صفر$ ⟵ $٤س(س - ٣) = صفر$

∴ للدالة عند صغرى ⟵ $د'$: $---$ عند ٠، $---$ عند ١، $+++$ عند ٣

عند $س = ٣$



---

(٣٢) $\int_{-١}^{١} س(س^٢ + ٥)^٥ \, د س$ دالة χ مشتقها

$= \frac{١}{٢} \int_{-١}^{١} ٢س(س^٢ + ٥)^٥ \, د س$

$= \frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢} \times (س^٢ + ٥)^٦ + ج$

$= \frac{١}{١٢} (س^٢ + ٥)^٦ + ج$

(٤٢) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,(2+\cos\theta)\,d\theta$

تفاضل ↓ $\frac{1}{\sin\theta}$ ، $\sin\theta$ ← تكامل

$\cos\theta$ ← $\sin^2\theta + 2\sin\theta$

$= \left[\sin\theta\,(\sin^2\theta + 2\sin\theta)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,(\sin^2\theta + 2\sin\theta)\,d\theta$

$= \sin\theta\,(\sin\theta+2)\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

---

(٤٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\cos\theta\,d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\cos\theta\,d\theta$ بالتعويض

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\cos\theta\,d\theta = 2\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2 \times \frac{1}{2} = \boxed{1}$

---

(٤٥) $\int \frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}\,d\theta$

تفاضل ↓ $2\sin\theta - 1$ ، $\cos\theta$ ← تكامل

$\frac{1}{2}$ ← $\frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}$

$\int \frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\ln|2+\sin\theta| + c$

---

(٤٦) $\int \sin\theta\,\cos\theta\,d\theta$

$\sin\theta = -\cos\theta + c$ ← $\theta = \frac{\pi}{4}$

$1 = -\cos\frac{\pi}{4} + c$ ← $c = 3$

$\therefore \sin\theta = 3 - \cos\theta$

---

(٤٧) $\int \cos\theta\,(\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)\,d\theta$

$= \int \cos\theta\,(1 + \sin\theta)\,d\theta$

$= \sin\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta + c$

(٤٨) $\int$ جا^{٢}س × جتا س ظا س د س دالة لا متغيرا

$= \frac{١}{٤}$ جا^{٤}س + د

(٤٩)

تفاضل ← ٢ س + ٤ ← ظا س د س ← تكامل

٣ د س ← $\int$ = ص

= ص ظا س − $\int$ ٢ ص ظا س د س

= ص ظا س − $\int$ (٢ س + ٤) × ٣ ظا س + د

(٥٠)

$\int_{-٢}^{٥}$ د (س) د س = $\int_{-٢}^{٣}$ د (س) د س + $\int_{٣}^{٥}$ د (س) د س

∴ ١٦ = ١٢ + $\int_{٣}^{٥}$ د (س) د س

← $\int_{٣}^{٥}$ د (س) د س = ١٦ − ١٢ = ٤

(٥١)

ط ص = $\int_{-١}^{١}$ (|س| − س^{٢}) د س دالة زوجية

= ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) د س

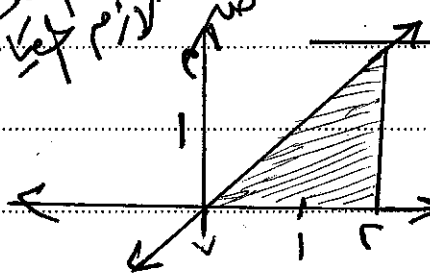
(٥٢)

= $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) د س + |$\int_{-١}^{٠}$ (س − س^{٢}) د س|

= ٢ $\int_{٠}^{١}$ (س − س^{٢}) د س

أكمل بنفسك لازم حتعاس

(٥٣)



عند س = ٢ ← ص = ٢

ط ص = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ = ٢

(٥٤)

الحجم = π $\int_{٠}^{١}$ ٤ س د س = π [٢ س^{٢}]$_{٠}^{١}$

= π × ٢ × ١ = ٢π

(٥٥) $= \int_0^{\frac{1}{4}} س^2 \, ص \, د س = \left[\frac{1}{4} س^4 \right]_0^{\frac{1}{4}}$ عند $ص = 0$

$= \frac{1}{4} \times 16 = 4$ $\quad \Leftarrow س = 0$

---

(٥٦) $ص^2 = س^2 \leftarrow س^2 = \frac{1}{ص^2}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{ص^2} \, د ص = \pi \left[\frac{-1}{ص} \right]_1^{\infty}$

$\therefore$ الحجم $= \pi \left| 0 + \frac{1}{1} \right| = \pi$ وحدة حجم

---

(٥٧) الحجم $= \pi \int_0^{1} ص \cdot د ص = \pi \left[\frac{1}{2} ص^2 \right]_0^{1} = \frac{\pi}{2}$

---

(٥٨) المنحنى هو $ص^2 = 4 - س \leftarrow س^2 + ص^2 = 4$

وهى معادلة دائرة طول نصف قطرها ٢

$\therefore$ الحجم الناشئ هو كرة طول نصف قطرها ٢ سم

---

(٥٩) $د(س) = س^2 - 5س + ج$ ، $د(2) = 3$

$\Leftarrow 3 = 8 - 10 + ج \Leftarrow \boxed{ج = 5}$

$\Leftarrow د(س) = س^2 - 5س + 5$

$\Leftarrow د(-2) = -8 + 10 + 5 = \boxed{7}$

---

(٦٠) $ص = \frac{1}{2} س^2 + \ln س + ج$ عند $ص = \frac{1}{2}$ ، $س = 1$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + صفر + ج \Leftarrow ج = صفر$

$\therefore ص = \frac{1}{2} س^2 + \ln س$ $\quad \Leftarrow$ عند $س = هـ$

$\boxed{ص = \frac{1}{2} هـ^2 + 1}$

حيث $\ln 1 = صفر$ ، $\ln هـ = 1$

(٦١) $ظا^{٢}س = قا^{٢}س - ١$

$\leftarrow \int (١ + قا^{٢}س) \, دس = \int (قا^{٢}س - ١) \, دس$

$= ظاس - س + ث$

---

(٦٢) المقدار $= \int_{٠}^{٢} ٣ د(س) - \int_{٠}^{٢} ١ \, دس$

$= ٣ \int_{٠}^{٢} د(س) \, دس - [س]_{٠}^{٢}$

$= ٣ \times ٤ - ٢ = ١٢ - ٢ = ١٠$ ✓

---

(٦٣) الحجم $= \pi \int_{٠}^{٢} س^{٤} \, دس$ الوضع الرباعي $ص = س^{٢}$

$= \pi \int_{٠}^{٢} س^{٤} \, دس$

$= \pi [\frac{س^{٥}}{٥}]_{٠}^{٢} = \pi \times \frac{٣٢}{٥} = \frac{٣٢\pi}{٥}$ ✓

---

(٦٤) المقدار $= ٤س + ظاس + ث$

(٦٥) البعد صفر المقام

$\therefore ل = \int_{٥}^{١٢} ١ هـ - ١٢ + ث$

---

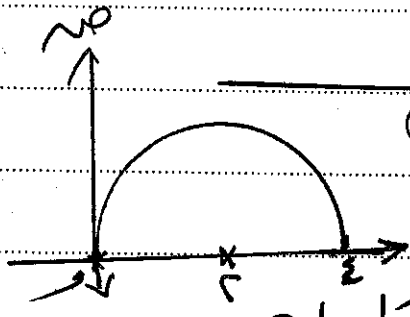
(٦٦) المقدار $= \int_{٠}^{٢} (٢ - س) \, دس$ الوضع الرباعي $س = ٢$

$= [٢س - \frac{١}{٢}س^{٢}]_{٠}^{٢}$

$= ٤ - ٢ = ٢$ ✓

---

(٦٧)



$ص = \sqrt{٤ - س^{٢}}$

$ص^{٢} = ٤ - س^{٢}$

كرة بمركز الأصل

المطلوب هو نصف حجم الكرة نصف قطرها ٢

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \pi (٢)^{٣} = \frac{١}{٢} \times ٣٢\pi$ ✓ $= ١٦\pi$

(٦٨) $\int_1^2 (س) د س + \int_1^2 ٣ د س = \int_1^2 ٤ د س$

$= ٤ \times ٥ - ٧ + (٩ - ٣) =$ **١٩**

---

(٦٩) $ص = \frac{٤}{س^٢}$

$\int_1^{-٢} \frac{٤}{س^٢} د س = \pi [\frac{-٤}{س}]_1^{-٢}$

$= \pi [-١ - (-٤)] =$ **٣π**

---

(٧٠) $ص = ق_س \leftarrow ص' = ق_س \leftarrow ص'' = ق_س$ ايضاً

(٧١) محيط الدائره $= ٢\pi$ نعم

$\frac{د م}{د ن} = ٢\pi \leftarrow \frac{د م}{د ن} = ٢\pi \times \frac{١}{\pi}$

$\leftarrow$ **$\frac{د م}{د ن} = ٢$**

---

(٧٢) $د'(س) = ٢س^٢ - ٦س \leftarrow د'' = ٤س - ٦$

$د'' = صفر \leftarrow س = ١$

$\therefore$ الدالة محدب على $]١ ، \infty -[$

---

(٧٣) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} [ص س + ٩ س] د س$

$= [-ص + ٩] \frac{\pi}{٤} - ٩(-\frac{\pi}{٤})$

$= -ص\frac{\pi}{٤} + ٩\frac{\pi}{٤} + ص\frac{\pi}{٤} - ٩\frac{\pi}{٤}$

$= ٩\frac{\pi}{٤} + ٩\frac{\pi}{٤} = ١ + ١ =$ **٢**

---

(٧٤) $\int_2^5 د(س) = ٨ \Rightarrow \int_2^5 د(س) د س = ٤$

$\therefore ٤ = \int_2^4 + \int_4^5 = ٣ + \int_4^5 د(س) د س$

$\leftarrow \int_4^5 د(س) د س = ١ \Longleftarrow \int_4^5 د(س) د س =$ **٥**

(٧٥) $ص^2 = 16 - س^2 \leftarrow س^2 + ص^2 = 16$

المساحة تساوي نصف مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها ٤

$= \frac{1}{2} \pi نق^2 = \frac{1}{2} \pi \times 16 = \boxed{8\pi}$

---

(٧٦) $ظا هـ = 2$ حيث $س = -\frac{1}{2}$

$\therefore م = ظا(-\frac{1}{2}) = 2$

$\therefore$ معادلة المماس $ص - 1 = 2(س + \frac{1}{2})$

$\therefore ص - 1 = 2س + 1 \leftarrow \boxed{ص = 2س + 2}$

---

(٧٧) $\frac{ص}{كم} = 12 كم^2$ ، $\frac{كع}{كم} = 6 كم$

$\therefore \frac{كع}{ص} = 6 كم \div 12 كم^2 = \boxed{\frac{1}{2 كم}}$

---

(٧٨) $ص = س^2 - 8س \leftarrow ص = صفر$

$\leftarrow س = 0$ ، $س = 8$ (مرفوض) $= 8 \times 2 - 16 = \boxed{16}$

---

(٧٩) $ص = س^3 + 2ص^2 \leftarrow صفر = م$

$\therefore 2 \times 3^2 + 3 \times 2^2 \times م = صفر$

$\leftarrow \boxed{م = -\frac{2}{3}}$

حيث $س = 3$ ، $ص = 4$

---

(٨٠) $\frac{كص}{كس} = \frac{1}{س - 2} \leftarrow ص = لو_هـ (س - 2) + ج$

حيث $س = 2 \leftarrow ص = صفر \leftarrow صفر = لو_هـ 1 + ج$

$\leftarrow ج = 0$

$\therefore ص = لو_هـ (س - 2) \leftarrow ق(هـ^2 + 2) = لو_هـ هـ^2$

$= 2 لو_هـ هـ = \boxed{2}$

(١١) $\int_{٢}^{٦} د(س)\,دس = ٧$

$\therefore \int_{١}^{٦} د(س)\,دس = \int_{١}^{٢} د(س)\,دس + \int_{٢}^{٦} د(س)\,دس$

$= ٩ + ٧ =$ **١٦**

(١٢) $ص^{٢} = س + ١$

الحجم $= \pi \int_{-١}^{١} (س+١)\,دس = \pi \left[\frac{س^{٢}}{٢} + س\right]_{-١}^{١}$

$= \pi \left[\frac{١}{٢} + ١ - \left(\frac{١}{٢} - ١\right)\right] =$ **٢ π**

(١٣)

$د'(س) = \frac{(س-٢)^{٢}}{س-٢-س} = \frac{(س-٢)^{٢}}{-٢}$

$د''(س) = \frac{٤(س-٢)^{٣}}{(س-٢)^{٤}} = \frac{٤+٤(س-٢)}{(س-٢)^{٤}} = \frac{٤س-٨}{(س-٢)^{٤}}$

$د'''(س) = \frac{-١٢(س-٢)^{٢}}{(س-٢)^{٦}} = \frac{-١٢}{(س-٢)^{٥}}$

$د'''(٣) = \frac{-١٢}{(٢-٢)^{٥}} =$ **−١٢**

(١٤)

$ص = -ظتا س + ث$ عندما $س = \frac{\pi}{٤}$ ، $ص = ٢$

$\therefore ٢ = -ظتا \frac{\pi}{٤} + ث \Leftarrow$ **ث = ٣**

$\therefore ص = ٣ - ظتا س$

(١٥)

$\int_{-٢}^{٤} د(س)\,دس = \int_{-٢}^{٤} (٣ - س^{٢})\,دس = ٥$

$= ٢ \times ٧ - ٢ \times ٢ - (-٢)^{٣} - ٥ (٤-٤) =$ **١٠**

(١٦)

لحل المعادلة $٢س^{٢} - ٢ = س + ١ \Leftarrow س = ٤$

$\therefore$ المساحة $= \int_{٢}^{٤} (٢س^{٢} - ٢ - س - ١)\,دس$

$= \left| \int_{2}^{4} (س - 4)\, ds \right| = \left| \left(\frac{س^2}{2} - 4س \right)_{2}^{4} \right|$

$= |(8 - 16) - (2 - 8)| = |-6| = 6$

---

(٨٨)

$ص = \frac{2س - 6 + 1}{س - 3} = 2 + \frac{1}{س - 3}$

$\leftarrow ص' = صفر + \frac{-1}{(س-3)^2}$ عند $س = 1$

$\leftarrow ص'' = \frac{+2(س-3)}{(س-3)^4} = \frac{2}{(س-3)^2}$ ← ص

$\leftarrow ص''' = \frac{6(س-3)}{(س-3)^6} = \frac{6}{(س-3)^5}$ ← $ص''' = 6$

---

(٨٩)

$= 6 \int جتا^2 س \times جا س \, ط س \, دس$

$= \frac{1}{2} جا^2 س + ث$

---

(٩٠)

$2س + 2ص ص' = صفر$ ← $ص' = \frac{-س}{ص}$

∴ ميل المماس $= \frac{ص}{س}$ بفرض (أ، ب) ∈ للمحور ص

∴ إحداثي $ص = \frac{ص - ب}{س - أ} = \frac{ص}{س}$ ∴ (٠، ٠) تحقق إحداثيه

---

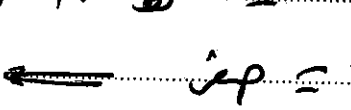
(٩١)

$د_س = ق_س + (س - 2) ق_س = ق_س (س - 1)$

$د_{ص} = ق_س + (س - 1) ق_س = ق_س \times س$

$د_{ص} = صفر$ ← $س = صفر$

يعني جميع قيم س تنتمي إلى $]0, \infty[$



---

(٩٢)

$= \int_{-1}^{2} 2س (4 - س)\, ds$

$= \int_{-1}^{2} (12س - 2س^2 - 4)\, ds$

لأن $س - 4 < صفر$ لكل $س \in$ مجال التكامل

$= [6س^2 - س^3]_{-1}^{2}$

$= (24 - 4) - (6 + 1) = 27 - 7 = \boxed{20}$

(٩٣)

$س^2 = \frac{1}{ص} \Leftarrow$ المجم $= \pi \int_{1}^{4} \frac{1}{ص} \, د ص$

$= \pi [\ln ص]_{1}^{4} = \pi (\ln 4 - \ln 1)$

$= \pi \ln 4$ حيث $\ln 4 - \ln 1 = \ln \frac{4}{1}$

(٩٤)

$\frac{ك س}{ن} = 4ن$ ، $\frac{ك ص}{ك ن} = \frac{2}{3} ن^{\frac{2}{3}+1}$

$\Leftarrow \frac{ك ص}{ك س} = \frac{2}{3} ن^{\frac{2}{3}} \div 4ن$ حيث $\boxed{ن = 1}$

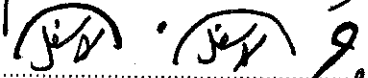
$\Leftarrow \frac{ك ص}{ك س} = \frac{2}{3} \div 4 = \boxed{\frac{2}{8}}$

(٩٥)

$د(س) = 2 + س^4$ لكل $س$

$د' = 4س^2 \Leftarrow د'' = 12 س$

$د'' = 0 \Leftarrow س = 0$



يوجد نقطة انقلاب عند $س = 0$ ، $ص = 2$ هي $(0, 2)$

(٩٦)

$د'(س) = 2س^2 + 2ل س$ عند $س = 2$

$د'' = 4س + 2ل$ انقل $2 \Leftarrow د'' = 0$

$\Leftarrow 4 \times 2 + 2ل = 0 \Leftarrow \boxed{ل = -4}$

(٩٧)

$= \int_{-1}^{1} (1 - س) \, د س + \int_{1}^{2} (س - 1) \, د س$

$= [س - \frac{س^2}{2}]_{-1}^{1} + [\frac{س^2}{2} - س]_{1}^{2}$

$= (1 - \frac{1}{2}) - (-1 - \frac{1}{2}) + (2 - \frac{4}{2}) - (\frac{1}{2} - 1)$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \boxed{4}$

(٩٨) $\int_{-1}^{2} (x^3 + x^5)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\right]_{-1}^{2} = 4 + \frac{32}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = 11$

$\Leftarrow \int_{-1}^{2} (x^5 + 7)\,dx = 11 + 7 = 18$ ✓

(٩٩) $\int_{0}^{2} x^2 \sqrt{x^3}\,dx = \int_{0}^{2} x^{\frac{7}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\right]_{0}^{2}$

$= \frac{16}{\frac{9}{2}} - 0 = \frac{32}{9}$ ✓

(١٠٠) $s = \frac{1}{2} \sin 2x$ ... مشتقة

$ص = s \cos x$ ... مشتقة

$ص' = s' \cos x - s \sin x$

$ص'' = s'' \cos x - 2 s' \sin x - s \cos x$

$\Leftarrow 2 ص' = s'' \cos x - 2 s' \sin x - s \cos x$ ... ①

$4 s \cos x = 2 \sin 2x$ ... ②

من ① ، ②

$ص'' = -4 s \cos x$

$\Leftarrow 2 ص' + s ص'' + 4 s \cos x = 0$ ✓

أجب عن أحد

(١) نقاط حرجة في المنطقة المغلقة $[-\infty, \infty]$

أي الفترة $]-\infty, \infty[$

(٢) النقط الحرجة $x = 0, x = 2$

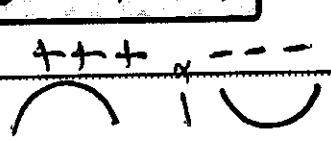
	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$	−	−	0	+	0	−	−
$f(x)$	↓	↓	∩	↑	∪	↓	↓

(٣) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + c$

المنحنى يمر بالنقطتين $(0, 0)$ ، $(1, 2)$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x$

$\therefore f''(x) = -6x + 6$

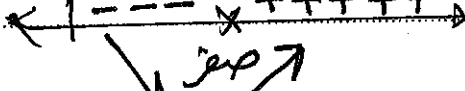


د'' = صفر ← س = ١

∴ د محدب ∩ على الفترة]-∞، ١]

⑤ د' = صفر ← −٢س² + ٦س = صفر

← س = ٠ أو س = ٣



∴ عند س = ٠ نقطة حرجة صغرى

⑥ د' = −٢س³ + ٦س بالتكامل

د = −س² + ٢س² + ث ، وبالتعويض مع

د(س) = م س² + ن س³ الصغرى

∴ د(س) = −س⁴ + ٢س² + ٣

← د(١) = −١ + ٢ + ٣ = ٤

⑨ ∫₀² (−س⁴ + ٢س² + ٣) دس

= [−س⁵/٥ + ٢س³/٣ + ٣س]₀² = −٣٢/٥ + ١٦/٣ + ٦ = ٨/١٥

---

⑦ د' = ٢ل س² + ١٨ س ← د'' = ٦ل س + ١٨

عند س = −١ د'' = صفر (نقطة انقلاب)

← −٦ل + ١٨ = صفر ← ل = ٣

---

⑦ د متصلة على [١، ٤]

∫₁⁴ د(س) دس = ∫₁⁴ د(س) دس = صفر

إذا كنت من أمر الدنيا فلا تنسى الآخرة
وإذا كنت من أمر الآخرة فلا تذكر الدنيا

أسئلة متنوعة

(١) إذا كان $د(س) = ١ + س + س^{٢} + ــــ + س^{٢٠}$

أوجد $د'(١)$

الحل

$د'(س) = ٠ + ١ + ٢س + ٣س^{٢} + ــــ + ٢٠س^{١٩}$

$د'(١) = ١ + ٢ + ٣ + ــــ + ٢٠$ متتابعة حسابية

$= \frac{٢٠}{٢}[١ + ٢٠]$

$\therefore د'(١) = \frac{٢٠}{٢}[١ + ٢٠] = ٢١٠$

---

(٢) إذا كان $\frac{ص}{س} = س^{٢} + ٢$ ، $\frac{ع}{س} = ١ + ٢س$

أوجد $\frac{د^{٢}ع}{د ص^{٢}}$ عند $س = ١$

الحل

لإيجاد أولاً $\frac{د ع}{د ص}$

$\frac{د ع}{د ص} = \frac{د ع}{د س} \times \frac{د س}{د ص}$

$\therefore \frac{د ع}{د ص} = (١ + ٢س) \times \frac{١}{٢ + س^{٢}} = \frac{١ + ٢س}{٣ + س^{٢}}$

$\therefore \frac{د^{٢}ع}{د ص^{٢}} = \frac{٢(٢ + س^{٢}) - ٢س(١ + ٢س)}{(٢ + س^{٢})^{٢}}$

عند $س = ١$

$\therefore \frac{د^{٢}ع}{د ص^{٢}} = \frac{٢ \times ٣ - ٢ \times ٤}{(٤)^{٢}} = \frac{١}{٨}$

---

(٣) إذا كانت $س^{٢} + س ص = ٥$

اثبت أن $س ص'' + ٢ ص' = ٠$

(٢) إذا كان $ص = \frac{ع+1}{ع-1}$

$\therefore س = \frac{ع-1}{ع+1}$ أوجد $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

عند $ع = ٢$ أكمل

مسألة $ع + 1 = ص(ع-1)$

بالتفاضل ضمنياً

$\therefore س = \frac{ع-1}{ص(ع-1)}$

$\therefore \frac{1}{ص} = س \Leftarrow \frac{1}{ص} = ص$

بالاشتقاق

$ص' = \frac{-1}{س^٢}$

$\therefore ص'' = \frac{٢}{٣س}$

عند $ع = ٣$

$\therefore س = \frac{-٢}{+٢} = -١$

$\therefore ص'' = \frac{٢}{-٢٧}$

(٤) إذا كانت $ص = \frac{ن}{ن+1}$

$س = \frac{ن+1}{ن}$ فأثبت أن

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{٢ص^٣}{س^٢}$

أكمل

بضرب الطرفين ضمناً

$\therefore س ص = ص - 1$ I

$\therefore ص = \frac{1}{س}$

$\therefore ص' = \frac{-1}{س^٢}$

$\therefore ص'' = \frac{٢}{٣س}$ II

من I $س = \frac{1}{ص}$

$\therefore ص'' = \frac{٢}{س \times س^٢}$

من II

$\therefore ص'' = \frac{٢ص^٣}{س^٢}$

(٥) إذا كانت $ص^٢ = س^٢ - ٢س$

فأثبت أن

$ص ص'' + (ص')^٢ + ٢س = ١$

أكمل

$\therefore ٢ص ص' = ٢س - ٢$

بالاشتقاق مرة أخرى

$٢ص'^٢ + ٢ص ص'' = ٢ - ٢س$

بالقسمة على ٢

$ص ص'' + ص'^٢ + ٢س = ١$

وهو المطلوب

تقويم

اذا كانت ص = س جاس
فاثبت ان
س ص''' + س ص' + ٢ص = ٠

٦

اذا كان ظا ٢ر = جا ٢ص
فاثبت ان
٢ ظتا ٢ص × ص'' − ٤(ص')^٢ + ٩ = ٠

الحل

∴ ٣ جا ٢ص − ٢ر = ٢ جا ٢ص × ص'

بالاشتقاق مره اخرى

− ٩ ظا ٢ر = − ٤ ظا ٢ص × ص' ×

+ ٢ جا ٢ص × ص''

بالقسمه على ظا ٢ر

∴ − ٩ = − ٤ (ظا ٢ص / ظا ٢ر) ص'^٢ +

٢ (جا ٢ص / ظا ٢ر) × ص''

∴ ظا ٢ر = جا ٢ص

∴ − ٩ = − ٤ ص'^٢ + ٢ ظتا ٢ص × ص''

∴ ٢ ظتا ٢ص × ص'' − ٤ ص'^٢ + ٩ = صفر

وهو المطلوب

سبحان الله والحمد لله
سبحان الله العظيم

٧

اذا كان ص = √(٢ر + ٥)
فاثبت ان
(٢ر + ٥) ص''' + ٣ ص'' = صفر

الحل

بتربيع الطرفين

ص^٢ = ٢ر + ٥

بالاشتقاق

∴ ٢ ص ص' = ٢

∴ ص' = ١ / ص

∴ ص'' = − ١ / ص^٣

∴ ص''' = ٢ / ص^٥

∴ الطرف الايسر = ٢ ص^٢ × ٢ / ص^٥ + (٢ر + ٥) × ١ / ص^٣ × ٢

= ٤ / ص^٣ − ٢ / ص^٣

= صفر = الايمن

(٨) إذا كانت $ص = ع^٥ + ع^٢$ ، $س = \frac{ع+١}{ع-١}$ أوجد $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$ عند $ع = ٢$

الحل

$$\frac{د ص}{د ع} = ٥ع^٤ + ٢ع \Leftarrow \frac{د س}{د ع} = \frac{(ع-١)١ - (ع+١)١}{(ع-١)^٢} = \frac{-٢}{(ع-١)^٢}$$

$$\therefore \frac{د ع}{د س} = \frac{(ع-١)^٢}{-٢}$$

$$\boxed{\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = (٥ع^٤ + ٢ع) \times \frac{(ع-١)^٢}{-٢}$$

$$\therefore \frac{د^٢ص}{د س^٢} = -\frac{١}{٢}(٥ع^٤ + ٢ع)(٢ع - ٢ع^٣ + ١)$$

$$\therefore \frac{د^٢ص}{د س^٢} = -\frac{١}{٢}\left[(٢٠ع^٣ + ٤ع)(ع^٢ - ٢ع + ١) + (ع - ٢ع^٣)(٥ع^٤ + ٢ع^٢)\right] \times \frac{د ع}{د س} \times \frac{(ع-١)^٢}{-٢}$$

$$= -\frac{١}{٢}\left[(-٢ع^٣ + ٤ع)(ع-١)^٢ + (ع - ٢ع^٣)(٥ع^٤ + ٢ع^٢)\right] \times \frac{(ع-١)^٢}{-٢}$$

عند $ع = ٢$

$$\therefore \frac{د^٢ص}{د س^٢} = -\frac{١}{٤}\left[١٢ \times ١ + ٢ \times ٩٢\right] \times ١ = \boxed{٨٩}$$

---

(٩) المعادلتان البارامتريتان لمنحنى هما $س = ٢ن^٢ - ٦ن$ ، $ص = ٨\sqrt{ن - ٢}$ أوجد معادله المماس للمنحنى عند $ن = ٦$

الحل

$$\frac{د س}{د ن} = ٤ن - ٦ \quad ، \quad \frac{د ص}{د ن} = \frac{٨}{٢\sqrt{ن-٢}}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{٤}{٤ن - ٦} \div \frac{٨}{٢\sqrt{ن-٢}}$$

عند $ن = ٦$ ، $م = \frac{٤}{٦} \div \frac{٨}{٤} = \boxed{\frac{١}{٣}}$

عند $ن = ٦$ ، $س = ٢(٦)^٢ - ٦(٦) = ١٢$ ، $ص = ٠$

$\therefore$ معادله $ص$ $(ص - ١٢) = \frac{١}{٣} \times س \Leftarrow \boxed{٣ص - س = ٣٦}$

(١٠) اثبت ان معادله المماس لمنحنى $ص = \frac{١}{س}$ عند اى نقطه عليه والمحصور بينه $= ٢$ وحدة مربعة

الحل

نفرض ان النقطه $(أ، \frac{١}{أ})$

$ص' = \frac{-١}{س^٢}$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{-١}{أ^٢}$

$\therefore$ معادله المماس عند النقطه $(أ، \frac{١}{أ})$

$\frac{ص - \frac{١}{أ}}{س - أ} = \frac{-١}{أ^٢}$

ومنها $\boxed{س + أ^٢ ص = ٢أ}$

نوجد نقط تقاطع المماس مع المحورين

* عند $ص = ٠$

$\therefore \boxed{س = ٢أ}$

$\therefore (٠، ٢أ)$ هى $ص$

* عند $س = ٠$

$\therefore \boxed{ص = \frac{٢}{أ}}$

$\therefore (٠، \frac{٢}{أ})$ هى $ع$

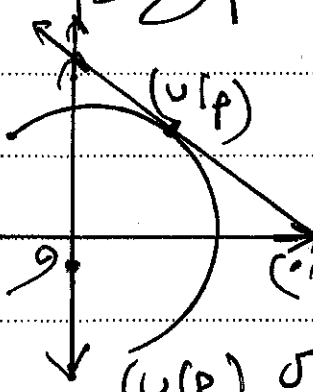
$\therefore$ مساحة Δ و ص ع

$= \frac{١}{٢} \times ٢أ \times \frac{٢}{أ}$

$= ٢$ وحدة مربعة

(١١) اوجد معادله المماس للمنحنى $س^٢ + ص^٢ = ٥$ الرسوم عند $(١، ٢)$

الحل



معادله دائره مركزها الاصل

نفرض ان نقطه تماس $(أ، ب)$

$\therefore \boxed{أ^٢ + ب^٢ = ٥}$ ①

نوجد ميل المماس $(ص')$

$\therefore ٢س + ٢ص ص' = ص'$

$\Rightarrow \boxed{ص' = \frac{-س}{ص}}$

عند $(أ، ب)$

$\therefore \boxed{\text{ميل} = \frac{-أ}{ب}}$

$\therefore$ معادله المماس هى

$\frac{ص - ٠}{س - ٥} = \frac{-أ}{ب}$

ومنها $\boxed{I \quad أ ص = -أ س + ٥}$

المماس يمر $(أ، ب)$ $\therefore$ تحقق

$\therefore \boxed{أ^٢ + ب^٢ = ٥أ}$ ②

بالتعويض من ① فى ②

$\therefore ٥ = ٥أ \leftarrow \boxed{أ = ١}$

بالتعويض فى ① $\leftarrow \boxed{ب = \pm ٢}$

$\therefore$ نوجد معادلتا بالتعويض فى I

$\therefore \boxed{٢ص + س = ٥}$ ، $\boxed{٢ص - س = ٥}$

(١٢) أوجد معدل تغير $\sqrt{٩+س^٢}$ بالنسبة لـ $\frac{س}{س-١}$ عندما $س=-٤$

الحل

نفرض أن $ص=\sqrt{٩+س^٢}$

$ع=\frac{س}{س-١}$ ، المطلوب $\frac{د ص}{د ع}$

$\therefore \frac{د ص}{د س}=\frac{٢س}{٢\sqrt{٩+س^٢}}$

$\frac{د ع}{د س}=\frac{(س-١)-س}{(س-١)^٢}$

$\therefore \frac{د ع}{د س}=\frac{-١}{(س-١)^٢}$

$\therefore \frac{د ص}{د ع}=\frac{د ص}{د س}\div\frac{د ع}{د س}$

$=\frac{س}{\sqrt{٩+س^٢}}\times\frac{(س-١)^٢}{-١}$

عندما $س=-٤$

$\therefore \frac{د ص}{د ع}=\frac{-٤}{١٢}\times\frac{٢٥}{-١}$

$\therefore \frac{د ص}{د ع}=\frac{١٠٠}{١٢}$

لقوانين

إذا كانت $ص=٤+ظتا س-قتا س$

أوجد معادلة المماس عند $س=\frac{\pi}{٤}$

(١٢) أوجد نهايات الآتية

(١) $\lim_{س\to\infty}\left(\frac{س+٧}{س+٢}\right)^{س+٢}$

(٢) $\lim_{س\to٠}\frac{\ln(١+٢س)}{س}$

(٣) $\lim_{س\to٠}(١+٢ظا س)^{ظتا س}$

(٤) $\lim_{س\to٠}\frac{٩^{س}-١}{س}$

الحل

(١) $\lim_{س\to\infty}\left(\frac{٤+٢+س}{٢+س}\right)^{٢+س}$

$=\lim_{س\to\infty}\left(١+\frac{٤}{٢+س}\right)^{٢+س}$

نوضح $ص=٢+س$ ، $ص\to\infty$ عندما $س\to\infty$

$=\lim_{ص\to\infty}\left(١+\frac{٤}{ص}\right)^{ص}$

نوضح $ع=\frac{٤}{ص}$ ، $ع\to٠$ عندما $ص\to\infty$

$=\lim_{ع\to٠}(١+ع)^{\frac{٤}{ع}}$

$=\lim_{ع\to٠}\left[(١+ع)^{\frac{١}{ع}}\right]^{٤}$

$=هـ^{٤}$

(٢) $\lim_{س\to٠}\frac{\ln(١+٢س)}{٣س}$

$=\frac{٢}{٣}\lim_{س\to٠}\frac{\ln(١+٢س)}{٢س}$

$=\frac{٢}{٣}\times١=\frac{٢}{٣}$

(٢) $\lim_{س \to 0} (1 + 2 ظا^2 س)^{\frac{3}{ظا^2 س}}$

بوضع $2 ظا^2 س = ص$

$= \lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{3}{ص}}$

$= هـ^3$ لأن $ص \to 0$ عندما $س \to 0$

(٤) $\lim_{س \to 0} \frac{2^{3س} - 1}{2س}$

$= 2 لو_هـ 2$

(١٤) أوجد $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س - 1}{2س + 1}\right)^{2س}$

الحل

$= \lim_{س \to \infty} \left(\frac{2س + 1 - 2}{2س + 1}\right)^{2س}$

$= \lim_{س \to \infty} \left(1 - \frac{2}{2س + 1}\right)^{2س}$

بوضع $\frac{-2}{2س + 1} = ص$

$\therefore 2س + 1 = -2$

$\therefore 2س = ص - 2$

$\therefore س = \frac{ص - 2}{ص} = 1 - \frac{2}{ص}$

$\therefore \lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{1 - \frac{2}{ص}}$

$= \lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{2}{ص}} \times (1 + ص)^{-1}$

$= هـ^2 \times 1 = \boxed{هـ^2}$

(١٥) أوجد $ص$ كدالة ضمنية

(أ) $ع = لو_هـ (س^2 + 1)$

(ب) $ع = لو_هـ ظا (2س - 1)$

الحل

$\frac{دع}{دس} = \frac{2س}{س^2 + 1} \cdot دس$

(ب) $\frac{دع}{دس} = \frac{-2 قتا^2 (2س - 1)}{ظا (2س - 1)}$

$دع = \frac{-2 قتا^2 (2س - 1)}{ظا (2س - 1)} \cdot دس$

(١٦) إذا كان $هـ^{س ص} - س^2 + ص^2 = 0$

أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند $س = 0$

الحل

$هـ^{س ص} \times (ص + س \frac{دص}{دس}) - 2س + 2ص \frac{دص}{دس} = 0$

عند $س = 0$

$\therefore 1 (0 + ص) + 2ص \frac{دص}{دس} = 0$

$\therefore ص + 2ص \frac{دص}{دس} = 0$

$\boxed{\frac{دص}{دس} = -\frac{1}{2}}$

(١٧) $س\ ص\ هـ^{ص} + ص\ هـ^{ص} = ١$

اوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

بالمفاضلة بالنسبة لـ س

$ص\ هـ^{ص} + ص' ص\ هـ^{ص} - س\ ص'\ هـ^{ص} + ص' هـ^{ص} = ٠$

$ص' (ص\ هـ^{ص} - س\ هـ^{ص} + هـ^{ص}) = ص\ هـ^{ص} - ص\ هـ^{ص}$

$ص' = \frac{ص\ هـ^{ص} - ص\ هـ^{ص}}{ص\ هـ^{ص} - س\ هـ^{ص} + هـ^{ص}}$

(١٨) اوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما

$ص = س^{٢}\ لو_{هـ} س$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = ٢ س\ لو_{هـ} س + \frac{١}{س} \times س^{٢}$

$= ٢ س\ لو_{هـ} س + س$

$= س (٢\ لو_{هـ} س + ١)$

(١٩) اذا كانت $ص = ٣\ هـ^{س^{٢}-١}$

فاثبت ان

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٤ س ص (٢ + ٢ س^{٢})$

الحل

$ص' = ٢ س\ ٣\ هـ^{س^{٢}-١}$

$ص'' = ٢ \times ٣\ هـ^{س^{٢}-١} + ٤ س^{٢}\ ٣\ هـ^{س^{٢}-١}$

$= ٦\ هـ^{س^{٢}-١} (١ + ٢ س^{٢})$

$ص''' = ٤ س\ ٦\ هـ^{س^{٢}-١} (١ + ٢ س^{٢}) + ٤ \times ٢ س\ ٦\ هـ^{س^{٢}-١}$

$= ٢٤\ هـ^{س^{٢}-١} (٢ + ٤ س^{٢} + ١)$

$= ٢٤\ هـ^{س^{٢}-١} (٣ + ٤ س^{٢})$

$= ٤ س\ ص (٢ + ٢ س^{٢})$ وهو المطلوب

(٢٠) اوجد معدل تغير $لو_{هـ} (٩ + س^{٢})$

بالنسبة لـ $ع = س^{٢} + ٣$ عندما

$س = ١$

الحل

$ص = لو_{هـ} (٩ + س^{٢})$

$ع = س^{٢} + ٣$

المطلوب $\frac{د ص}{د ع}$

$\star \frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س}{٩ + س^{٢}}$

$\star \frac{د ع}{د س} = ٢ س$

$\therefore \frac{د ص}{د ع} = \frac{٢ س}{٩ + س^{٢}} \div ٢ س$

$\boxed{\frac{د ص}{د ع} = \frac{١}{٩ + س^{٢}}}$

(٢١) إذا كانت $\frac{d^2ص}{dس^2} - (\frac{dص}{dس})^2 ظا ص = ٤ جا^2 س قا ص$

أثبت أن $ص' جا ص - ٢ جا س = صفر$

الحل

بالاشتقاق

$ص'' جا ص + ص'^2 جا ص - ٤ جا س جتا س = صفر$

بالاشتقاق مرة أخرى

$ص''' جا ص + ص'' جتا ص + ٢ ص'' ص' جا ص - ٤ جا س جتا س = صفر$

بالقسمة على جا ص

$ص''' + ص'' جتا ص + ٢ ص'' ص' - \frac{٤ جا س جتا س}{جا ص} = ٠$

$\Rightarrow ص''' + ص'' ص' (٢ + جتا ص) = ٤ جا س قا ص$

---

(٢٢) إذا كانت $ص = س جا س$ فأثبت أن

$س^2 (ص + ص'') + ٢ ص = ٢ ص'$

---

(٢٣) إذا كانت للدالة $ص = ٢ س^3 + ٢ س^2 + ٤ س + ٥$

مماسة متوازية لأحد محاور الإحداثيات عند النقطة $(-١، أ، ج)$ أوجد معادلة المماس الآخر

الحل

$ص' = ٦ س^2 + ٦ س + ٤$ عند $س = -١$

$\therefore م = ٦ - ٦ + ٤ = ٤$

يوضح الرسم المماس الآخر لمنحنى $ق(ب، ب)$

$\therefore$ ميل $ل_٢$ عند $س = م$ حيث $ل_١ // ل_٢$

$\therefore ٦ م^2 + ٦ م + ٢ = ٤ \Leftarrow ٦ م^2 + ٦ م - ٤ = ٠ \quad \therefore م = ٠$ أو $م = -١$

$\therefore$ عند $م = ٠$ تكون $ب = ٥$ وذلك بالتعويض في معادلة المنحنى

∴ معادله ص
ص − ٥ = ٤(س − ٠)

∴ معادله المماس الآخر
ص − ٤س − ٥ = ٠

(٢٤)
أوجد ∫ (٦ − ٤س) / (٣ − ٢س) ds

الحل

بالقسمه
= ∫ (٣س^٢ − ٤س^١ − ٢س^٢) ds
= −٢س^١ − ٤س^٢ − ٢س^٣ + ث

(٢٥)
∫_١^٤ (س − ١) / (√(٨س − ١) − ١) ds

الحل

بالضرب × المرافق
= ∫_١^٤ (س − ١)/(√(٨س − ١) − ١) × (√(٨س − ١) + ١) ds
= ∫_١^٤ (س − ١)(√(٨س − ١) + ١) / (س − ١) ds
= ∫_١^٤ (√(٨س − ١) + ١) ds
= [(٨س − ١)^(٣/٢) / ١٢ + س]_١^٤
= (٩ + ٤ − ٢ − ١/١٢) = ٧٥/١٢

سبحان الله وبحمده

(٢٦)
∫ س (س − ٥)^٧ ds

الحل

∫ (س − ٥ + ٥) (س − ٥)^٧ ds
= ∫ (س − ٥)^٨ + ٥ ∫ (س − ٥)^٧ ds
= ١/٩ (س − ٥)^٩ + ٥/٨ (س − ٥)^٨ + ث

(٢٧)
∫ ds / (٢(√(٨س) + ١)^٢ √(٨س))

الحل

∫ ١/(٢√(٨س)) (√(٨س) + ١)^(−٢) ds
(المشتقة × المشتقة)
= ١/٨ (√(٨س) + ١)^(−١) / (−١) + ث
= −١/٨ (√(٨س) + ١)^(−١) + ث

(٢٨)
∫ س جا(س^٢ + ٢) ds

الحل

= ١/٢ ∫ ٢س جا(س^٢ + ٢) ds
= ١/٢ (−جتا(س^٢ + ٢)) + ث

تصويب ١١) ∫ (٨س + ٢) / (√(٤س^٢ + ٢س)) ds

٢) ∫ س هـ^(س^٢ + ٢) ds

(٢٩) $\int \text{قا}^4 س \text{ ظا} س \, د س$

الحل

$\int \text{قا}^2 س \, \text{قا} س \, \text{ظا} س \, د س$

$= \frac{1}{4} (\text{قا} س)^4 + د$

(٣٠) $\int \frac{\text{ظا}^2 س + س}{\text{ظا}^2 س + س^2} \, د س$

الحل

$\frac{1}{2} \int \frac{2 \text{ظا}^2 س + 2س}{\text{ظا}^2 س + س^2} \, د س$

البسط مشتقة المقام

$= \frac{1}{2} \text{لو} |\text{ظا}^2 س + س^2| + د$

(٣١) $\int \text{ظا}^2 (2س + 1) \, د س$

الحل

$= \int \frac{-2 \text{ظا} (2س+1)}{\text{قا}^2 (2س+1)} \, د س$

$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \text{ظا} (2س+1)}{\text{قا}^2 (2س+1)} \, د س$

$= -\frac{1}{2} \text{لو} |\text{قا} (2س+1)| + د$

(٣٢) $\int (1 - س^2)(2س - س^2)^5 \, د س$

الحل

$\frac{1}{2} \int (2 - 2س^2)(2س - س^2)^5 \, د س$

$= \frac{1}{6} (2س - س^2)^6 + د$

(٣٣) $\int س^2 \text{ظا}^2 س \, د س$

الحل

بالبدء بـ $س^2$

$س^2$ تفاضل ← $2س$

$\text{ظا}^2 س \, د س$ تكامل ← $-\text{ظتا} س$

$\therefore$ التكامل $= -س^2 \text{ظتا} س + \int 2س \text{ظتا} س \, د س$ ... I

بتكامل $\int 2س \text{ظتا} س \, د س$ بالبدء بـ $س$

$2س$ تفاضل ← $2 د س$

$\text{ظتا} س \, د س$ تكامل ← $-\text{لو} |\text{قا} س|$

$= -2س \text{لو} |\text{قا} س| + \int 2 \text{لو} |\text{قا} س| \, د س$

$= -2س \text{لو} |\text{قا} س| - 2 \text{لو} |\text{جتا} س| + د$

بالتعويض في I

$\therefore$ التكامل $= -س^2 \text{ظتا} س - 2س \text{لو} |\text{قا} س| - 2 \text{لو} |\text{جتا} س| + د$

(٣٤) $\int س \text{ظا}^2 س \, د س$

لتعويم للطالب

(٢٥) $\int س^2 \sqrt{2س+1}\, د س$

الحل

بالتعويض

نفرض أن $ع = 2س+1$

$\Leftarrow ٢ع\, د ع = ٢\, د س$

$2س = ع^2 - 1$

$س = \frac{ع^2-1}{٣}$ بالتعويض

$\therefore \int \left(\frac{ع^2-1}{٢}\right)^2 \times ع \times \frac{٢ع}{٣}\, د ع$

$= \int \frac{ع^4 - ٢ع^2 + 1}{٩} \times \frac{٢ع}{٣}\, د ع$

$= \int \frac{٢ع^5 - ٤ع^3 + ٢ع}{٢٧}\, د ع$

$= \frac{٢}{٢٧}\left[\frac{ع^6}{٦} - \frac{٤ع^4}{٤} + \frac{٢ع^2}{٢}\right] + ث$

بالتعويض عن قيمة ع

$= \frac{١}{٥٤}\left[\frac{(2س+1)^3}{٣} - (2س+1)^2\right] + ث$

(٢٦) $\int \frac{\sqrt{1+2س}}{س}\, د س$

بوضع $ع = \sqrt{1+2س}$

$\therefore ع^2 = 1+2س$

$\therefore 2س = ع^2 - 1$ ⟵ (١)

$س = \frac{1}{2}(ع^2-1)$

$\therefore ٢\, د س = ٢ع\, د ع$

$\therefore د س = ع\, د ع$

$= \int \frac{ع}{\frac{1}{2}(ع^2-1)} \times ع\, د ع$

$= \int \frac{٢ع^2}{ع^2-1}\, د ع$

$= \int \left(٢ + \frac{٢}{ع^2-1}\right) د ع$

$= ٢ع + \int \frac{٢}{(ع-1)(ع+1)}\, د ع$

$= ٢ع + \int \left(\frac{1}{ع-1} - \frac{1}{ع+1}\right) د ع$

$= ٢ع + \ln|ع-1| - \ln|ع+1| + ث$

$= ٢\sqrt{1+2س} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+2س}-1}{\sqrt{1+2س}+1}\right| + ث$

(٢٧) $\int ظتا^2 س\, قتا^2 س\, د س$

الحل

$= -\int (قتاس)^2 قتاس ظتاس\, د س$

(الدالة × مشتقها)

$= -\frac{1}{2}(قتاس)^2 + ث$

(٢٨) $\int س\, ظا س\, د س$

الحل

بالتكامل بالأجزاء

س ← ص ← ع
تفاضل ↓ تكامل ↓
ا س د س ← ط س د س

= − س ط س + ∫ ا ط س د س

= − س ط س + ط س + ث

(٣٩) ∫ ظتا² (س/٣ + ٥) د س

الحل

= −٣ ظتا (س/٣ + ٥) + ث

(٤٠) ∫ ٤ س هـ^(س²) د س

محلول للطالب بنفسه

(٤١) ∫ س³ (٥ − س)² د س

الحل

= ∫ (س − ٥ + ٥) (س − ٥)² د س

= ∫ (س − ٥)⁴ + ٥ ∫ (س − ٥)² د س

= ١/٥ (س − ٥)⁵ + ٥/٤ (س − ٥)⁴ + ث

(٤٢) ∫ س² (٢ − ٣ س)⁴ د س

الحل

= ∫ س² (٨١ − ١٠٨ س + ٥٤ س² − ١٢ س³ + س⁴) د س

= ٨١ ∫ س² د س − ١٠٨ ∫ س³ د س + ٥٤ ∫ س⁴ د س − ١٢ ∫ س⁵ د س + ∫ س⁶ د س

= ٢٧ س³ − ٢٧ س⁴ + ٩/٥ س⁵ − ٢ س⁶ + ١/٧ س⁷ + ث

(٤٣) ∫ ٢ س² (٣ س + ٢)⁴ د س

الحل

= ∫ (٣ س + ٢ − ٢) (٣ س + ٢)⁴ د س

= ∫ (٣ س + ٢)⁵ − ٢ ∫ (٣ س + ٢)⁴ د س

= [١/١٨ (٣ س + ٢)⁶ − ٢/١٥ (٣ س + ٢)⁵] + ث

(٤٤) ∫ ٢ س √(٤ − س²) د س

الحل

= −∫ (٤ − س²)^(١/٢) (−٢ س) د س

= −٢/٣ (٤ − س²)^(٣/٢) + ث

(٤٥) ∫ س² هـ^(س³) د س

الحل

= ١/٣ ∫ هـ^(س³) د (س³)

= ١/٣ هـ^(س³) + ث

(٤٦) ∫ ٢ س² (٢ − ٣ س)⁴ د س

الحل

= ∫ (٢ − ٣ س)⁴ د (س³)

= ١/٣ ∫ (٢ − ٣ س)⁴ د (٢ − ٣ س)

= ١/١٥ (٢ − ٣ س)⁵ + ث

(٤٧) ∫ س √(٤ − س²) د س

الحل

= −١/٢ ∫ (٤ − س²)^(١/٢) (−٢ س) د س

= −١/٣ (٤ − س²)^(٣/٢) + ث

(٤٨) ∫ س هـ^(س²) د س

الحل

= ١/٢ ∫ هـ^(س²) (٢ س) د س

= ١/٢ هـ^(س²) + ث

(٤٩) ∫ س² ل س د س

الحل

= ١/٣ س³ ل س − ١/٣ ∫ س³ (١/س) د س

= ١/٣ س³ ل س − ١/٣ ∫ س² د س

= ١/٣ س³ ل س − ١/٩ س³ + ث

(٥٠) ∫ س³ ل س د س

الحل

= ١/٤ س⁴ ل س − ١/٤ ∫ س⁴ (١/س) د س

= ١/٤ س⁴ ل س − ١/٤ ∫ س³ د س

= ١/٤ س⁴ ل س − ١/١٦ س⁴ + ث

(٥١) ∫ س ل س د س

الحل

= ١/٢ س² ل س − ١/٢ ∫ س² (١/س) د س

= ١/٢ س² ل س − ١/٢ ∫ س د س

= ١/٢ س² ل س − ١/٤ س² + ث

(٥٢) ∫ ل س د س

الحل

= س ل س − ∫ س (١/س) د س

= س ل س − ∫ د س

= س ل س − س + ث

(٤٥) أوجد قيم الثوابت
أ، ب، جـ، د إذا كان
المنحنى ص = س³ + أ س² + ب س + جـ
والمنحنى ص = د س − س²
متماسان عند النقطة
عندما (١، ب)

الحل

(١، ب) نقطة تماس

* ٠ = ١ + أ + ب + جـ

① ← أ + ب + جـ = −١

* ٠ = ٣ − د

③ ← د = ٣

* م١ ← ص' = ٣س² + ٢أ س + ب

عند س = ١

∴ م١ = ٣ + ٢أ + ب

* م٢ ← ص' = د − ٢س

عند س = ١

∴ م٢ = د − ٢ = ١ − ٢ = −١

بما أن المنحنيان متماسان

∴ م١ × م٢ = −١

أي أن ٣ + ٢أ + ب = ١

← أ + ب = −٣

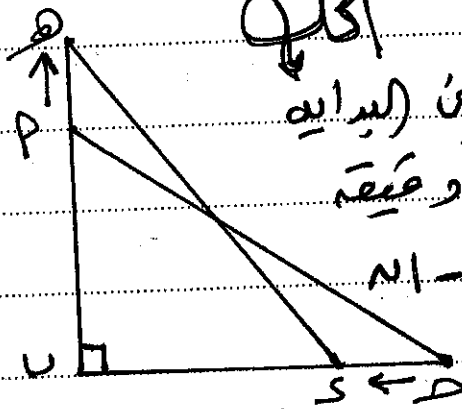
بالتعويض في ①

← −٣ + جـ = −١

← جـ = ٢

(٤٦) Δ قائم الزاوية طول إحدى
ضلعي القائمة ٦ سم، طول الضلع الآخر
يتزايد بمعدل ½ سم/ث
والثاني يتناقص بمعدل ١ سم/ث
أوجد
① معدل تزايد مساحة Δ بعد ٢ ث
② الزمن الذي بعده تتوقف الزيادة

الحل



Δ ب ص ع البداية
بعد ن ث
ع ص = ٢٠ − ن
ب ع = ٦ + ½ ن

∴ Δ ع ص ب هو Δ المتغير
مساحته = ½ (٢٠ − ن)(٦ + ½ ن)
م = ½ (١٢٠ − ٤ن + ٣ن − ½ ن²)
دم/دن = ½ (٤ − ن)

بعد ٣ ث فقط
∴ دم/دن = ½ (٤ − ٣) = ½ سم²/ث

للحرج ← دم/دن = ٠ ، "تنعدم"
← ٤ − ½ ن = ٠
← ن = ٨ ث فقط
← ثانيا

(٤٧) صفيحه مستطيله السطل طولها يساوى $\frac{4}{3}$ قطرها يتمدد طوليا بمعدل ١٠سم/ث وتتمدد عرضيا من نفس اللحظه بمعدل ٢٠سم/ث اوجد معدل تزايد المساحه من هذه اللحظه

الحل

نفرض ان الطول س

فيكون القطر هو $\frac{5}{4}$ س

ومنها فيثاغورث

$$\text{العرض} = \sqrt{(\frac{5}{4}س)^2 - س^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{25}{16} - 1)س^2}$$

$$= \frac{3}{4}س$$

$$\therefore \text{المساحه} = س \times \frac{3}{4}س$$

$$\therefore م = \frac{3}{4}س^2$$

$$\therefore \frac{دم}{دن} = \frac{3}{2}س \times \frac{دس}{دن}$$

$$= \frac{3}{2} \times 10- \times 20-$$

$$= 300$$

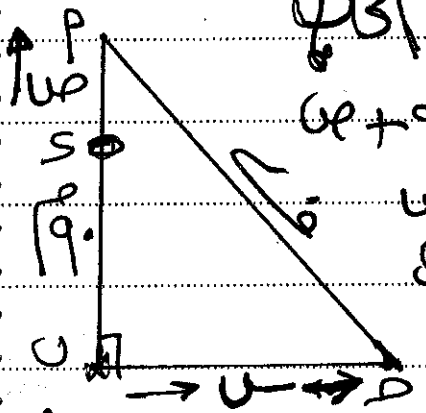
$$\Leftarrow س = 2$$

$$\therefore \text{العرض} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{المساحه} = \frac{3}{2} \times 2 = 3 سم^2$$

(٤٨) بدأ يرتفع بالونه أفقيا لأعلى بسرعه ثابته ١٥م/ث وعندما كانت البالونه على ارتفاع ٩٠م من سطح سياره تسير بسرعه ٢٥م/ث اوجد معدل تزايد المسافه بين السياره والبالونه بعد ٢ث من مرور السياره

الحل



$$ص = ع + ٩٠$$

$$ن = س$$

بعد ٢ث

$$ص = ١٥ \times ٢$$

$$ص = ٣٠ سم$$

$$\Leftarrow ع = ١٢٠ سم$$

$$س = ٢٥ \times ٢ = ٥٠ سم$$

ومنها فيثاغورث

$$ف^2 = س^2 + (ع + ٩٠)^2$$

بالاشتقاق بالنسبه للزمن

$$2ف \frac{دف}{دن} = 2س \times \frac{دس}{دن} + 2(ع + ٩٠) \times 1 \times \frac{دع}{دن}$$

$$\therefore 2 \times ١٣٠ \times \frac{دف}{دن} = 2 \times ٥٠ \times ٢٥ + 2 \times ١٢٠ \times ١٥$$

$$\therefore ٢٦٠ \frac{دف}{دن} = ٢٧٠٠$$

$$\therefore \frac{دف}{دن} = \frac{٦}{١٢} ٢٠ سم/ث$$

ألعم العاليه تحتاج إلى همم عاليه

(٤٩) إذا كانه معدل تغير المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند اى نقطه عليه (-٦س + ١٢) وكانه ميل المماس للمنحنى عند (١، ١) يساوى -٢

اوجد معادله المنحنى

الحل

معدل التغير = $\frac{د ص}{د س}$ = -٢

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ = -٦س + ١٢ بالتكامل

∴ $\frac{د ص}{د س}$ = -٣س^٢ + ١٢س + ج

عند (١، ١) ← ج = -٣

∴ -٢ = -٣ + ١٢ + ج

← ج = -١٢

∴ ص = -س^٣ + ٦س^٢ - ١٢س + ك

بالتكامل مره اخرى

ص = -$\frac{١}{٤}$س^٤ + ٢س^٣ - ٦س^٢ + ك

(١، ١) تحقق المعادله

١ = -$\frac{١}{٤}$ + ٢ - ٦ + ك

← ك = ٨

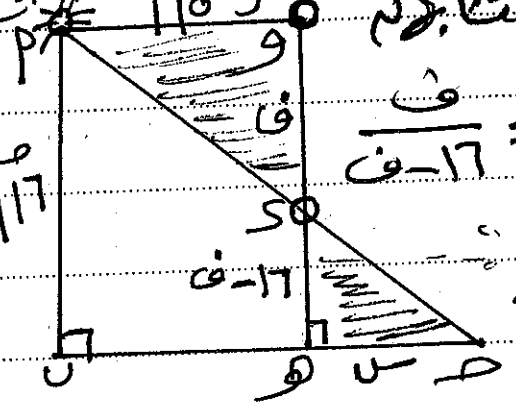
∴ معادله المنحنى

ص = -$\frac{١}{٤}$س^٤ + ٢س^٣ - ٦س^٢ + ٨

بسم الله الرحمن الرحيم نضع اسم

(٥٠) مصباح موضوع مثبت فى قمة برج ارتفاعه ١٦م فإذا سقطت كره من نفس الارتفاع مسافه مقدارها ١٥م من المصباح اوجد سرعه تحرك ظل الكره على الارض عندما تكون الكره على ارتفاع ٦م عن سطح الارض

الحل



Δ ح ل P ~ Δ ك هـ P

$\frac{ف}{١٥}$ = $\frac{١٦-ف}{س}$

∴ س = $\frac{١٥(١٦-ف)}{ف}$ = ١٥ - $\frac{٢٤٠}{ف}$

$\frac{د س}{د ن}$ = $\frac{٢٤٠}{ف^٢}$ × $\frac{د ف}{د ن}$

الكره

∴ ع^٢ = ع^٢ + ٢ د ص

= ٠ + ٢ × ٩٫٨ × ١٠ = ١٩٦

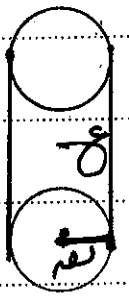
∴ ع = ١٤ م/ث

∴ $\frac{د ف}{د ن}$ = ١٤ عندما ف = ١٢

$\frac{د س}{د ن}$ = $\frac{٢٤٠}{١٤٤}$ × ١٤

∴ $\frac{د س}{د ن}$ = -٢٣٫٦ م/ث

(١٥) صب الماء في خزان على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٥٠ سم بمعدل ٨ لتر/دقيقة أوجد معدل ارتفاع سطح الماء في أي لحظة.



الحل

معدل تغير الحجم
= ٨ لتر/دقيقة
= ٨٠٠٠ سم٣/دقيقة

حجم الماء = π نق^2 ع

$ح = \pi \times ٥٠٠ \times ع$

$\frac{دح}{دن} = \pi \times ٥٠٠ \times \frac{دع}{دن}$

$٨٠٠٠ = \pi \times ٥٠٠ \times \frac{دع}{دن}$

$\frac{دع}{دن} = \frac{١٦}{٥\pi}$ سم/دقيقة

(٥٢) أثناء خروج سائل من صنبور سرعة نقطه فإذا كان حجم الماء في الوعاء يتغير بمعدل $(٤ن - ٠٫٤ن^2)$ سم٣/ث وكان حجم السائل بعد ٢٠ ث من بدء الصنبور = ٩٨٠ سم٣ أوجد سعة الإناء علما بأن ن بالدقائق

يصبح الإناء فارغا

الحل

$\frac{دح}{دن} = ٤ن - ٠٫٤ن^2$

$ح = ٢ن^2 - \frac{٠٫٤}{٣}ن^3 + ث$

بعد ٢٠ ث $ح = ٩٨٠$

$٩٨٠ = ٢(٢٠)^2 - \frac{٠٫٤}{٣}(٢٠)^3 + ث$

$ث = ٥٠٠٠$

$ح = ٢ن^2 - \frac{٠٫٤}{٣}ن^3 + ٥٠٠٠$

* لإيجاد السعة نضع ن = ∞

$ح = ٥٠٠٠$ سم٣

* يصبح فارغا عندما ح = ٠

$٠ = ٢ن^2 - \frac{٠٫٤}{٣}ن^3 + ٥٠٠٠$

$٠ = (ن - ١٠٠)(ن - ١٠٠)$

$ن = ١٠٠$ ث

ألفاظ سلوبهم أنانيين لم يعرفوا كم كانوا حريصين من ليخلع صيغا توقفوا

تابع الأسئلة المتنوعة

(١) حدد فترات التزايد والتناقص للدالة $د(س) = س + ٢ جا س$ حيث $٠ < س < ٢\pi$ وأيضا النقط العظمى والصغرى إن وجدت

الحل

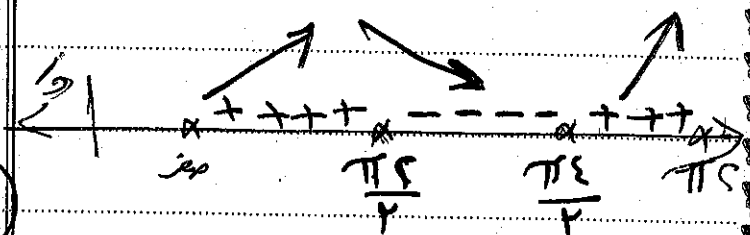
$د'(س) = ١ + ٢ جتا س$

$د' = صفر$

$\Leftarrow$ جتا $س = -\frac{١}{٢}$

(ثاني) (ثالث)

$س = ١٢٠°$ ، $٢٤٠°$



★ الدالة تناقصية في $]\frac{٢\pi}{٣}, \frac{٤\pi}{٣}[$

★ " تزايدية في $]٠, \frac{٢\pi}{٣}[$

★ " تزايدية في $]\frac{٤\pi}{٣}, ٢\pi[$

★ عند $س = \frac{٢\pi}{٣}$ عظمى

$ص = \sqrt{٣} + \frac{٢\pi}{٣}$

★ عند $س = \frac{٤\pi}{٣}$ عند صغرى

$ص = -\sqrt{٣} + \frac{٤\pi}{٣}$

(٢) إذا كان $\int_{١}^{٣} [د(س)]^{٢} د'(س)\, د س = ٠$ ، $د(١) = ٠$ ، $د(٠) = ٢$

أوجد $\int_{٠}^{١} د(س)\, د س$

الحل

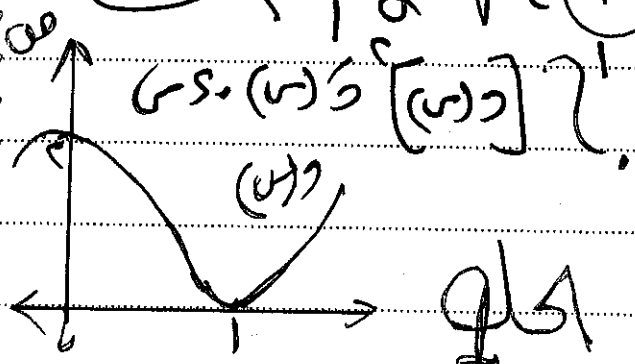
$\frac{١}{٣}[د(س)]^{٣}_{١}$

$\frac{١}{٣}[د(٣)]^{٣} - \frac{١}{٣}[د(١)]^{٣} = ٠$

$\frac{١}{٣}[د(٣)]^{٣} - ٠ = ٠$

$[د(٣)]^{٣} = ٠$

$د(٣) = ٠$



بالتقابل

$\int_{٠}^{١} د(س)\, د س = (١) \frac{١}{٣} - (٠) \frac{١}{٣}$

$= \frac{١}{٣}$

(٣) أوجد القيم العظمى المطلقة للدالة د في $[-١, ١]$ حيث

$د(س) = ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥$

الحل

$د'(س) = ٦ س^{٢} + ١٢ س$

$د' = ٠$

$\Leftarrow$ $س = ٠$ أو $س = -٢$

(٣) $س = -٢ \neq$ للمال

$د(٠) = ٥$

$د(-١) = ٩$

$د(١) = ١٢$

∴ القيمة العظمى المطلقة $= ١٢$

، القيمة الصغرى $= ٥$

(٤) عين النقط الحرجة لكل من

$د : ح \to ح$

$د(س) = |س - ٢| + ٥$

واجب نوع كل منها

الحل

$$د(س) = \begin{cases} س(س-٢)+٥ & س \geq ٢ \\ -س(س-٢)+٥ & س < ٢ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} س^٢ - ٢س + ٥ & س \geq ٢ \\ -س^٢ + ٢س + ٥ & س < ٢ \end{cases}$$

$د'(٢)^+ = \lim_{ه \to ٠^+} \frac{د(٢+ه) - د(٢)}{ه}$

، $د'(٢)^+ = ٢$ ، $د'(٢)^- = -٢$

∴ النقطة (٢، ٥) نقطة حرجة

$د'(س) = ٢س - ٢$ ، $س \geq ٢$

$د'(س) = -٢س + ٢$ ، $س < ٢$

$د'(س) = ٠ \Leftrightarrow س = ١$ مرفوضة

$د'$ غير معرفة $\Leftrightarrow س = ٢$

$س$	١	٢
$د'$	+	−
$د$	↑	↓

∴ $د(١) = ٦$ قيمة عظمى محلية

$د(٢) = ٥$ قيمة صغرى محلية

(٥) إذا كان للدالة

$د(س) = أ س^٣ + ب س^٢ + ج س + د$

نهاية عظمى محلية عند $(٢، ٤)$

ونقطة انقلاب عند $(١، ٠)$

أوجد معادلة الدالة

الحل

$د = ٣أ س^٢ + ٢ب س + ج$

$د' = ٦أ س + ٢ب$

$(١، ٠)$ انقلاب $\Leftarrow د' = ٠$

$د(٢) = ٤$ ، $د'(٢) = ٠$

$د(١) = ٠$ ، $د'(١) = ٠$

$٨أ + ٤ب + ٢ج + د = ٤$

$٣أ + ٢ب + ج + د = ٠$

$٦أ + ٢ب + ج = ٠$

$٣أ + ب + ج = ٠$

$٦أ + ٢ب + ج = ٠$

$٣أ + ب = ٠$

$٣أ + ٢ب = ٠$

$ب = ٠$ ، $أ = ٠$

$ج = ٠$ ، $د = ٤$

$د(س) = ٤$

عند س = ١ ، د' = ٠

∴ ٣ أ + ب = ٠ ⟵ ب = -٣أ ①

(٢، ٤) عظمى محلية

∴ د' (٢) = ٠

∴ ١٢ أ + ٤ ب + جـ = ٠ ②

∴ ١٢ أ - ١٢ أ + جـ = ٠ ⟵ جـ = ٠

∴ المنحنى يمر (١، ٢)

∴ أ + ب + جـ + د = ٢

⟵ أ - ٣أ + د = ٢

⟵ -٢أ + د = ٢ ③

المنحنى يمر (٢، ٤)

∴ ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + د = ٤

∴ ٨ أ - ١٢ أ + د = ٤

⟵ -٤ أ + د = ٤ ④

بحل ③ ، ④ معاً

⟵ أ = -١ ، د = ٠

⟵ ب = ٣

∴ معادلة المنحنى هي

د(س) = -س^٣ + ٣ س^٢

⑥

د(س) = ٢س^٣ - ٦س^٢ + ٩س - ١

* عين فترات التزايد والتناقص

* أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة في [٠، ٢]

« حلول »

⑦ عين القيم العظمى المطلقة للدالة د :

د(س) = |س| (س - ٤)

في الفترة [-١، ٣]

الحل

د(س) = { س^٢ - ٤س ، ٠ ≤ س < ٢ ; -س^٢ + ٤س - ٦ ، ٢ ≤ س ≤ ٣ }

الدالة متصلة في [-١، ٣]

د'(٠)^+ = lim (هـ → ٠) [د(٠ + هـ) - د(٠)] / هـ

= -٤

د'(٠)^- = -٤

د'(٠)^+ ≠ د'(٠)^-

∴ د'(٠) غير موجودة

د'(س) = { ٢س - ٤ ، ٠ < س < ٢ ; -٢س + ٤ ، ٢ < س < ٣ }

د' = صفر

٢س - ٤ = ٠ ⟵ س = ٢ ∈]٠، ٢[(نحضر)

-٢س + ٤ = ٠ ⟵ س = ٢ ∉]٢، ٣[(نهمل)

* د(-١) = -٥ صغرى مطلقة

* د(٢) = -٤

* د(٣) = -٣

* د(٠) = ٠ عظمى مطلقة

(٨) جد معادلة المماس والعمودي عند النقطة التي فيها $س = ٢$ وجد نقط الانقلاب والقيم العظمى والصغرى المحلية للدالة

$ص = د(س) = س^٤ - ٦س^٢ + ٩$

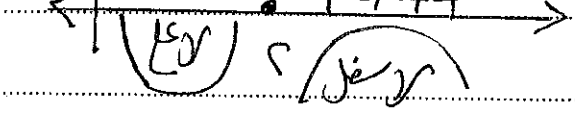
الحل

$ص' = ٤س^٣ - ١٢س$

$ص'' = ١٢س^٢ - ١٢$

$ص'' = صفر$

$\Leftarrow س = \pm ٢$



* $د$ مقعر لأعلى $]-\infty, -٢[\cup]٢, \infty[$
* $د$ مقعر لأسفل $]-٢, ٢[$
* $س = ٢$ انقلاب

عند $س = ٢$

$ص = ١٦ - ٣٢ + ٩ = -٧$

$\therefore (٢, -٧)$ نقطة انقلاب

(٩) إذا كان ميل المماس لمنحنى دالة هو $\frac{ص}{س} = ٢س^٣ - ٨س + ١٥$

أوجد معادلة المنحنى علماً بأن ١٧ هي القيمة العظمى المحلية له ثم أوجد القيمة الصغرى له

$ص = \int (٢س^٣ - ٨س + ١٥) د س$

$\therefore ص = \frac{١}{٢}س^٤ - ٤س^٢ + ١٥س + ج$

* $د$ = صفر

$٢س^٣ - ١٨س + ١٥ = ٠$

$س = ٥ ، ٣ = ١$

صغرى عظمى

$\therefore (١, ١٧)$ عظمى محلية

بالتعويض في المنحنى

$١٧ = \frac{١}{٢} - ٤ + ١٥ + ج$

$\Leftarrow ج = ١٠$

∴ المعادلة هي

$ص = \frac{١}{٢}س^٤ - ٤س^٢ + ١٥س + ١٠$

لإيجاد القيمة الصغرى

بالتعويض في $س = ٥$

$\therefore ص = -١٥$ (صغرى)

(١٠) إذا كان $د''(س) = ٦س - ٤$

وكان المنحنى يمر بـ $(١, -٥)$

وله قيمة صغرى محلية عند $س = ٣$ أوجد معادلة المنحنى والقيمة العظمى له

(١١) ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة الذى يحقق

د(١) = د(٥) = ٠ ، د(٢) = -٢

د'(س) > ٠ لكل س ≠ ٢

د'(س) > ٠ لكل س > ٢

د'(س) < ٠ لكل س < ٢

الحل

* المنحنى يمر بالنقاط

(١ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (٢ ، -٢)

* د'(س) > ٠ لكل س ≠ ٢

∴ المنحنى محدب لأعلى فى

]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

* د'(س) < ٠ لكل س > ٢

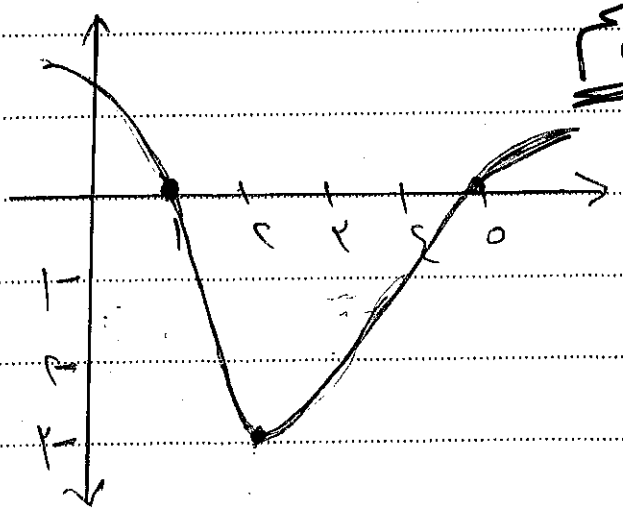
، د'(س) < ٠ ، س = ٢

∴ (٢ ، -٢) صغرى محلية

، د(س) متناقصة فى]-∞ ، ٢[

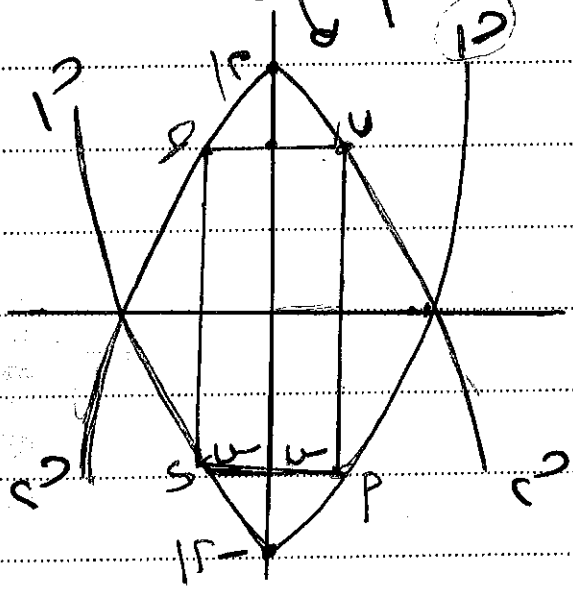
وعلى المدى]٢ ، ∞[

* أرسم



(١٢) رسم مستطيل بحيث تقع رءوسه على المنحنى ص = ١٢ - س² وأحد رءوسه على المحور السينى والرأس الآخر أعلى المحور السينى أوجد أكبر مساحة للمستطيل

الحل



نفرض أن ء د = ٢ س

∴ ء (س ، ١٢ - س²)

، ب (-س ، ١٢ - س²)

∴ ء ب = ٢ س

∴ مساحة المستطيل = ء د × ء ب

∴ م = ٢ س (١٢ - س²)

∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٢٤ - ٦ س²

م'' = -١٢ س

م' = ٠ ⇐ س = ٢

ق (٢) = −٤٨ < ٠

∴ س = ٢ ← أ صغرى محلية

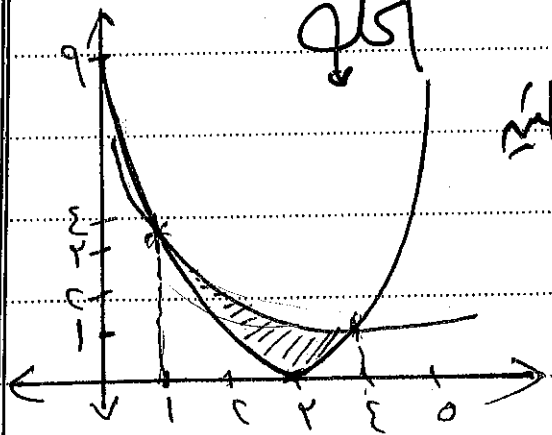
ص = ٤ × ٢^٣ − ٣ × ٢^٤

م = ٦٤ وحدة مربعة

(١٣)

أوجد حجم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = ٤/س ، ص = (س − ٢)^٢ دورة كاملة حول المستقيم ص = ٤

الحل



بحل المعادلتين

ص = ص

∴ ٤/س = (س − ٢)^٢

س (س − ٢)^٢ = ٤

س^٣ − ٦ س^٢ + ٩ س − ٤ = صفر

بحل المعادله

(س − ١)(س − ١)(س − ٤) = ٠

س = ١ ، ٤ = س

ص_١ < ص_٢ لكل س ∈ [١ ، ٤]

∴ ح = π ∫_١^٤ (ص_٢^٢ − ص_١^٢) د س

= π ∫_١^٤ [(٤ − (س − ٢)^٢)^٢ − (٤/س − (س − ٢)^٢)^٢] د س

= π [١٦ س − ٨/٣ (س − ٢)^٣ − ١٦/٣ س^٣ + ١/٥ (س − ٢)^٥]_١^٤

= π ٢٧/٥ وحدة مكعبة

(١٤)

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = س^٢ ، ص = ٦ س − س^٢

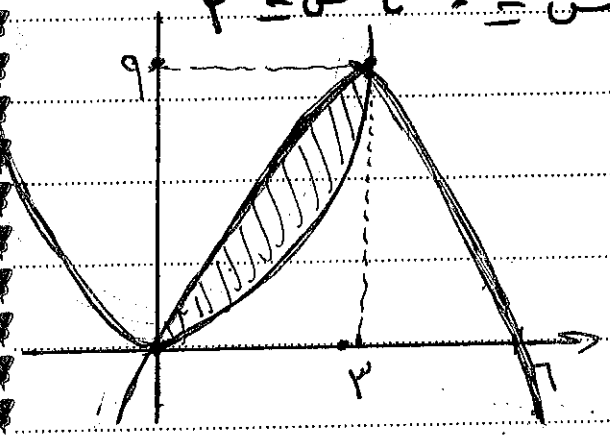
الحل

لإيجاد نقط التقاطع ص_١ = ص_٢

∴ س^٢ = ٦ س − س^٢

٢ س (س − ٣) = ٠

س = ٠ ، ٣ = س



ص_٢ > ص_١ لكل س ∈ [٠ ، ٣]

م = ∫_٠^٣ (ص_٢ − ص_١) د س

= ∫_٠^٣ (٦ س − ٢ س^٢) د س

= [٣ س^٢ − ٢/٣ س^٣]_٠^٣

= (٢٧ − ١٨) = ٩ وحدة مربعة

(١٥) إذا كانت $د(س) = \sqrt{(س-٤)^٣}$ فأوجد قيمة إحداثي النقطة على المنحنى التي يكون عندها ميل المماس يساوي $\frac{٣}{٢}$ ثم أوجد معادلة المماس عند هذه النقطة

الحل

$د(س) = (س-٤)^{\frac{٣}{٢}}$

$د'(س) = \frac{٣}{٢}(س-٤)^{\frac{١}{٢}}$

$د''(س) = \frac{٣}{٤}(س-٤)^{-\frac{١}{٢}}$

$\therefore د''(س) = \frac{٣}{٤\sqrt{(س-٤)}}$

عندما $س > ٤$

فإن $د''(س) > ٠$

$\therefore$ المنحنى لدالة محدبة على $[٤, \infty)$

والمطلوب فقط إثبات أ

(١٦) إذا كان حجم الدوراني الناشئ عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = س^٢$ والمستقيمين $س = ٠$ ، $ص = ١$ دورة كاملة حول المستقيم $ص = ١$ يساوي حجم مخروط ارتفاعه $\frac{١}{٢}$ وطوله $٤\sqrt{٢}$ فما طول نصف قطر القاعدة

الحل

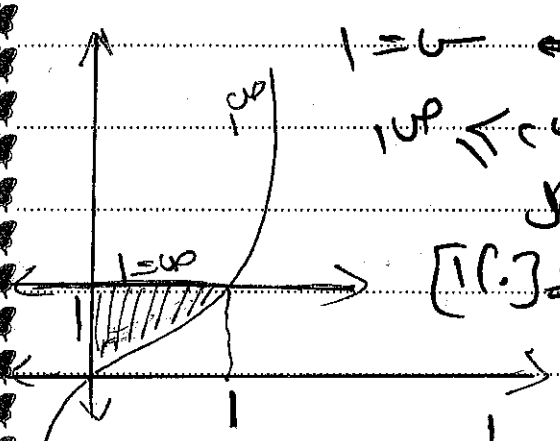
$ص_١ = س^٢$ ، $ص_٢ = ١$

$ص_١ = ص_٢ \Leftarrow س^٢ = ١$

$\Leftarrow س = ١$

$\therefore ص_١ > ص_٢$

على $[٠, ١]$



$ح = \pi \int_{٠}^{١} (ص_١^٢ - ص_٢^٢) د س$

$= \pi \int_{٠}^{١} (١ - س^٤) د س$

$= \pi [س - \frac{١}{٥} س^٥]_{٠}^{١}$

$= \pi [١ - \frac{١}{٥}]$

$= \frac{٤}{٥} \pi$ وحدة مكعبة

$\therefore$ حجم المخروط = حجم الجسم الدوراني

$\therefore \frac{١}{٣} \pi نق^٢ \times ٤\sqrt{٢} = \frac{٤}{٥} \pi$

$\therefore نق^٢ = \frac{٤}{٥} \times \frac{٣}{٤\sqrt{٢}}$

$نق^٢ = \frac{١}{٤\sqrt{٢}}$

$نق = \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

(١٧) يتناقص طول ضلع مربع بمعدل ٣ سم/د
فإن مساحته تتناقص بمعدل ٨ سم٢/د
عندما يصبح طول ضلع المربع ٤ سم

الحل

نفرض طول الضلع س

$\frac{ds}{dt} = -3$

$A = s^2$

$\frac{dA}{dt} = 2s \frac{ds}{dt}$

$= 2 \times 4 \times (-3)$

$= -24$ سم٢/د

(١٨) أثبت أن حجم المخروط الدائري القائم الذي طول نصف قطر قاعدته ٥ سم وارتفاعه ١٢ سم لا يتغير بتغير نصف قطر قاعدته

الحل

$\frac{r}{h} = \frac{5}{12}$

$h = \frac{12}{5} r$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \pi r^2 \times \frac{12}{5} r$

$= \frac{4}{5} \pi r^3$

$\frac{dV}{dr} = \frac{12}{5} \pi r^2$

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}$

$= \frac{12}{5} \pi r^2 \times \frac{dr}{dt}$

$= \frac{12}{5} \pi r^2 \times 0$

$= 0$

∴ الحجم لا يتغير بتغير نصف القاعدة

(١٩) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $ص = \frac{4}{س}$ والمستقيم $ص + س = 5$ والمحور السيني

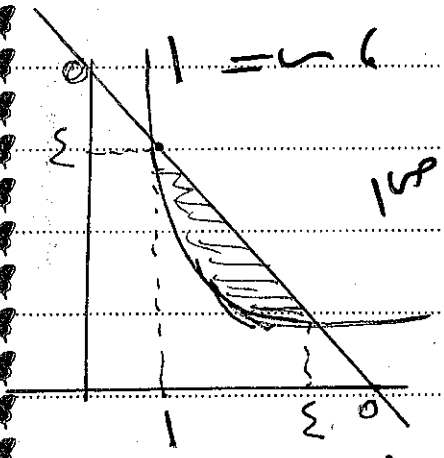
الحل

$\frac{4}{س} = 5 - س$

$س^2 - 5س + 4 = 0$

$(س - 4)(س - 1) = 0$

$س = 4$ ، $س = 1$



شكل (١٩)

$ع = \int_1^4 (ص_2 - ص_1) \, دس$

$= \pi \int_1^4 ((5-س)^2 - (\frac{4}{س})^2) \, دس$

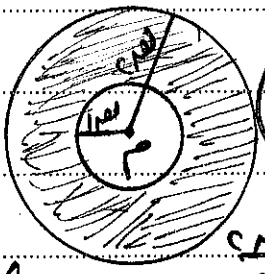
$= \pi \int_1^4 [(5-س)^2 - \frac{16}{س^2}] \, دس$

$= \pi [-\frac{1}{3}(5-س)^3 + \frac{16}{س}]_1^4$

$= 9\pi$ وحدة مربعة

(١٩) إذا كانت مساحة سطح الكرة المصمتة والمحصورة بين دائرتين متحدتي المركز طول نصف قطر إحداهما ١٠ سم تساوي مساحة سطح الكرة المصمتة التي طول نصف قطرها ٦ سم فأوجد معدل تغير مساحة سطح الكرة المصمتة الأولى بالنسبة للزمن عندما يكون طول نصف قطرها ٢٠ سم، علمًا بأن معدل تناقص نصف قطر الكرة الثانية ٣ سم/ث

الحل



ح = π (نق٢^٢ − نق١^٢)

بالاشتقاق

$\frac{دح}{دز} = \pi (2 نق_2 \times \frac{د نق_2}{دز} - 2 نق_1 \times \frac{د نق_1}{دز})$

$\frac{دح}{دز} = \pi (40 \times -3 - 12 \times 2)$

$= \pi (-4 - 2.6)$

$= -6.6 \pi$

∴ المساحة تتناقص بمعدل ٦٫٦ π سم^٢/ث

(٢٠) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى ص = ٤ − س^٢ والمستقيم الذي معادلته ص = ٠ حول المحور السيني دورة كاملة

(٢١) خزان على شكل مخروط دائري قائم رأسه لأعلى ونصف قطر قاعدته ١٠ م يصب فيه الماء بمعدل ٢ π (٢ + ن^٢) م^٣/د حيث ن الزمن بالدقيقة أوجد أكبر عمق للماء في الخزان بعد مرور أكثر من دقيقة

الحل

نفرض أن حجم الماء في الخزان = ح

$\therefore \frac{دح}{دن} = 2 \pi (2 + ن^2)$

$\therefore ح = \int 2 \pi (2 + ن^2) دن$

$ح = 4 ن + \frac{2}{3} ن^3 + ث$

عندما يكون الخزان فارغًا فإن ح = ٠ ، ن = ٠ ∴ ث = ٠

$\therefore ح = 4 ن + \frac{2}{3} ن^3$ عندما يمتلئ الخزان فإن ح = ١٠ π م^٣

$\therefore 10 = 4 ن + \frac{2}{3} ن^3$

$(ن - 3)(ن + 5) = 0$

$ن = 3$ مرفوض

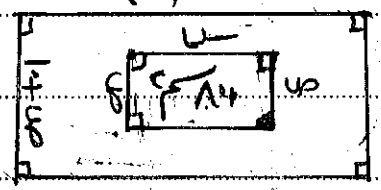
إذن أكبر عمق للماء بعد مرور أكثر من دقيقة = ٣ م

(٢٢) أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $ص = \frac{1}{س^2 + 1}$ والمستقيم س = ١ ، س = ٠

(٤٢) يراد تصميم ملصقه مستطيل الشكل مساحته ٨٠٠ سم٢ مع ترك هامش علوي وسفلي بعرض ١٠ سم لكل منهما وهامشين جانبيين بعرض ٥ سم لكل منهما أوجد أبعاد الملصقه الذي يجعل به مساحة الجزء المطبوع أصغر ما يمكن

الحل

نفرض أن بعدا الجزء المطبوع هما س ، ص سم



∴ بعدا الملصق هما س + ٢٠ ، ص + ١٠

س ص = ٨٠٠

$\leftarrow \boxed{ص = \frac{٨٠٠}{س}}$ ← ①

مساحة الملصق م

م = (س + ٢٠)(ص + ١٠)

م = (س + ٢٠)$\left(\frac{٨٠٠}{س} + ١٠\right)$

م = ١٠٠٠ + $\frac{١٦٠٠٠}{س}$ + ١٠ س

$\frac{دم}{دس}$ = ١٠ − $\frac{١٦٠٠٠}{س^٢}$

$م'' = \frac{٣٢٠٠٠}{س^٣}$

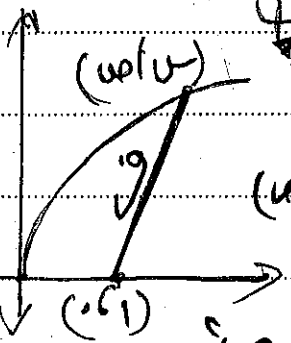
عندما $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ← $\boxed{س = ٤٠}$

∵ $م''(٤٠) > ٠$ ← س = ٤٠ صغرى

← ص = ٢٠ فالأبعاد هي ٦٠ سم ، ٤٠ سم

(٤٣) إذا كانت ف بعد النقطة (١ ، ٠) عن النقطة (س ، ص) الواقعة على المنحنى ص = س^٢ أوجد أحداثيات النقطة (س ، ص) التي تكون عندها ف أصغر ما يمكن

الحل



نفرض أن

بعد (١ ، ٠) عن (س ، ص)

∴ ف^٢ = (س − ١)^٢ + ص^٢

= س^٢ − ٢س + ١ + ص^٢

∵ ص = س^٢ ∴ $\boxed{ص^٢ = س}$

∴ ف^٢ = س^٢ − س + ١

∴ ف = $(س^٢ - س + ١)^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{دف}{دس} = \frac{١}{٢}(س^٢ - س + ١)^{-\frac{١}{٢}} \times$ (٢س − ١)

$\frac{دف}{دس}$ = صفر

$\leftarrow \boxed{س = \frac{١}{٢}}$

بالتعويض في معادلة المنحنى

∴ $\boxed{ص = \frac{١}{٤}}$

اختبار النقطة

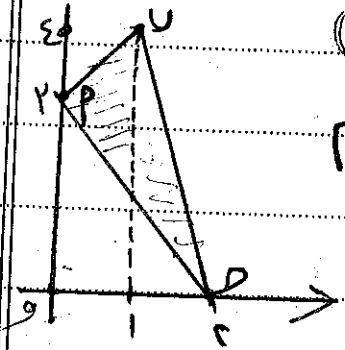
عند س < $\frac{١}{٢}$ ← $\frac{دف}{دس}$ < ٠

عند س > $\frac{١}{٢}$ ← $\frac{دف}{دس}$ > ٠

∴ النقطة ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$) صغرى

(٢٥) إذا كانت أ (٣، ٠)، ب (١، ٤)، جـ (٢، ١)
أوجد باستخدام التكامل
أولاً: مساحة Δ أ ب جـ
ثانياً: حجم الجسم الناشئ من دوران Δ أ ب جـ دورة كاملة حول أ ب

الحل



* معادلة $\overleftrightarrow{أب}$

$$\frac{ص-٢}{س-٠} = \frac{٤-٢}{١-٠}$$

$$ص = س + ٢ \quad \Leftarrow$$

* معادلة $\overleftrightarrow{ب جـ}$

$$\frac{ص-٤}{س-١} = \frac{١-٤}{٢-١}$$

$$ص = ٨ - ٣س \quad \Leftarrow$$

* معادلة $\overleftrightarrow{أ جـ}$

$$\frac{ص-٢}{س-٠} = \frac{١-٠}{٢-٠}$$

$$ص = ٢ - \frac{١}{٢}س \quad \Leftarrow$$

$$\text{م}(\Delta أ ب جـ) = \int_{١}^{٢} (٨ - ٣س - ٢ + \frac{١}{٢}س) \, دس + \int_{٠}^{١} (س + ٢ - \frac{١}{٢}س) \, دس$$

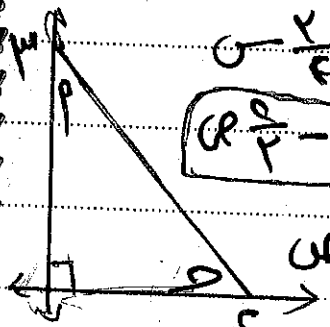
$$= \int_{١}^{٢} (٦ - \frac{٥}{٢}س) \, دس + \int_{٠}^{١} (\frac{١}{٢}س + ٢) \, دس$$

$$= [٦س - \frac{٥}{٤}س^{٢}]_{١}^{٢} + [\frac{١}{٤}س^{٢} + ٢س]_{٠}^{١}$$

$$= [١٢ - ١٠] - [٦ - \frac{٥}{٤}] + [\frac{١}{٤} + ٢] - [٠]$$

$$= ٢ - \frac{١٩}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{٥}{٤}$$ وحدة مساحة

ثانياً: الدوران حول أ ب



$$ص = ٢ - \frac{٢}{٤}س$$

$$س = ٢ - \frac{٢}{٣}ص \quad \Leftarrow$$

$$ح = \pi \int_{ب}^{جـ} س^{٢} \, دص$$

$$= \pi \int_{٠}^{٣} (٢ - \frac{٢}{٣}ص)^{٢} \, دص$$

$$= \pi \int_{٠}^{٣} (٤ - \frac{٨}{٣}ص + \frac{٤}{٩}ص^{٢}) \, دص$$

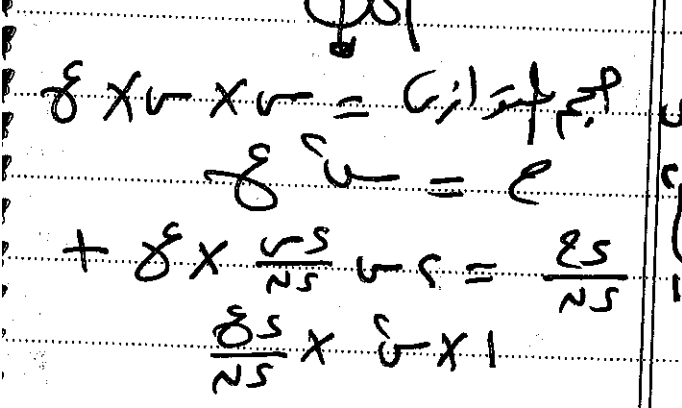
$$= \pi [٤ص - \frac{٤}{٣}ص^{٢} + \frac{٤}{٢٧}ص^{٣}]_{٠}^{٣}$$

$$= \pi [١٢ - ١٢ + ٤ - ٠]$$

$$= ٤\pi$$ وحدة مكعبة

(٢٦) يوضح بالرسم طريقة إيجاد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة $ص = س^{٢}$ ومستقيمها المار بالنقطتين (٠، ٠)، (٢، ٤) دورة كاملة حول محور السينات

الحل



حجم المجسم الناتج = حجم الأسطوانة − حجم المكافئ

$$ح = ٤ \times ٤ \times ٢ - \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times ٤ \times ٢$$

$$= ٣٢ - \frac{١٦}{٣}$$

$$= ٣٢ - ٥,٣٣ = ٢٦,٦٧$$ وحدة مكعبة

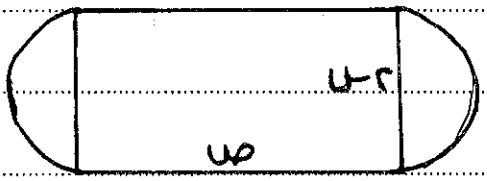
$\frac{كج}{كن} = ٢\times٦\times٤٫٠\times٥ + ٣٦ \times ٥٫٠ -$

$\therefore \frac{كج}{كن} = ٦٢٫٤$ د ٨

(٢٧)

ملعب على شكل مستطيل نصفي طرفاه متقابلان هما نصفا دائرة طول قطرها مساوياً لطول هذا الضلع. إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ م فأثبت أن مساحة الملعب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة. أوجد طول نصف قطرها

الحل



نفرض أن عرض المستطيل = س

∴ طول المستطيل = ص

محيط الملعب = ٤٠٠ م

$\therefore ٢س + ٢ص + \pi س = ٤٠٠$

$\therefore ص = ٢٠٠ - س - \frac{\pi}{٢} س$

∴ مساحة الملعب = م (الدائرة) + م (المستطيل)

$= \frac{\pi}{٨} س^٢ + س ص$

$\therefore د(س) = \frac{\pi}{٨} س^٢ + س(٢٠٠ - س - \frac{\pi}{٢} س)$

$\therefore د(س) = ٢٠٠س - س^٢ - \frac{\pi}{٨} س^٢$

$\therefore د'(س) = ٢٠٠ - ٢س - \frac{\pi}{٤} س$

د' (س) = ٠ ⟸ $س = \frac{٨٠٠}{٤+\pi}$

$د'' (\frac{٨٠٠}{٤+\pi}) < ٠$

$\therefore س = \frac{٨٠٠}{٤+\pi}$ عظمى محلية

$\therefore ص = ٢٠٠ - \frac{٨٠٠}{٤+\pi} - \frac{\pi}{٢} \times \frac{٨٠٠}{٤+\pi}$

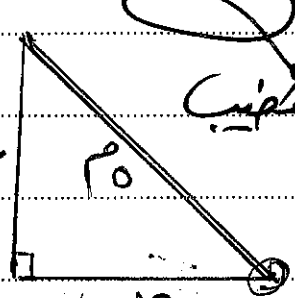
$ص = ص$

∴ الملعب يكون على شكل دائرة طول نصف قطرها $\frac{٨٠٠}{٤+\pi}$ م

(٢٨)

قضيب طوله ٥ م مثبت بمفصل في الأرض عند أحد طرفيه فإذا رُفع طرفه الآخر رأسياً لأعلى بواسطة ونش بمعدل ١م/ث أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب في الأرض عندما يكون هذا الطرف ارتفاعه ٣ م

الحل



∴ طول مسقط القضيب في الأرض ص وارتفاعه س

$\therefore س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

عندما س = ٢ فإن ص = ٤

بالتعامل

$\therefore -٣ س \frac{دص}{دس} + ٢ ص^{٢} = \frac{دص}{دس}$

$\therefore ٢ \times ٢ \times ١ + ٣ \times ٤ \times \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دس}$

$\Rightarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-٢}{٤}$ م/ث

(٢٩)

نرسم نصف دائرة نصف قطرها ص قاعدتها المحيط (الدائرة) طول قاعدتها المحيط يساوي طول كل ضلع من أضلاعها يساوي مقدار ثابت عليه فهي على شكل مثلث متساوي الأضلاع المطلوب إيجاد أكبر مساحة

الحل

من الشكل المقابل

$ب هـ = س - ص$

$ع^{٢} = ٤ ص^{٢} - (س - ص)^{٢}$

$= ٤ ص^{٢} - (س^{٢} - ٢ ص س + ص^{٢})$

$\therefore ع = (٢ ص^{٢} - س^{٢} + ٢ ص س)^{\frac{١}{٢}}$

مساحة شبه المنحرف

$= \frac{١}{٢} (٢ س + ٢ ص) \times ع$

$\therefore م = (س + ص)(٢ ص^{٢} - س^{٢} + ٢ ص س)^{\frac{١}{٢}}$

المطلوب إيجاد ص ثابت

$\frac{دم}{دس} = \frac{١}{٢}(٢ ص^{٢} - س^{٢} + ٢ ص س)^{-\frac{١}{٢}} \times$

$(-٢ س + ٢ ص)(س + ص) + (٢ ص^{٢} - س^{٢} + ٢ ص س)^{\frac{١}{٢}}$

عند أخذ عامل مشترك

$(٢ ص^{٢} - س^{٢} + ٢ ص س)^{-\frac{١}{٢}}$

يكون

$\frac{دم}{دس} = \frac{٤ ص^{٢} + ٢ ص س - ٢ س^{٢}}{\sqrt{٢ ص^{٢} - س^{٢} + ٢ ص س}}$

$\because$ ص ثابت

$\Rightarrow ٤ ص^{٢} + ٢ ص س - ٢ س^{٢} = ٠$

$\Rightarrow س = ٢ ص$ أو $س = -ص$ مرفوض

$\therefore س = ٢ ص$

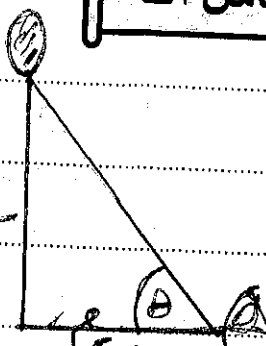
يكمل ما عليه الحزن

أكبر ما يمكنه

(٣٠)

يرتفع بالون راسياً رأسياً لأعلى بمعدل ثابت قدره ٢٨ م/ث فإذا تم رصد البالون من شاهدين على الأرض يبعد عن موقع البالون على الأرض ٢٠٠ م عند موقع البالون على الأرض أوجد معدل تغير زاوية ارتفاع $\frac{١}{٢}$ نظر أحد الشاهدين للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع ٢٠٠ م

تحياتي



أكمل
ع المطلوب
$\theta = \frac{ك}{٣٠٠}$

بالتعويض
$\theta = \frac{١}{٣٠٠} \times \frac{دس}{دن}$

عندما س = ٣٠٠ م فإن $\theta = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore \frac{دس}{دن} = ٣٠٠$ م/د

$\therefore \theta = \frac{\pi}{٤} \times \frac{٣٠٠}{٣٠٠}$

$\therefore \theta = ٠,٧٨٥$ د

(٢١)
قطعه معدنيه على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٦ سم وطول محيطه أقل ما يمكن والذى يجعل محيطه أقل ما يمكن وما قياس زاويته عندئذ

الحل
محيط القطاع = ٢نصف + ل

مساحه القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نصف

$\therefore ١٦ = \frac{١}{٢}$ ل نصف

$\therefore$ ل = $\frac{٣٢}{\text{نصف}}$

بالتعويض في (١)

$\therefore$ ع = ٢ نصف + $\frac{٣٢}{\text{نصف}}$

بالاشتقاق

$\frac{دع}{د\text{نصف}} = ٢ - \frac{٣٢}{\text{نصف}^{٢}}$

$\frac{دع}{د\text{نصف}} = + \frac{٣٢}{\text{نصف}^{٢}}$

عندما $\frac{دع}{د\text{نصف}}$ = صفر

نصف = ٤

ويكون $\frac{دع}{د\text{نصف}} < ٠$

$\therefore$ عندما نصف = ٤ يكون محيط القطاع أقل ما يمكن

مساحه القطاع = $\frac{١}{٢}$ نصف^{٢} θ

$\theta = \frac{٢ \times ١٦}{٤ \times ٤} = ٢$ ك

تصور لهم
θ قائم الزاويه
طول وتره ٣٠ سم ونصف طول أحد ضلعيه القائم
أحد أكبر العمود النازل من القائم على الوتر أكبر ما يمكن