المراجعة النهائية في

الجبـــر والهندسة الفراغية

الصف الثالث الثانوي

إعداد

م/ ناصر أبوزيد

مكتبه ريناد وأمين

مراجعة جبر

سؤال اختر

(١) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معاً أو ثلاثة حروف مختلفة معاً من عناصر المجموعة {أ، ب، جـ، د، هـ، و} هو

(أ) ٦ق٢ × ٦ق٣ (ب) ٦ل٢ × ٦ل٣ (جـ) ٦ق٢ + ٦ق٣ (د) ٦ل٢ + ٦ل٣

(٢) إذا كان نق٥ : نق٤ = ٢ : ١ فإن ن تساوي ....

(أ) ٧ (ب) ٩ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٣) أي القيم الآتية يمكن أن تساوي نل٢ ؟

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٢٧ (د) ٢٠

(٤) اشترك ١٢ لاعباً في مسابقة للسباحة كم طريقة يمكن بها ترتيب المراكز الأول والثاني والثالث ؟

(أ) ١٢٢٠ (ب) ١٣٢٠ (جـ) ٢٢١٠ (د) ٢٣١٠

(٥) إذا كان ١٧قم = ١٧قم+٥ فإن م = ...

(أ) -٥ (ب) صفر (جـ) ٥ (د) ١٢

(٦) إذا كان ن-٢ل٧ = ⌊٨ فإن ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١١ (د) ١٥

(٧) قيمة ٥٠ق٤ + $\sum_{ر=1}^{6}$ ٥٦-رق٣ = ...

(أ) ٥٦ق٤ (ب) ٥٦ق٢ (جـ) ٥٥ق٤ (د) ٥٥ق٣

(٨) المقدار نلر ÷ ن-١لر-١ = ...

(أ) ن (ب) ر (جـ) $\frac{ن}{ر}$ (د) $\frac{ر}{ن}$

(٩) إذا كان ⌊س-٢ × ٣ل٣ = ٢٠ ⌊س-٢ فإن س = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٤

(١٠) إذا كان ١٤ق٢ر = ١٤قر+٢ فإن ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢ أو ٣

(١١) $س + ص ل_٢ = ١٠$ ، $^{ص-٢}ق_٢ = ٢٥$ فإن $ل_{٢س-ص} =$ ___

(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ٢ (د) ١

(١٢) $^٩ق_ر > ^٩ق_{ر-١}$ فإن

(أ) ر < ٤ (ب) ر > ٤ (ج) ر ≥ ٥ (د) ر < ٥

(١٣) $^٧ق_ر < ١٢$ ، $^رق_٥ < ١٢$ فإن قيمة $ل_{٦-ر} =$ ___

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٧٢٠ (د) ٦

(١٤) إذا كان $^{ن+٢}ق_٤ = ن^٢ - ١$ فإن ن = ___

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ١٠

(١٥) $^نق_{ن-٢} = ٢٠$ فإن ن = ___

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

(١٦) إذا كان $^{١١}ق_{ر+١} : ^{١١}ق_ر = ٧ : ٥$ فإن قيمة ر = ___

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

(١٧) $~~٢~~٦ \; ^{٢ن-١}ل_{ن-١} = ٩ \; ^{٢ن}ل_ن$ فإن ن = ___

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(١٨) $^{٢٠}ق_ر = ^{٢٠}ق_{ر+١}$ ، $^نل_٧ = ٩٠ \times ^{ن-٢}ل_٥$ فإن $ل_{ن-ر}$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ١٠ (د) $ل_{٢٠}$

(١٩) إذا كان رتبتا الحدان الأوسطان في مفكوك $(س + ص)^ن$ هما ٧ ، ٨ فإن ن = ___

(أ) ١٤ (ب) ١٥ (ج) ١٦ (د) ١٢

(٢٠) مجموع معاملات حدود مفكوك $(س^٢ - \frac{١}{س})^٧ =$ ___

(أ) $٢^٧$ (ب) $٢^٥$ (ج) $٢^٦$ (د) صفر

(٢١) معامل الحد الخامس من مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$

(أ) $١٦ \; ^{١٠}ق_٥$ (ب) $\frac{١}{١٦} \; ^{١٠}ق_٥$ (ج) $١٦ \; ^{١٠}ق_٤$ (د) $\frac{١}{١٦} \; ^{١٠}ق_٤$

(٢٢) إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(أ + ٢ب)^{٢ن+١}$ متساويين فإن:

(أ) $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ (ب) أ = ٤ب (ج) أ = ٨ب (د) أ = ٢ب

(٢٣) في مفكوك $(1+س)^{17}$ إذا كان معامل $ح_{ر+4}$ = معامل $ح_{2ر+2}$
فإن ر = ...
(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ١٧ (د) ٧

(٢٤) الحد الرابع في مفكوك $\left(\frac{س}{2} + \frac{2}{س}\right)^{6}$ هو ___
(أ) ٢٠ س (ب) $\frac{20}{س}$ (جـ) ٢٠ (د) ٢٠ $س^2$

(٢٥) الحد الأخير من مفكوك $(2-س)^{5}(2+س)^{5}$ هو ___
(أ) $س^5$ (ب) $-س^5$ (جـ) $-س^{10}$ (د) $س^{10}$

(٢٦) من مفكوك $(1+س)^{ن} = 1 + أ_1 س + أ_2 س^2 + أ_3 س^3 + \dots + أ_{10} س^{10}$
وكان $\frac{أ_3 + أ_2}{أ_2} = 2$ فإن ن = ___
(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ٩

(٢٧) إذا كان $1 + \frac{5}{2} س + \frac{5\times4}{2!\,4} س^2 + \frac{5\times4\times3}{3!\,8} س^3 + \dots + \frac{1}{32} س^5 = 1024$ فإن س = ___
(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(٢٨) $1 - 6س + \frac{6\times5}{1\times2} س^2 - \frac{6\times5\times4}{1\times2\times3} س^3 + \dots + س^6 = 64$
فإن س = ___
(أ) $\{-1 ، 3\}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) -1

(٢٩) إذا كان الحد الأوسط في مفكوك $\left(\frac{أ^2}{2} + \frac{ب}{أ^2}\right)^{8ن}$ هو $ح_9$ فإن
ن = ___
(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣٠) في مفكوك ذي الحدين إذا كان الحد العام هو $^{12}ق_ر \, س^{24-4ر}$
يكون الحد المشتمل على $س^{12}$ هو ___
(أ) $ح_3$ (ب) $ح_4$ (جـ) $ح_5$ (د) لا يوجد

(٣١) في مفكوك ذي الحدين لدينا ٧ حدود موجبة، ٦ حدود سالبة فإن المقدار هو
(أ) $(أ-ب)^{12}$ (ب) $(أ-ب)^{12}$ (جـ) $(أ+ب)^{12}$ (د) $(أ-ب)^{12}$

(٣٢) في مفكوك $س^2(1+س)^{7}$ يكون معامل الحد المشتمل على $س^4$ هو ___
(أ) $^7ق_4$ (ب) $^7ق_2$ (جـ) $^7ق_1$ (د) ٢١

(٢٢) في مفكوك $(أس + \frac{1}{بس})^{10}$ إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل الحد السابع فإن ـــ

أ) $أب = \frac{6}{5}$ ب) $أب = \frac{5}{6}$ ج) $أب = \frac{26}{25}$ د) $أب = \frac{25}{26}$

(٢٤) في مفكوك $(1 + أس)^7$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معامل $ح_5 = 560$ فإن أ = ـــ

أ) ٢ ب) ٤ ج) ±٢ د) ±٤

(٢٥) الحد الخالي من س في مفكوك $(2س + \frac{1}{2س})^8$ هو ـــ

أ) ٢٥ ب) ١٤٠ ج) ٧٠ د) ٥٦

(٢٦) في مفكوك $(أس^2 + \frac{1}{أس})^{11}$ إذا كان معاملا $س^4$ ، $س^7$ متساويان فإن أ = ـــ

أ) ١ ب) -١ ج) ±١ د) ±٢

(٢٧) في مفكوك $(س + ص)^8$ تكون $ح_6 : ح_4$ = ـــ

أ) $\frac{25ص^2}{16س^2}$ ب) $\frac{25س^2}{16ص^2}$ ج) ١ د) $\frac{ص^2}{س^2}$

(٢٨) في مفكوك $(1 - س)^{12}$ معامل $ح_6$: معامل $ح_5$ = ـــ

أ) $\frac{8}{5}$ ب) $\frac{5}{8}$ ج) $-\frac{8}{5}$ د) $-\frac{5}{8}$

(٢٩) في مفكوك $(2أ - 2ب)^{11}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين $\frac{2}{3}$ فإن أ : ب = ـــ

أ) ٩ : ٤ ب) ٤ : ٩ ج) ١ د) -١

(٤٠) إذا كان ع = $\sqrt{2}$ (جتا ٢٠ + ت جا ٢٠) فإن السعة الأساسية للعدد $ع^3$ = ـــ

أ) ٢٠° ب) ٦٠° ج) ٩٠° د) ١٢٠°

(٤١) إذا كان ع = $-1 + \sqrt{3}$ ت فإن $|ع|$ = ـــ

أ) -٢ ب) ٢ ج) $\sqrt{3}$ د) $-1 - \sqrt{3}$ ت

(٤٢) إذا كان $ع_1 = 2 + 2\sqrt{3}$ ت ، $ع_2 = -2 - 2\sqrt{3}$ ت فإن سعة العدد $ع_1 + ع_2$ = ـــ

أ) ٦٠° ب) ٢٤٠° ج) ١٨٠° د) ٢٠٠°

(٤٢) إذا كان ع = $(١ + \sqrt{٣}\,ت)^ن$ وكان |ع| = ٨ فإن السعة الأساسية للعدد ع = ...

(أ) $\frac{\pi}{٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ (د) π

(٤٤) إذا كان $ع_١ = -١ - ت$ فإن الصورة الأسية للعدد ع هي ...

(أ) $هـ^{\frac{٣\pi}{٤}ت}$ (ب) $هـ^{\frac{٥\pi}{٤}ت}$ (جـ) $\sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{٣\pi}{٤}ت}$ (د) $\sqrt{٢}\,هـ^{٢٢٥ت}$

(٤٥) إذا كان س + ص ت = $\frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}$ فإن $س^٢ + ص^٢$

(أ) $أ^٢ + ب^٢$ (ب) $أ^٢ - ب^٢$ (جـ) ٢ أ ب (د) ١

(٤٦) أي مما يأتي يمثل الصورة الجبرية للعدد ٢(جا $\frac{٢\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٢\pi}{٣}$)

(أ) $-\sqrt{٣} + ت$ (ب) $-١ + \sqrt{٣}\,ت$ (جـ) $-\sqrt{٣} + \sqrt{٣}\,ت$ (د) $-\sqrt{٣} - \sqrt{٣}\,ت$

(٤٧) مرافق العدد ١ + ω هو ...

(أ) ١ − ω (ب) $١ + ω^٢$ (جـ) $-ω^٢$ (د) $١ - ω^٢$

(٤٨) الجذور الخماسية للواحد الصحيح تمثل على مستوى أرجاند رؤوس

(أ) مثلث متساوي الأضلاع (ب) مربع (جـ) خماسي منتظم (د) سداسي منتظم

(٤٩) إذا كان ع = $(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت)^ن$ حيث ن ∈ ص+ وكان ع = ١ فإن أصغر قيم ن = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (جـ) ٢ (د) ١

(٥٠) إذا كان |ع| = |ع − ٢| فإن الجزء الحقيقي للعدد ع = ...

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٢ (د) ٢

(٥١) $هـ^{θت} + هـ^{-θت}$ = ...

(أ) $هـ^{٢θت}$ (ب) $هـ^{-٢θت}$ (جـ) ٢ جتا θ (د) ٢ جا θ

(٥٢) إذا كان |ع| = ١٠ فإن ع $\bar{ع}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١ (د) −١٠٠

(٥٣) $ت + ت^٢ + ت^٣ + ... + ت^{١٣}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ١٣

(٥٤) $١ + ω + ω^٢ + ω^٣ + ... + ω^{١٠٠}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ω (د) $-ω^٢$

(٥٥) $(\omega^2 + \frac{1}{\omega})(1 + \frac{1}{\omega^2})^2 =$ ــــــ

أ) ٤ ب) صفر جـ) −٢ د) −٥

(٥٦) $(أ + ب\omega + أ\omega^2)(أ + ب\omega^2 + أ\omega^4) =$ ــــــ

أ) ١ ب) أ − ب جـ) $(أ - ب)^2$ د) $(ب^2 - أ^2)$

(٥٧) $(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2})(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4}) =$ ــــــ

أ) صفر ب) ١ جـ) −١ د) ٢

(٥٨) $\frac{أ - د\omega}{أ\omega^2 - د} - \omega^2 =$ ــــــ

أ) ٢ت ب) $\pm\sqrt{3}$ت جـ) −٢ د) ٢

(٥٩) اذا كان $(1 + \omega)^7 = أ + ب\omega$ فإن (أ، ب) = ــــــ

أ) (٠، −١) ب) (١، ١) جـ) (٠، ١) د) (١، −١)

(٦٠) $\sum_{ر=1}^{6} (1 + \omega^ر) =$ ــــــ

أ) صفر ب) ٦ جـ) ١ د) $1 + \omega$

(٦١) اذا كان |ع| = |ع − ٢| فإن الجزء الحقيقي للعدد ع = ــــــ

أ) ١ ب) −١ جـ) −٢ د) ٢

(٦٢) $هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت} =$ ــــــ

أ) $هـ^{2\theta ت}$ ب) $هـ^{-\theta ت}$ جـ) ٢ جا θ د) ٢ طا θ

(٦٣) اذا كان |ع| = ١٠ فإن $ع \bar{ع} =$ ــــــ

أ) ١٠ ب) ١٠٠ جـ) ١ د) −١٠٠

(٦٤)
$$\begin{vmatrix} أ & أ & أ \\ جـ & ب & أ \\ جـ & جـ & جـ \end{vmatrix} = \text{ــــــ}$$

أ) صفر ب) ١ جـ) أجـ د) أ ب جـ

(٦٥)
$$\begin{vmatrix} 1+ت & ت & 1 \\ 1-ت & 1 & 0 \\ \bar{ت} & \bar{ت} & 0 \end{vmatrix} = \text{ــــــ}$$

أ) ٢ت − ١ ب) ت جـ) ١ د) ٢ت + ١

(٦٦) $\begin{vmatrix} \frac{1}{\text{ج}} & \text{أ} & \text{أب} \\ \frac{1}{\text{ب}} & \text{ج} & \text{أج} \\ \frac{1}{\text{أ}} & \text{ب} & \text{بج} \end{vmatrix}$ = ــــــ

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٥

(٦٧) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{٢س} & \text{٢س} & \text{س} \\ \text{س} & \text{٢س} & \text{٢س} \\ ٠ & \text{-س} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ٩٦ في ح هي

(أ) ٤ (ب) ٢ (ج) -٢ (د) ±٢

(٦٨) في △ أ ب ج يكون $\begin{vmatrix} \text{ج}' & \text{ب}' & \text{أ}' \\ ٨ & ٧ & ٥ \\ \text{طج} & \text{طب} & \text{طأ} \end{vmatrix}$ = ــــــ

(أ) ٥أ' (ب) ٧ب' (ج) ٨ج' (د) صفر

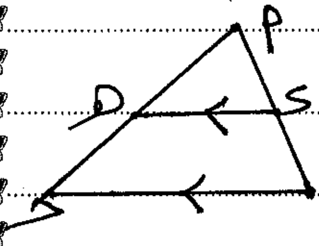
(٦٩) إذا كان ن = $\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ٥ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$ ، م = $\begin{vmatrix} ٩ & ٠ & ٢ \\ ١٠ & ٦ & ٤ \\ ١٠ & ٣٠ & ٥ \end{vmatrix}$ فإن م = ---

(أ) ن (ب) ١٠ن (ج) ٣٠ن (د) ٢٠ن

(٧٠) $\begin{vmatrix} \text{أ+ج} & \text{ج+ب} & \text{أ+ب} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{ج} \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = ــــــ

(أ) -١ (ب) صفر (ج) أ+ب+ج (د) أبج

(٧١) في الشكل المقابل $\overline{\text{ده}} \parallel \overline{\text{بج}}$



$\begin{vmatrix} ٧ & ٦ & ٥ \\ \text{أهـ} & \text{أد} & \text{دهـ} \\ \text{أجـ} & \text{أب} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$ = ــــــ

(أ) ٧ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) صفر

(٧٢) إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ د & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = ٢$ فإن $\begin{vmatrix} ٥أ & ب & جـ \\ ٥د & هـ & و \\ ٢٥س & ٧ص & ٧ع \end{vmatrix} =$ ــــــ

(أ) ٧٠٠ (ب) ٧٠ (جـ) ٢٥ (د) ١٠

(٧٣) $\begin{vmatrix} أ+ب & ٥ & جـ \\ ب+جـ & ٥ & أ \\ أ+جـ & ٥ & ب \end{vmatrix} =$ ــــــ

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) صفر

(٧٤) إذا كان $\begin{vmatrix} لو_٢ ٢ & ٢ & ٩ \\ ٠ & لو_٢ ٥ & ٧ \\ ٠ & ٠ & لو_٥ س \end{vmatrix} = ٤$ فإن س = ــــــ

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٨

(٧٥) $\left(\frac{٥ - ٢س^٢}{٥س - ٣} - \frac{٢ - ٧س}{٣س^٢ - ٧}\right)^٢ =$ ــــــ

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٢ت (د) −٢ت

إجابة ســل

(١) $^{٦}ق_٢ + ^{٦}ق_٣$ لابد ١ أو نقف جمع العملية

(٣) $\frac{^{ن}ق_٥}{^{ن}ق_٤} = \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \Leftarrow \frac{ن - ٤}{٥} = \frac{٣}{١}$

$\Leftarrow ن - ٤ = ١٥ \Leftarrow \boxed{ن = ١٩}$

(٢) ٣٠ طريقة ٣٠ = ٦ × ٥ (متتاليه)

(٤) $^{١٢}ل_٣ = ١٢ \times ١١ \times ١٠ = \boxed{١٣٢٠}$ (ترتيب)

(٥) $١٧ \neq ٢٩ \Leftarrow م + ٥ = صفر \Leftarrow \boxed{م = -٥}$

(٦) $\lfloor 8 = {}^{8}ل_{7}$

∴ $ {}^{ن-٣}ل_{٧} = {}^{٨}ل_{٧} $

⟸ ن - ٣ = ٨

⟸ $\boxed{ن = ١١}$

(٧) $\underline{{}^{٥٠}ق_{٤}} + {}^{٥٥}ق_{٣} + {}^{٥٤}ق_{٣}$
$+ {}^{٥٣}ق_{٣} + {}^{٥٢}ق_{٣} + {}^{٥١}ق_{٣}$
$+ \underline{{}^{٥٠}ق_{٣}}$

$= {}^{٥١}ق_{٤} + {}^{٥١}ق_{٣} +$ الباقي

$= {}^{٥٢}ق_{٤} + {}^{٥٢}ق_{٣} + --$

$= {}^{٥٣}ق_{٤} + {}^{٥٣}ق_{٣} + --$

$= {}^{٥٤}ق_{٤} + {}^{٥٤}ق_{٣} + {}^{٥٥}ق_{٣}$

$= {}^{٥٥}ق_{٤} + {}^{٥٥}ق_{٣}$

$= \boxed{{}^{٥٦}ق_{٤}}$

لاحظ أن $ {}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١} = \boxed{{}^{ن+١}ق_{ر+١}} $

(٨) $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ن-ر} \div \frac{\lfloor ن-١}{\lfloor ن-ر}$

$= \frac{ن \cancel{\lfloor ن-١}}{\cancel{\lfloor ن-ر}} \times \frac{\cancel{\lfloor ن-ر}}{\cancel{\lfloor ن-١}}$

$= \boxed{ن}$

(٩) $\cancel{\lfloor س-٣} \times {}^{س}ل_{٣} = ٢٠ (س-٢) \cancel{\lfloor س-٣}$

∴ $س (س-١) \cancel{(س-٢)} = ٢٠ \cancel{(س-٢)}$

لاحظ أن س - ٢ ≠ صفر

∴ $س^٢ - س - ٢٠ = ٠$

$(س - ٥)(س + ٤) = ٠$

س = ٥ ، س = -٤ مرفوض

∴ $\boxed{س = ٥}$

(١٠) إما $ر^٢ = ر + ٢$

∴ $ر^٢ - ر - ٢ = ٠$

$(ر - ٢)(ر + ١) = ٠$

$\boxed{ر = ٢}$ مرفوض

أو $ر^٢ + ر + ٢ = ١٤$

∴ $ر^٢ + ر - ١٢ = ٠$

$(ر + ٤)(ر - ٣) = ٠$

$\boxed{ر = ٣}$ مرفوض

∴ الإجابة هي {٢ أو ٣}

(١١) $ {}^{س+ص}ل_{٢} = ١٥ \times ١٤ $

∴ س + ص = ١٥ ⟵ (١)

∴ $ {}^{ص-٣}ل_{٣} = ٢٠ \underline{\lfloor ٣} $

$ {}^{ص-٣}ل_{٣} = ٢١٠ $

$ {}^{ص-٣}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ $

∴ ص - ٣ = ٧ ⟵ (٢)

⟸ $\boxed{ص = ١٠}$ بالتعويض في (١)

∴ $\boxed{س = ٥}$

∴ $\lfloor ٢س - ص = \lfloor ١٠ - ١٠ = \lfloor صفر = ١$

(١٢) $\frac{\lfloor 9}{\lfloor ر \, \lfloor 9-ر} > \frac{\lfloor 9}{\lfloor ر-1 \, \lfloor 10-ر}$

$\therefore \lfloor ر-1 \times (10-ر) \, \lfloor 9-ر > ر \, \lfloor ر-1 \, \lfloor 9-ر$

$\therefore 10 - ر > ر \Longleftarrow \boxed{ر < 5}$

---

(١٣) $^{7}ق_{ر} > 1 \Longleftarrow 1 < ر < 7 \longrightarrow (1)$

$ر ق 5 > 1 \Longleftarrow ر > 5 \longrightarrow (2)$

من (١)، (٢) $5 < ر < 7 \Longleftarrow \boxed{ر = 6}$

$\therefore \lfloor 6-ر = \lfloor 6-6 = \lfloor 0 = \boxed{1}$

---

(١٤) $\frac{\lfloor ن+2}{\lfloor 4 \, \lfloor ن-2} = ن^2 - 1 \Longleftarrow \frac{(ن+2)(ن+1)ن(ن-1)\cancel{\lfloor ن-2}}{\lfloor 4 \, \cancel{\lfloor ن-2}}$

$\Longleftarrow ن(ن+2) = \lfloor 4$

$\Longleftarrow ن^2 + 2ن - 24 = صفر \Longleftarrow (ن+6)(ن-4) = 0$

$\Longleftarrow \boxed{ن = 4}$

---

(١٥) $^{ن}ق_{ن-2} = {^{ن}ق_{3}} = 20$

لأن $^{ن}ق_{ر} = {^{ن}ق_{ن-ر}}$

تعاريف التبسيط

$\therefore {^{ن}ل_{3}} = 20 \times \lfloor 3 = 120$

$\therefore {^{ن}ل_{3}} = 6 \times 5 \times 4 \Longleftarrow \boxed{ن = 6}$

---

(١٦) $\frac{11 - ر \cancel{+1-1}}{ر+1} = \frac{7}{5} \Longleftarrow 55 - 5ر = 7ر + 7$

$\Longleftarrow \boxed{ر = 4}$

---

(١٧) $\cancel{36}^{\,4} \times \frac{\lfloor 2ن-1}{\cancel{\lfloor ن}} = \cancel{9} \times \frac{\lfloor 2ن}{\cancel{\lfloor ن}}$

$\therefore 4 \, \cancel{\lfloor 2ن-1} = 2ن \, \cancel{\lfloor 2ن-1} \Longleftarrow \boxed{ن = 2}$

(١٨) ر + ر + ١٠ = ٣٠ ⟵ $\boxed{ر = ١٠}$

$\dfrac{ل^{ن}}{\cancel{ل^{ن-٧}}} = ٩٠ \times \dfrac{ل^{ن-٢}}{\cancel{ل^{ن-٧}}}$ ⟸ ن (ن − ١) = ١٠ × ٩

⟸ $\boxed{ن = ١٠}$

∴ $ل^{ن-ر} = ل^{صفر} = \boxed{١}$

---

(١٩) ن فردية ، $\dfrac{ن+١}{٢} = ٧$ ⟵ ن = ١٣

(٢٠) مجموع المعاملات = $(١ - ١)^{٧}$ = صفر

(٢١) معامل ح٥ = $^{١٠}ق_{٤} \, (٢)^{٤} \times (١)^{٦}$ = $\boxed{١٦ \times {}^{١٠}ق_{٤}}$

---

(٢٢) الحدان الأوسطان هما $\dfrac{٢ن+١+١}{٢}$ = ن+١ ، ن+٢

∴ $\dfrac{ح_{ن+٢}}{ح_{ن+١}} = ١$ ⟵ $\dfrac{٢ن+١ - ن - \cancel{١} + \cancel{١}}{ن+١} \times \dfrac{٢ب}{أ}$

⟵ $\dfrac{٢ب}{أ} = ١$ ⟵ $\boxed{أ = ٢ب}$

---

(٢٣) $^{١٧}ق_{ر+٢} = {}^{١٧}ق_{٢ر+٢}$

∴ ر + ٢ = ٢ر + ٢ ⟵ ر = ٠ مرفوض

أو ر + ٢ + ٢ر + ٢ = ١٧ ⟵ $\boxed{ر = ٢}$

---

(٢٤) $^{٦}ق_{٣} \left(\dfrac{٢}{س}\right)^{٣} \times \left(\dfrac{س}{٢}\right)^{٣} = {}^{٦}ق_{٣} = \dfrac{٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣} = \boxed{٢٠}$

---

(٢٥) $(٤ - س^{٢})^{٥}$ الحد الأخير هو ح٦

∴ ح٦ = $(-س^{٢})^{٥}$ = $\boxed{-س^{١٠}}$

(٢٦) $(١ + س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١} (س) + {}^{ن}ق_{٢} (س)^{٢} + {}^{ن}ق_{٣} س^{٣}$

⟵ $^{ن}ق_{١} = أ$ ، $^{ن}ق_{٢} = أ_{٢}$ ، $^{ن}ق_{٣} = ٢أ$

$\because \frac{{}^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢}}{{}^{ن}ق_{٢}} = ٢ \Leftarrow ١ + \frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٢}} = ٣$

$\because \frac{ن - ٢}{٣} = ٢ \Leftarrow \boxed{ن = ٨}$

---

(٢٧) الأيمن $= ١ + {}^{٥}ق_{١}(\tfrac{١}{٢}س)^{١} + {}^{٥}ق_{٢}(\tfrac{١}{٢}س)^{٢} + {}^{٥}ق_{٣}(\tfrac{١}{٢}س)^{٣}$

$+ {}^{٥}ق_{٥}(\tfrac{١}{٢}س)^{٥} = (١ + \tfrac{١}{٢}س)^{٥} = ١٠٢٤$

$\Leftarrow (١ + \tfrac{١}{٢}س)^{٥} = (٤)^{٥} \Leftarrow \boxed{س = ٦}$

---

(٢٨) الأيمن $= ١ - {}^{٦}ق_{١}س^{١} + {}^{٦}ق_{٢}س^{٢} - {}^{٦}ق_{٣}س^{٣}$

$+ \text{—} {}^{٦}ق_{٦}س^{٦} = (١ - س)^{٦}$

$\because (١ - س)^{٦} = ٦٤ = ٢^{٦} \Leftarrow$ الأس زوجي

$١ - س = \pm ٢ \Leftarrow \boxed{س = -١}$ أو $\boxed{س = ٣}$

---

(٢٩) $\frac{٨ن}{٢} + ١ = ٩ \Leftarrow \frac{٨ن}{٢} = ٨ \Leftarrow \boxed{ن = ٢}$

---

(٣٠) $٢٤ - ٤ر = ١٢ \Leftarrow ر = ٣$

$\Leftarrow$ $ح_{٤}$ هو الحد المشتمل على $س^{١٢}$

---

(٣١) $ن = ١٢$ لأن عدد الحدود ١٣

$\therefore$ المقدار هو $(أ - ب)^{١٢}$

---

(٣٢) لنوجد معامل الحد المشتمل على $س^{١}$ من مفكوك $(١ + س)^{٧}$

وهو ${}^{٧}ق_{١}$ لأن $ح_{٢}$ هو المشتمل على $س^{١}$

* سبحان الله والحمد لله سبحان الله العظيم *

(٢٢) $ح_{ر+1} = {}^{١٠}ق_ر \left(\frac{١}{ب}\right)^ر (أب)^{١٠-ر}$

⟸ $-ر + ١٠ - ر = صفر$ ⟸ $\boxed{ر = ٥}$

∴ $ح_٦ =$ معامل $ح_٧$ ⟸ ${}^{١٠}ق_٥ \times ب^٥ أ^٥ = {}^{١٠}ق_٦ ب^٦ أ^٤$

⟸ $٢٥٢ \times \left(\frac{أ}{ب}\right) = ٢١٠ \times \left(\frac{أ}{ب}\right)^٢ \times \frac{١}{ب^٢}$

⟸ $\frac{٦}{٥} = \frac{أ}{ب} = \frac{١}{ب^٢}$ ⟸ $\boxed{أب = \frac{٥}{٦}}$

---

(٢٤) معامل $ح_٥ = {}^{٧}ق_٤ (أ)^٤ \times (١)^٣ = ٥٦٠$

⟸ $٣٥ أ^٤ = ٥٦٠$ ⟸ $أ^٤ = ١٦$ ⟸ $\boxed{أ = \pm ٢}$

---

(٢٥) $ح_{ر+1} = {}^{٨}ق_ر \left(\frac{١}{٢س}\right)^ر (٢س)^{٨-ر}$

⟸ $-ر + ٨ - ر = صفر$ ⟸ $\boxed{ر = ٤}$

⟸ $ح_٥ = {}^{٨}ق_٤ \left(\frac{١}{٢}\right)^٤ \times ٢^٤ = \boxed{٧٠}$

---

(٢٦) ${}^{١١}ق_ر \left(\frac{١}{أس}\right)^ر (أس^٢)^{١١-ر} = {}^{١١}ق_ر أ^{١١-٢ر} س^{٢٢-٢ر-ر}$

∴ $٢٢ - ٢ر - ر = ٤$ ⟸ $\boxed{ر = ٦}$

، $٢٢ - ٢ر - ر = ٧$ ⟸ $\boxed{ر = ٥}$

∴ $\cancel{{}^{١١}ق_٦} أ^{-١} = \cancel{{}^{١١}ق_٥} أ$ ⟸ $أ^٢ = ١$ ⟸ $\boxed{أ = \pm ١}$

---

(٢٧) $\frac{ح_٦}{ح_٥} \times \frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{٨ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{ص}{س} \times \frac{٨ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{ص}{س}$

$= \frac{٤}{\cancel{٥}} \times \frac{\cancel{٥}}{٤} \frac{ص^٢}{س^٢} = \boxed{\frac{ص^٢}{س^٢}}$

---

(٢٨) $\frac{معامل\ ح_٦}{معامل\ ح_٥} = \frac{١٢ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{-١}{١} = \boxed{\frac{-٨}{٥}}$

---

(٢٩) الحدان الأوسطان هما $ح_٦ ، ح_٧$ ⟸ $\frac{ح_٦}{ح_٧} = \frac{-٢}{...}$

$\leftarrow \frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ت}{2} \leftarrow \frac{\sqrt{3}-6+1}{6}$ * $\frac{-2ب}{2م} = \frac{ت}{2}$

$\leftarrow \boxed{\frac{م}{ب} = 1}$

(40) $ع = \sqrt{6}\ (\text{جتا}\ 60 + ت\ \text{جا}\ 60) \leftarrow \boxed{\theta = 60^\circ}$

(41) $\bar{ع} = -1 - \sqrt{3}\ ت \leftarrow |\bar{ع}| = \sqrt{1+3} = \boxed{2}$

(42) $ع_1 + ع_2 = -1 - \sqrt{3}\ ت \leftarrow \text{ظا}\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ (60)

θ تقع في الربع الثالث $\leftarrow \boxed{\theta = 240^\circ}$

(43) $\sqrt{1+3} = 2 \leftarrow 2^ن = 8 \leftarrow ن = 3$

$\therefore (\text{جتا}\ 60 + ت\ \text{جا}\ 60)^3 \leftarrow \theta = 60 \times 3 = 180^\circ$

(44) $ل = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ظاθ $= \frac{1}{1} = 1 \leftarrow \theta = 225^\circ$

$\therefore ع = \sqrt{2}\ هـ^{225\ ت} = \sqrt{2}\ هـ^{\frac{5\pi}{4}\ ت}$

(45) $س + ص\ ت = \frac{(م + ب\ ت)^2}{م^2+ب^2}$ بعد الضرب من مراجعة العام

$\therefore س + ص\ ت = \frac{م^2 - ب^2 + 2مب\ ت}{م^2+ب^2}$

$\therefore س = \frac{م^2-ب^2}{م^2+ب^2}$ ، $ص = \frac{2مب}{م^2+ب^2}$

$\therefore س^2 + ص^2 = \frac{م^4 - 2م^2ب^2 + ب^4 + 4م^2ب^2}{(م^2+ب^2)^2} = \frac{(م^2+ب^2)^2}{(م^2+ب^2)^2} = \boxed{1}$

(٤٦) س = ل جتا θ ⟵ س = ٢ جتا ١٢٠ = −١

ص = ل جا θ ⟵ ص = ٢ جا ١٢٠ = $\sqrt{3}$

∴ ع = −١ + $\sqrt{3}$ ت   لاحظ ان θ في الثاني

---

(٤٧) ∵ ω = $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ∴ ١ + ω = $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

∴ المرافق هو $\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت ∴ المرافق هو ١ + ω^2

حل مختصر

مرافق ω هو ω^2 ⟵ مرافق ١ + ω هو ١ + ω^2

---

(٤٨) خماسي منتظم

(٤٩) عند ن = ١ ⟵ ع = $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

∴ |ع| = $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$ = ١ ⟵ اصغر قيمة $\boxed{ن = ١}$

---

(٥٠) نفرض ان ع = أ + ب ت

⟵ ع − ٢ = أ − ٢ + ب ت

∵ |ع| = |ع − ٢| ⟵ $أ^2 + \cancel{ب^2} = (أ - ٢)^2 + \cancel{ب^2}$

⟵ $\cancel{أ^2} = \cancel{أ^2} - ٤أ + ٤$ ⟵ $\boxed{أ = ١}$

---

(٥١) $هـ^{θت}$ = جتا θ + ت جا θ ، $هـ^{-θت}$ = جتا θ − ت جا θ

بالجمع ⟵ $هـ^{θت} + هـ^{-θت}$ = $\boxed{٢ \text{ جتا } θ}$

لاحظ ان $\boxed{|ع| = |\bar{ع}|}$

---

(٥٢) نفرض ان ع = أ + ب ت ⟵ |ع| = ١٠ معطى

⟵ $أ^2 + ب^2$ = ١٠٠ ، $\bar{ع}$ = أ − ب ت

⟵ ع $\bar{ع}$ = $أ^2 + ب^2$ ⟵ $\boxed{أ^2 + ب^2 = ١٠٠}$

(٥٣) متتابعة هندسية حدها الأول ت و أساسها ت

وحدها الأخير $ت^{١٠٠} = ١$ ∴ $\boxed{ح_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}}$

$= \frac{ت - ١ \times ت}{١ - ت} = \boxed{صفر}$

حل آخر

المقدار $= ت - ١ - ت + ١ + \dots + ت^{١٠٠}$

اى ان مجموع اربع حدود متتالية = صفر وعدد الحدود ١٠٠

اى يقبل القسمة على ٤ ⟵ المقدار = صفر

---

(٥٤) م هـ فيها $أ = ١$ ، $ر = \omega$ ، $ل = \omega^{١٠٠} = \omega$

∴ $ح_ن = \frac{١ - \omega \times \omega}{١ - \omega} = \frac{١ - \omega^2}{١ - \omega} = ١ + \omega$

$= \boxed{-\omega^2}$

حل آخر

$١ + \omega + \omega^2 = صفر$

∴ مجموع ثلاث حدود متتالية = صفر ، عدد الحدود ١٠١

∴ المقدار $= \omega^{٩٩} + \omega^{١٠٠} = ١ + \omega = \boxed{-\omega^2}$

---

(٥٥) $(\omega^2 + \omega^2)(١ + \omega)^2 = ٢\omega^2 \times (-\omega^2)^2$

$= ٢\omega^2 \times \omega^4 = ٢\omega^6 = \boxed{٢}$

---

(٥٦) $(ب\omega - أ\omega)(ب\omega^2 - أ\omega^2)$ لاحظ ان $١ + \omega = -\omega^2$

$= \omega^3(ب - أ)^2 = \boxed{(أ - ب)^2}$

---

(٥٧) $(١ + ٢\omega^2 + \omega)(١ + ٢\omega + \omega^2)$

$= (-\omega^2 + ٢\omega^2)(-\omega + ٢\omega)$

$= \omega^2 \times \omega = \omega^3 = \boxed{١}$

٥٩) بوضع أ = أω² ⟸ $\frac{أω^3 - دω}{أω^2 - د} - ω^2$

$= \frac{ω\cancel{(أω^2 - د)}}{\cancel{أω^2 - د}} - ω^2 = ω - ω^2 = \boxed{\pm\sqrt{3}\,ت}$

---

٥٩) $(-ω^2)^7 = أ + بω$ ⟸ $-ω^{14} = أ + بω$

∴ $\underline{-ω^2} = أ + بω$ ⟸ $\underline{ω + 1} = أ + بω$

⟸ $(أ ، ب) = \boxed{(1 ، 1)}$

---

٦٠) $1 + ω + 1 + ω^2 + 1 + ω^3 + 1 + ω^4 + 1 + ω^5 + 1 + ω^6$

$= 6 + \underbrace{ω + ω^2 + 1}_{صفر} + \underbrace{ω + ω^2 + 1}_{صفر} = \boxed{6}$

---

٦١) سبق حلها رقم (٥٠)

٦٢) سبق حلها رقم (٥١)

٦٣) سبق حلها رقم (٥٢)

مكرر

---

٦٤) بأخذ أ عامل مشترك من ص١ ، ه من ص٢

أه $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ج & ب & أ \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = أه × صفر = $\boxed{صفر}$

---

٦٥) $1\,(\bar{ت} - \bar{ت} + ت^2 + \bar{ت}) = \boxed{2\bar{ت} + 1}$

رقم (٧٢)

٧٢) المحدد الثاني بأخذ ٥ عامل مشترك من ع١ ، ٧ من ص٢

$= 35 \begin{vmatrix} ج & ب & أ \\ و & هـ & د \\ ع & ص & س \end{vmatrix}$ ← المحدد الأول $= 35 \times 2 = \boxed{70}$

(٦٦) بضرب ص١ × جـ ، ص٢ × ب ، ص٣ × أ

∴ المحدد $= \frac{1}{أ ب جـ} \begin{vmatrix} أ ب جـ & أ & ١ \\ أ ب جـ & جـ & ١ \\ أ ب جـ & ب & ١ \end{vmatrix}$ بأخذ أ ب جـ عامل مشترك من ع١

$= \begin{vmatrix} ١ & أ & ١ \\ ١ & جـ & ١ \\ ١ & ب & ١ \end{vmatrix} = \boxed{صفر}$

---

(٦٧) ع١ + ٤ ع٢ ←

∴ $\begin{vmatrix} س & ٢س & ٣س \\ ٢س & ٥س & س \\ س & صفر & صفر \end{vmatrix} = ٩٦$

∴ س (٢س² − ١٥س²) = ٩٦

← − ١٢ س³ = ٩٦ ← س³ = − ٨

← $\boxed{س = −٢}$

(٦٨) ∵ $\frac{أ}{جاأ} = \frac{ب}{جاب} = \frac{جـ}{جاجـ} = ٢نق$

∴ المحدد $= \begin{vmatrix} \frac{٢نق جاأ}{٥} & \frac{٢نق جاب}{٧} & \frac{٢نق جاجـ}{٨} \\ جاأ & جاب & جاجـ \end{vmatrix}$

$= ٢نق \begin{vmatrix} جاأ & جاب & جاجـ \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ جاأ & جاب & جاجـ \end{vmatrix} = ٢نق × صفر$

$= \boxed{صفر}$

---

(٦٩) م = ٣ × ٢ × ٥ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} = \boxed{٣٠ م}$

عامل مشترك من الصفوف الثلاثة

(٧٠) −ع١ + ع٢ ، −ع١ + ع٣ ←

$$\begin{vmatrix} \text{جـ} - \text{ب} & \text{جـ} - \text{أ} & \text{أ} + \text{ب} \\ \text{ب} - \text{جـ} & \text{أ} - \text{جـ} & \text{جـ} \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

$$(\text{جـ} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{أ} + \text{ب} \\ ١- & ١- & \text{جـ} \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (\text{جـ} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{ب}) \times \text{صفر} = \boxed{\text{صفر}}$$

---

(٧١) ٥ (أد . أجـ − أب . أهـ) − ٦ (دهـ . أجـ − بجـ . أهـ)
+ ٧ (دهـ . أب − بجـ . أد)

من التناسب
$\frac{\text{أد}}{\text{أب}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أجـ}} = \frac{\text{دهـ}}{\text{بجـ}}$
∴ أد . أجـ = أهـ . أب
وهكذا

= ٥ × صفر − ٦ × صفر + ٧ × صفر

= $\boxed{\text{صفر}}$

---

(٧٢) سبق حلها ص ١٧

---

(٧٢) ع١ + ع٢ + ع٣ ←

$$\begin{vmatrix} \text{جـ} & ٥ & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} \\ \text{أ} & ٥ & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} \\ \text{ب} & ٥ & \text{أ} + \text{ب} + \text{جـ} \end{vmatrix}$$

$$= ٥ (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} \text{جـ} & ١ & ١ \\ \text{أ} & ١ & ١ \\ \text{ب} & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \boxed{\text{صفر}}$$

إعداد أ/ ناصر أبوزيد

قاعدة هامة

$$\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{أ} = \frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$$

(٧٤)

$$\text{لو}_{\text{ح}}\,٢ \times \text{لو}_{٢}\,٥ \times \text{لو}_{٥}\,\text{س} = ٤$$

$$\frac{\cancel{\text{لو}\,٢}}{\text{لو}\,\text{ح}} \times \frac{\cancel{\text{لو}\,٥}}{\cancel{\text{لو}\,٢}} \times \frac{\text{لو}\,\text{س}}{\cancel{\text{لو}\,٥}} = ٤$$

$$\text{لو س} = ٤\,\text{لو}\,٢ = \text{لو}\,١٦$$

$$\boxed{\text{س} = ١٦}$$

(٧٥)

$$\left(\frac{٥\omega^{٣} - ٣\omega^{٢}}{٥\omega - ٣} - \frac{٢\omega^{٣} - ٧\omega}{٢\omega^{٢} - ٧}\right)^{٢}$$

$$= \left(\frac{\omega^{٢}\cancel{(٥\omega - ٣)}}{\cancel{٥\omega - ٣}} - \frac{\omega\cancel{(٢\omega^{٢} - ٧)}}{\cancel{٢\omega^{٢} - ٧}}\right)^{٢}$$

$$= (\omega^{٢} - \omega)^{٢} = (\pm\sqrt{٣}\,\text{ت})^{٢} = \boxed{-٣}$$

تذكر أنه

$$\star\quad \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٥}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{٤}} = \frac{\text{ن} - \text{الصغير}}{\text{الكبير}} = \frac{\text{ن} - ٤}{٥}$$

تكمله من نظرية ذات الحدين

$$\frac{\text{معامل ح}_{٥}}{\text{معامل ح}_{٤}} = \frac{\text{ن} - (\text{الصغير} - ١)}{\text{الصغير}} = \frac{\text{ن} - ٣}{٤}$$

مراجعة جبر

المصفوفات

(١) المصفوفة المنفردة من بين المصفوفات التالية هي:

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

(٢) قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ منفردة هي:

(أ) -2 (ب) $-\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) 2

(٣) جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربي ماعدا:

(أ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت أ مصفوفة غير منفردة فإن $(أب)^{-1}$ تساوي:

(أ) $-أب$ (ب) $أ^{-1} ب^{-1}$ (جـ) $ب^{-1} أ^{-1}$ (د) $(ب أ)^{-1}$

(٥) من بين الأنظمة الخطية الآتية، مجموعة المعادلات المتجانسة هي:

(أ) $2س + ص = 2$ ، $س + 2ص = 2$ (ب) $س - ص = 0$ ، $3س + 2ص = 12$

(جـ) $2س + ص = 1$ ، $3س + ص = 0$ (د) $س - 2ص = 0$ ، $2س + ص = 0$

(٦) إذا كان $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ فإن $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} =$ ــــ

(أ) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(٧) رتبة مصفوفة الوحدة $2I$ هي ــــــ

(أ) ٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٨) رتبة المصفوفة $\square$ من النظام ٢×٢

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٢

إعداد أ/ ناصر أبوزيد

(٩) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$ فإن ر(أ) = ___

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(١٠) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ ك & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ وكان ر(أ) = ٢ فإن ك = ___

(أ) −٢ (ب) صفر (ج) ٢ (د) ٦

(١١) إذا كان م عدد المعادلات الخطية و ن عدد المجاهيل فإن المصفوفة الموسعة تكون على النظم

(أ) م × ن (ب) م × (ن + ١) (ج) (م + ١) × ن (د) (م + ١) (ن + ١)

(١٢) مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام ٢س − ٣ص = ٥ ، ٦س − ٩ص = ١٥ هي ___

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(١٣) عدد حلول النظام ٢س + ٥ص = ٠ ، ٢س − ع = ٠ ، ٣ص − ٢ع = ٠ هو ___

(أ) صفر (ب) الحل الصفري (ج) عدد لا نهائي عدا الحل الصفري (د) عدد لا نهائي بينها الحل الصفري

(١٤) يوجد للنظام $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \square$

(أ) الحل البديهي فقط (ب) عدد لا نهائي من الحلول بينها الحل الصفري

(ج) لا يوجد حل على الإطلاق (د) " " " عدا الحل الصفري

(١٥) قيمة س التي تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} س - 1 & 2 \\ 4 & س + 1 \end{pmatrix}$ منفردة هي ___

(أ) −٣ (ب) ٣ (ج) ±٣ (د) ٩

(١٦) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \\ 3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ فإن ر(أ) = ___

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(١٧) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ٤+ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ وكان أ × ج = ب

فإن ج = ___

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٨ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & -١١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ (ج) $\begin{pmatrix} ٤ & -١٧ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} ٦ & -٩ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

(١٨) إذا كان $أ^{-١}$ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ وكان أ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ فإن ص = ___

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٨

(١٩) إذا كان للمعادلات س + ٢ص + ٢ع = ٥ ، ٣س − ٢ص + ك ع = ١٢

، ٢س + ك ص + ٢ع = ٢ حل وحيد فإن ك ∈ ___

(أ) ح (ب) ح − {−١} (ج) ح − {١٢} (د) ح − {٢، ١٢}

(٢٠) إذا كان

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٢ & ٠ & -١ \\ ١ & -٢ & ٢ \end{pmatrix}$ فإن ر($أ^{مد}$) = ___

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

(٢١) إذا كان للمعادلتين س + ص = ٢ ، ٢س + ك ص = ٤

أكثر من حل فإن ك = ___

(أ) −٢ (ب) −١ (ج) ١ (د) ٢

(٢٢) إذا كان للمعادلات ٢س − ٢ص + ع = ٠ ، ٦س − ٥ص + ٢ع = ٠

، ٩س − ٦ص + ك ع = ٠ حلول غير الحل الصفري فإن ك = ___

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٣ (د) ٤

(٢٣) رتبة المصفوفة

أ = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ -٦ & ٤ & -٢ \\ ٩ & -٦ & ٢ \end{pmatrix}$ = ___

هدية للطالب

(أ) ٣ (ب) ٢ (ج) ١ (د) صفر

سبحان الله وبحمده ـــ سبحان الله العظيم

010 98 40 95 06
011 15 15 62 32

إجابات

١) ب لأن $\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ ٦ & -٤ \end{vmatrix} = -١٢ + ١٢ =$ صفر

٢) $\Delta =$ صفر $\Longleftarrow$

٢س + ٤ = صفر $\Longleftarrow$ $\boxed{\text{س} = -٢}$

٣) د لأن $\Delta =$ صفر أى مصفوفة منفردة

٤) $ب^{-١} أ^{-١}$ قاعده لأن أ و ب غير منفردة

٥) د لأن مصفوفة الثوابت أصفار $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$

٦) $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\Delta أ = ٤ + ١ = ٥$

$\therefore أ^{-١} = \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix} = \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

٧) ر$(I_٣) = ٣$

٨) رتبه المصفوفه الصفريه هى $\boxed{\text{صفر}}$

٩) نلاحظ ان جميع المحددات من الدرجه الثانيه مثل $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}$

= صفر $\Longleftarrow$ ر(أ) < ٢ $\Longleftarrow$ ر(أ) = ١

١٠) درجه أ = ٣ ، ر(أ) < ٣ $\Longleftarrow$ |أ| = صفر

∴ – ل (٢ – ٦) – ١ (٢ + ٦) = صفر

$\Longleftarrow$ ٤ل – ٨ = صفر $\Longleftarrow$ $\boxed{ل = ٢}$

١١) م × (ن + ١) $\boxed{ب}$

١٢) المصفوفه الموسعه $أ^* = \left(\begin{array}{cc:c} ٢ & -٣ & ٥ \\ ٦ & -٩ & ١٥ \end{array}\right)$

وهى ع النظم ٢×٢ وغير صفريه

∴ ١ ≤ ر($أ^*$) ≤ ٢ ∵ جميع محددات الدرجه الثانيه

= صفر مثلا $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٦ & ١٥ \end{vmatrix}$ = صفر ∴ ر($أ^*$) = ١

تذكر ان رتبه أ = درجه |أ| اذا كانت |أ| ≠ صفر

١٣) المعادلات متجانسة

$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٠ \\ ٢ & ٠ & ١- \\ ٠ & ٢ & ٢- \end{pmatrix}$ وهي ٣×٣ وغير صفرية

∵ ١ ≤ ر(أ) ≤ ٣

|أ| = ٢(٠+٢) − ٥(−٩−٠) = ٤٩ ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٣ ⟵ ر(أ) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ المعادلات لها الحل الصفري فقط (البديهي)

١٤) المعادلات متجانسة وعدد صفوف وهي على النظم ٢×٢

|أ| = صفر لأن ع٢ = ٢ع١ بعد أخذ ٢ عامل مشترك

$\begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٢- \end{vmatrix}$ = −٤ − ٢ = −٦ ≠ صفر ∴ $\boxed{ر(أ) = ٢}$

∴ ر(أ) أقل من عدد المجاهيل

∴ للنظام عدد لا نهائي من الحلول بجانب الحل الصفري $\boxed{ب}$

١٥)

Δ = صفر ⟵ س² − ١ − ٨ = صفر ⟸ $\boxed{س = ±٣}$

١٦)

Δ = |أ| = صفر لأن ع٢ = ع١ بعد أخذ −٢ من ع١

∴ ر(أ) < ٣ وجميع محددات الدرجة الثانية صفر

مختلف $\begin{vmatrix} ١ & ٢- \\ ٢- & ٤ \end{vmatrix}$ = صفر ∴ ر(أ) < ٢

∴ ر(أ) = $\boxed{١}$

سؤال م ص ١٠٢ به خطأ

١٧) لتوجد أ⁻¹ ⟵ |أ| = ٦ − ٥ = ١+

∴ أ⁻¹ = $\frac{١}{١+}$ $\begin{pmatrix} ٢ & ٥- \\ ١+ & ٢ \end{pmatrix}$ ∴ ع = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥- \\ ١- & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٤- \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$

∴ ع = $\begin{pmatrix} ١٧- & ٤ \\ ٧ & ١- \end{pmatrix}$

وتصحيح الخطأ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١+ & ٣ \end{pmatrix}$

(18) ∵ $\text{أ}\,\text{أ}^{-1} = I$ ∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \text{أ}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$ ∴ $\boxed{ص = 7}$

(19)

حل وحيد ← $ر(\text{أ}) = ر(\text{أ}^*) = ن$ (عدد المجاهيل)

← $|\text{أ}| \neq$ صفر ∴ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & ك \\ 2 & ك & 2 \end{vmatrix} \neq$ صفر

∴ $1(-6 - ك^2) - 2(4 - 2ك) + 3(2ك + 9) \neq$ صفر

← $ك^2 - 12ك + 12 \neq$ صفر ← $(ك - 12)(ك + 1) \neq$ صفر

← $ك \in ح - \{-1, 12\}$ $\boxed{د}$

(20)

$ر(\text{أ}) = ر(\text{أ}^*)$ ∴ $|\text{أ}| = 4 - (-5) + 3(2)$

∴ $|\text{أ}| = 15 \neq$ صفر ∴ $ر(\text{أ}) =$ درجة $|\text{أ}| = 3$

∴ $ر(\text{أ}^*) = \boxed{3}$

(21)

لها عدد لا نهائي من الحلول ← $ر(\text{أ}) = ر(\text{أ}^*) < ن$

$|\text{أ}| =$ صفر ← $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & ك \end{vmatrix} =$ صفر ← $ك - 2 =$ صفر

← $\boxed{ك = 2}$

(22)

حل وحيد $ر(\text{أ}) = ن$ ممكن يكون لها حلول غير الحل الصفري

اذا كان $ر(\text{أ}) < ن$ ← $|\text{أ}| =$ صفر

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -5 & 2 \\ 9 & -6 & ك \end{vmatrix} =$ صفر ∴ $2(-5ك + 12) + 3(6ك - 18) + 1(-36 + 45)$ ← $\boxed{ك = 3}$

أسئلة متنوعة

① في مفكوك $(2س + \frac{1}{س^2})^{10}$ أوجد قيمة الحد الخالي من س ثم أثبت أنه لا يوجد حد يشتمل على $س^5$

الحل

$ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر \left(\frac{1}{س^2}\right)^ر \times (2س)^{10-ر}$

⟸ $-2ر + 10 - ر = صفر$ ⟸ $ر = 5$

∴ $ح_6$ هو الحد الخالي من س وقيمته هي $\boxed{{}^{10}ق_5 \times 2^{5}}$

الحد المشتمل على $س^5$ مرفوض

مثال ٢

أوجد معامل $س^5$ في مفكوك $(1 - س + س^2)(1+س)^{11}$

الحل

$= (1-س)(1+س)^{11} + س^2(1+س)^{11}$

∴ $= (1+س)^{11} - س(1+س)^{11} + س^2(1+س)^{11}$

${}^{11}ق_ر (س)^ر - {}^{11}ق_ر (س)^ر \times س + {}^{11}ق_ر \times س^ر \times س^2$

$= {}^{11}ق_5 - {}^{11}ق_4 + {}^{11}ق_3$

$= 462 - 330 + 165 = \boxed{297}$

③ في مفكوك $(1+س)^{18}$ إذا كان معاملا الحدين $ح_{2ر+4}$ ، $ح_{ر-2}$ متساويين أوجد قيمة ر

الحل

${}^{18}ق_{2ر+3} (س)^{2ر+3} = {}^{18}ق_{ر-3} (س)^{ر-3}$

المعاملات متساوية ⟸ ${}^{18}ق_{2ر+3} = {}^{18}ق_{ر-3}$

⟸ $3ر = 18$ ⟸ $\boxed{ر = 6}$ أو $2ر + 3 = ر - 3$ ⟸ $ر = -6$ $\boxed{مرفوض}$

(٤) اذا كانت معاملات الحدود الرابع والخامس والسادس في مفكوك $(٢س + ص)^{ن}$ تكون متتابعة حسابية

اوجد ن

الحل

معامل $ح_٤ = {}^{ن}ق_٣ \, (٢)^{ن-٣}$ ، معامل $ح_٥ = {}^{ن}ق_٤ \, (٢)^{ن-٤}$

معامل $ح_٦ = {}^{ن}ق_٥ \, (٢)^{ن-٥}$ تكون م.ح

$\Leftarrow$ ٢ معامل $ح_٥$ = معامل $ح_٤$ + معامل $ح_٦$

$\Leftarrow ٢ \times {}^{ن}ق_٤ \, (٢)^{ن-٤} = {}^{ن}ق_٣ \, (٢)^{ن-٣} + {}^{ن}ق_٥ \, (٢)^{ن-٥}$

$\Leftarrow {}^{ن}ق_٤ \, (٢)^{ن-٣} = {}^{ن}ق_٣ \, (٢)^{ن-٣} + {}^{ن}ق_٥ \, (٢)^{ن-٥}$

بالقسمة $\boxed{(٢)^{ن-٣} \times {}^{ن}ق_٤}$

$\Leftarrow ١ = \frac{٤}{ن-٣} \times ١ + \frac{ن-٤}{٥} \times ٢^{صفر-٢} \to \frac{١}{٤}$

$\Leftarrow ١ = \frac{٤}{ن-٣} + \frac{ن-٤}{٢٠} = \frac{٨٠ + ن^٢ - ٧ن + ١٢}{٢٠(ن-٣)}$

$\Leftarrow ٢٠ن - ٦٠ = ن^٢ - ٧ن + ٩٢$

$\Leftarrow ن^٢ - ٢٧ن + ١٥٢ = صفر$

$(ن - ١٩)(ن - ٨) = صفر$

$\boxed{ن = ١٩}$ أو $\boxed{ن = ٨}$

(٥) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ اذا كان $ح_٢ = ١٧$ ، $ح_٣ \times ح_٤ = ٥٤٤$

اوجد قيمة كل من ن ، س

الحل

${}^{ن}ق_١ \, س = ١٧ \longrightarrow (١)$ ، $ن(ن-١) \, س^٢ = ٣٤$

٢ ح٢ × ح٤ = ٥٤٤

∴ ٢ × ${}^{ن}ق_١$ س^{١} × ${}^{ن}ق_٣$ س^{٣} = ٥٤٤

∴ ~~٣~~ × ن × ن(ن − ١)(ن − ٢) س^{٤} = ٥٤٤ × ~~٣!~~ ٣ ـــــ ②

من ① ، ② بالتعويض عن س^{٢}

∴ $\frac{\cancel{ن^{٢}} \cancel{(ن-١)} (ن-٢) \times (٢٤)^{٢}}{\cancel{ن^{٢}} (ن-١)^{٢}}$ = ١٠٨٨

∴ $\frac{ن - ٢}{ن - ١} = \frac{٢٢}{٢٤}$ ⟸ $\boxed{ن = ١٨}$

بالتعويض في ①

ن(ن − ١) س^{٢} = ٢٤

∴ ١٨ × ١٧ س^{٢} = ~~٢٤~~ ⟸ س^{٢} = $\frac{١}{٩}$ ⟸ $\boxed{س = \pm\frac{١}{٣}}$

---

٦) في مفكوك (س^{٢} + $\frac{١}{س}$)^{٣ن} أثبت أن

أولاً: الحد الخالي من س رتبته (٢ن + ١)

ثانياً: أوجد النسبة بين الحد الخالي من س والحد الأوسط

عند س = ١ ، ن = ٤

الحل

ح$_{ر+١}$ = ${}^{٣ن}ق_ر$ ($\frac{١}{س}$)^{ر} (س^{٢})$^{٣ن - ر}$

∴ − ر + ٦ن − ٢ر = صفر ⟸ $\boxed{ر = ٢ن}$

∴ الحد الخالي من س هو ح$_{٢ن+١}$ ⟵ أولاً

الحد الأوسط هو $\frac{٣ن + ٢}{٢}$ عند ن = ٤ ∴ الحد الأوسط هو ح٧

∴ ح٧ = ${}^{١٢}ق_٦$ ($\frac{١}{٢}$)^{٦} (١)^{٦} ، الحد الخالي هو ح٩

∴ ح٩ = ${}^{١٢}ق_٨$ ($\frac{١}{٢}$)^{٨} (١)^{٦} ∴ $\boxed{\frac{ح٩}{ح٧} = \frac{١٥}{١١٢}}$

(٧) في مفكوك $(٢س - ٢)^{١٥}$ اوجد قيم س التي تجعل

$١٢ ح_٣ + ١٠ ح_٤ + ح_٥ = \text{صفر}$

الحل

$١٢ \times {}^{١٥}ق_٢ (-٢)^٢ (٢س)^{١٣} + ١٠ \times {}^{١٥}ق_٣ (-٢)^٣ (٢س)^{١٢}$

$+ {}^{١٥}ق_٤ (-٢)^٤ (٢س)^{١١} = \text{صفر}$

بالقسمة على $\boxed{{}^{١٥}ق_٢ (-٢)^٢ (٢س)^{١١}}$

عكس قانون النسبة

$\therefore \cancel{١٢} \times \dfrac{٣}{١٥ - ٢} \times (٢س)^٢ + ١٠ (-٢)(٢س)$

$+ \dfrac{١٥ - ٣}{٤} \times (-٢)^٢ = \text{صفر}$

$\therefore ١٢س^٢ - ٦٠س + ٢٧ = \text{صفر}$

$٤س^٢ - ٢٠س + ٩ = \text{صفر}$

$(٢س - ٩)(٢س - ١) = \text{صفر}$

$\boxed{س = \frac{٩}{٢}}$ ، $\boxed{س = \frac{١}{٢}}$

---

(٨) إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $(٣س + ٢ص)^{١٣}$
متساويين فأثبت أن $\dfrac{س}{ص} = \dfrac{٢}{٣}$

الحل

رتبتا الحدان الأوسطان هما $\dfrac{١٣ + ١}{٢} = ٧ ، ٨ \Leftarrow ح_٧ ، ح_٨$

$\therefore \dfrac{ح_٨}{ح_٧} = ١ \Leftarrow \dfrac{١٣ - ٦}{٧} \times \dfrac{٢ص}{٣س} = ١$

$\Leftarrow ١ \times \dfrac{٢ص}{٣س} = ١ \Leftarrow \boxed{\dfrac{س}{ص} = \dfrac{٢}{٣}}$

$\dfrac{ن - (\text{الصغير} - ١)}{\text{الصغير}} \times \dfrac{\text{الثاني}}{\text{الأول}}$

إعداد أ / ناصر أبوزيد

⑨ إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك $(1 + س)^{ن}$ هي ٣٥ ، ٢١ ، ٧ حسب قوى س التصاعدية أوجد ن ورتب هذه الحدود

الحل

نفرض أن الحدود هي $ح_ر ، ح_{ر+1} ، ح_{ر+2}$

$$\because \frac{معامل\ ح_{ر+1}}{معامل\ ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$$

$$\Longleftarrow \boxed{5ن - 8ر = -5} \rightarrow ①$$

بمثل

$$\frac{معامل\ ح_{ر+2}}{معامل\ ح_{ر+1}} = \frac{ن - (ر+1) + 1}{ر + 1} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{ن - ر}{ر + 1} = \frac{1}{3} \Longleftarrow \boxed{3ن - 4ر = 1} \rightarrow ②$$

بحل المعادلتين معاً $\therefore ن = 7 ، ر = 5$

$\therefore$ رتب الحدود هي $ح_5 ، ح_6 ، ح_7$

⑩ أوجد معامل أكبر حد في مفكوك $(2س + 3ص)^{10}$

الحل

بفرض أن أكبر حد هو $ح_{ر+1}$ $\therefore$ هو أكبر من $ح_ر$ وأيضاً من $ح_{ر+2}$

$$\because \frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} > 1 \Longleftarrow \frac{10 - ر + 1}{ر} \times \frac{3}{2} > 1$$

$$\Longleftarrow 33 - 3ر > 2ر \Longleftarrow ر < 6,6$$

بمثل

$$\frac{ح_{ر+2}}{ح_{ر+1}} < 1 \Longleftarrow \frac{10 - ر}{ر + 1} \times \frac{3}{2} < 1$$

$$\Longleftarrow 30 - 3ر < 2ر + 2 \Longleftarrow ر > 5,6$$

$$\Longleftarrow 5,6 < ر < 6,6 \Longleftarrow \boxed{ر = 6}$$

$\therefore$ الحد السابع هو الأكبر

(١١) اثبت ان $^{ن}\text{ق}_{ر} \div {}^{ن-1}\text{ق}_{ر-1} = \frac{ن}{ر}$

ومن ذلك اثبت ان $\frac{^{25}\text{ق}_{4} + {}^{24}\text{ق}_{3}}{^{24}\text{ق}_{3} + {}^{23}\text{ق}_{2}} = \frac{58}{9}$

الحل

$$\frac{^{ن}\text{ل}_{ر}}{\lfloor ر} \div \frac{^{ن-1}\text{ل}_{ر-1}}{\lfloor ر-1}$$

$$= \frac{ن \times \cancel{^{ن-1}\text{ل}_{ر-1}}}{ر \times \cancel{\lfloor ر-1}} \times \frac{\cancel{\lfloor ر-1}}{\cancel{^{ن-1}\text{ل}_{ر-1}}} = \boxed{\frac{ن}{ر}} \longrightarrow \text{الأيمن}$$

المطلوب الثاني
بالقسمة بسطاً ومقاماً على $^{24}\text{ق}_{3}$

$$\frac{\frac{^{25}\text{ق}_{4}}{^{24}\text{ق}_{3}} + 1}{\frac{^{23}\text{ق}_{2}}{^{24}\text{ق}_{3}} + 1}$$

$$= \frac{\frac{25}{4} + 1}{\frac{3}{24} + 1} = \boxed{\frac{58}{9}} \quad \text{الأيسر}$$

---

(١٢) كم عدداً مكوناً من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧}؟
(أ) مع الاحلال (ب) بدون الاحلال

الحل

(أ) مع الاحلال والترتيب $= ن^{ر} = 7^{4} = \boxed{2401}$

(ب) بدون الاحلال والترتيب $= {}^{ن}\text{ل}_{ر} = {}^{7}\text{ل}_{4} = \boxed{840}$

ملاحظة

* اذا كان الاختيار بدون الاحلال وبدون الترتيب $= {}^{ن}\text{ق}_{ر}$

* اذا كان الاختيار مع الاحلال وبدون الترتيب $= {}^{ن+ر-1}\text{ق}_{ر}$

إعداد م / ناصر ابوزيد

(١٣) حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء اوجد عدد طرق سحب ٣ كرات حمراء أو ٢ كرة بيضاء في كل من الحالات الاتية

(أ) مع الاحلال والترتيب (ب) السحب بدون احلال مع الترتيب

(ج) السحب بدون احلال وبدون الترتيب

الحل

(أ) عدد طرق السحب $= ١٢^٣ + ٨^٢ = \boxed{١٧٩٢}$

(ب) عدد طرق السحب $= {}^{١٢}\text{ل}_{٣} + {}^{٨}\text{ل}_{٢} = \boxed{١٣٧٦}$

(ج) عدد طرق السحب $= {}^{١٢}\text{ق}_{٣} + {}^{٨}\text{ق}_{٢} = \boxed{٢٤٨}$

---

(١٤) اذا كان ${}^{ن-ر}\text{ل}_{٢} = ٩٠$ ، ${}^{ن+ر}\text{ل}_{٢} = ٣٨٠$

اوجد ن ، ر

الحل

* ${}^{ن-ر}\text{ل}_{٢} = ١٠ \times ٩ \Longleftarrow \boxed{ن - ر = ١٠} \leftarrow (١)$

${}^{ن+ر}\text{ل}_{٢} = ٢٠ \times ١٩ \Longleftarrow \boxed{ن + ر = ٢٠} \leftarrow (٢)$

بحل المعادلتين معاً $\longleftarrow \boxed{ن = ١٥}$ ، $\boxed{ر = ٥}$

تمارين

(١) اذا كان ${}^{٢ن}\text{ل}_{ن-١} : {}^{٢ن-١}\text{ل}_{ن} = ٢ : ٥$

اوجد قيمة ن

(٢) اذا كان ${}^{ن}\text{ل}_{ر} = ٦٠٤٨٠$ ، $ر! = ٧٢٠$ أوجد ن ، ر

(٣) اذا كان ${}^{ن}\text{ق}_{ر+٢} \times {}^{ن}\text{ق}_{ر} < {}^{ن}\text{ق}_{ر+١} \times {}^{ن}\text{ق}_{ر-١}$

فاثبت ان $ن < ٢ر + ١$

١٥) عبر بالصورة الجبرية والأسية عن كل مما يلي

[١] $٢(\text{جتا}\ \frac{\pi}{١٢} + \text{ت جا}\ \frac{\pi}{١٢}) \times ٢\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ \frac{\pi}{٢} - \text{ت جا}\ \frac{\pi}{٣})$

ليست على الصورة المثلثية

[٢] $\dfrac{\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ \frac{\pi}{٢} + \text{ت جا}\ \frac{\pi}{٢})}{\frac{١}{٢}\ (\text{جتا}\ \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\ \frac{\pi}{٤})}$

الحل

[١] $٢(\text{جتا}\ \frac{\pi}{١٢} + \text{ت جا}\ \frac{\pi}{١٢}) \times ٢\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ (٣٦٠ - \frac{\pi}{٢}) + \text{ت جا}\ \frac{٥\pi}{٢})$

$= ٢\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ (\frac{\pi}{١٢} + \frac{٥\pi}{٢}) + \text{ت جا}\ (\frac{\pi}{١٢} + \frac{٥\pi}{٢}))$

$= ٢\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ \frac{٣١\pi}{١٢} + \text{ت جا}\ \frac{٣١\pi}{١٢})$

$= ٢\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ ٢١٥ + \text{ت جا}\ \cancel{\frac{٣١\pi}{١٢}})$

قياس دائري

الصورة الأسية $= \boxed{٢\sqrt{٢}\ \text{ه}^{\frac{٣١\pi}{١٢}\text{ت}}}$

الصورة الجبرية $= ٢\sqrt{٢}\ (\frac{١}{\sqrt{٢}} - \text{ت} \times \frac{١}{\sqrt{٢}})$

$= \boxed{٣ - ٣\text{ت}}$

[٢] $\text{ع} = ٢\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ (\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤}) + \text{ت جا}\ (\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٤}))$

$= ٢\sqrt{٢}\ (\text{جتا}\ \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا}\ \frac{\pi}{٤})$

$= ٢\sqrt{٢}\ (\frac{١}{\sqrt{٢}} + \text{ت} \times \frac{١}{\sqrt{٢}})$

$= \boxed{٢ + ٢\text{ت}}$ الصورة الجبرية

$\text{ع} = \boxed{٢\sqrt{٢}\ \text{ه}^{\frac{\pi}{٤}\text{ت}}}$ الصورة الأسية

(١٦) أوجد في أبسط صورة $ع = \frac{1+4ت+ت^2}{2-ت-2ت^2-ت^3}$

ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة المثلثية

الحل

$$ع = \frac{\cancel{1}+4ت\cancel{-1}}{2\cancel{-ت}+2\cancel{+ت}} = \frac{4ت}{4} = ت$$

$\boxed{ط ٩٠ = ١}$

$$ع = \left(جتا\frac{\pi}{2} + ت\,جا\frac{\pi}{2}\right)$$

$$ع^{\frac{1}{2}} = \left(جتا\frac{\pi}{2} + ت\,جا\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(جتا\frac{\frac{\pi}{2}+2ن\pi}{2} + ت\,جا\frac{\frac{\pi}{2}+2ن\pi}{2}\right)$$

يوضع ن = ٠ : $ع_1^{\frac{1}{2}} = \left(جتا\frac{\pi}{4} + ت\,جا\frac{\pi}{4}\right)$

عند ن = ١ : $ع_2^{\frac{1}{2}} = جتا\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2} + ت\,جا\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}$

$ع_2^{\frac{1}{2}} = \left(جتا\frac{5}{4}\pi + ت\,جا\frac{5}{4}\pi\right)$ مرفوض لأنه $> \pi$

عند ن = -1 : $ع_2^{\frac{1}{2}} = \left(جتا\frac{\frac{\pi}{2}-2\pi}{2} + ت\,جا\frac{\frac{\pi}{2}-2\pi}{2}\right)$

$$ع_2^{\frac{1}{2}} = \left(جتا\frac{-3\pi}{4} + ت\,جا\frac{-3\pi}{4}\right)$$

---

(١٧) اثبت أن $\frac{2+5\omega+2\omega^2}{1-2\omega-4\omega^2} + \frac{2+5\omega^2+2\omega}{1-2\omega^2-4\omega} = \frac{-2}{19}$

الحل

$$الأيمن = \frac{2(1+\omega^2)+5\omega}{1-2\omega-2\omega^2-2\omega^2} + \frac{2(1+\omega)+5\omega^2}{1-2\omega^2-2\omega-2\omega}$$

$$= \frac{-2\omega+5\omega}{1+2-2\omega^2} + \frac{-2\omega^2+5\omega^2}{1+2-2\omega}$$

$= \frac{2\omega}{2-3\omega^2} + \frac{2\omega^2}{2-3\omega}$ بتوحيد المقامات

$= \frac{6\omega - 4\omega^2 + 6\omega^2 - 4\omega^4}{(2-3\omega^2)(2-3\omega)}$

$= \frac{2\omega + 2\omega^2}{9 - 6\omega - 6\omega^2 + 4\omega^3} = \frac{+2(\omega+\omega^2)}{12+6}$

$= \boxed{\frac{-2}{19}}$

(١٨) أوجد الجذور التربيعية للعدد ع $= 2 - 2\sqrt{3}$ ت في الصورة المثلثية

الحل

ل $= \sqrt{4+12} = 4$ ، ظا هـ $= \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

$\left\{\begin{array}{l} \text{س} = \text{ل جتا هـ} \\ \text{ص} = \text{ل جا هـ} \end{array}\right.$ تذكر

هـ $= 2\pi - \ldots = \frac{5\pi}{3}$ رابع

$\therefore$ ع $= 4\left(\text{جتا} \frac{5\pi}{3} + \text{ت جا} \frac{5\pi}{3}\right)$

ع$^{\frac{1}{2}} = 2\left(\text{جتا} \frac{5\pi}{3} + \text{ت جا} \frac{5\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= 2\left(\text{جتا} \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\text{ر}\pi}{2} + \text{ت جا} \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\text{ر}\pi}{2}\right)$

عند ر = ٠ ، $\boxed{\text{ع}_1^{\frac{1}{2}} = 2\left(\text{جتا} \frac{5\pi}{6} + \text{ت جا} \frac{5\pi}{6}\right)}$

عند ر = −١ ع$_2^{\frac{1}{2}} = 2\left(\text{جتا} \frac{\frac{5\pi}{3} - 2\pi}{2} + \text{ت جا} \frac{\frac{5\pi}{3} - 2\pi}{2}\right)$

$\boxed{\text{ع}_2^{\frac{1}{2}} = 2\left(\text{جتا} \frac{-\pi}{6} + \text{ت جا} \frac{-\pi}{6}\right)}$

تذكرة

$\text{سعة } \bar{ع} = - \text{ سعة } ع$

$\text{سعة }(-ع) = -\pi + \text{ سعة } ع$

$\text{سعة } \frac{1}{ع} = - \text{ سعة } ع$

(١٩) ضع العدد $ع = \frac{-٤}{١ - \sqrt{٣}\,ت}$ في الصورة المثلثية والأسية

اثبت أن

(أ) $ع^{٦}$ هو عدد حقيقي (ب) $\frac{1}{ع} = \frac{1}{٢} هـ^{\frac{٢\pi}{٣} ت}$

الحل

$$ع = \frac{-٤}{١-\sqrt{٣}\,ت} \times \frac{١+\sqrt{٣}\,ت}{١+\sqrt{٣}\,ت} = \frac{-٤ - ٤\sqrt{٣}\,ت}{١+٣}$$

$$\therefore \boxed{ع = -١ - \sqrt{٣}\,ت}$$

$ل = \sqrt{١+٣} = ٢$ ، $\text{ظا } هـ = \frac{-\sqrt{٣}}{-١} = \sqrt{٣}$

$\therefore هـ = -١٢٠^\circ$ في الربع الثالث

$$ع = ٢\left(\text{جتا}(-١٢٠^\circ) + ت \text{ جا}(-١٢٠^\circ)\right) =$$

$$ع = ٢\left(\text{جتا}\left(-\frac{٢}{٣}\pi\right) + ت \text{ جا}\left(-\frac{٢}{٣}\pi\right)\right)$$

$$ع^{٦} = ٢^{٦}\left(\text{جتا}\left(-\frac{٢}{٣}\pi\right) + ت \text{ جا}\left(-\frac{٢}{٣}\pi\right)\right)^{٦}$$

$$= ٢^{٦}\left(\text{جتا } -\frac{٢}{٣}\pi \times ٦ + ت \text{ جا } -\frac{٢}{٣}\pi \times ٦\right)$$

$$= ٢^{٦}\left(\text{جتا } -٤\pi + ت \text{ جا } -٤\pi\right)$$

$$= ٢^{٦} \times (١ + ت \times ٠) = ٢^{٦}$$ عدد حقيقي

★ $\text{سعة } \frac{1}{ع} = - \text{ سعة } ع$

$$\therefore \frac{1}{ع} = \frac{1}{٢}\left(\text{جتا } \frac{٢\pi}{٣} + ت \text{ جا } \frac{٢\pi}{٣}\right)$$

$$= \frac{1}{٢} هـ^{\frac{٢\pi}{٣} ت}$$

المحددات

إعداد م/ ناصر ابوزيد

(١) اثبت ان

$$\begin{vmatrix} \text{جـ}^3 & \text{ب}^3 & \text{أ}^3 \\ \text{جـ}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{جـ}^2 & \text{ب}^2 & \text{أ}^2 \\ \text{أب} & \text{جـأ} & \text{بجـ} \end{vmatrix}$$

الحل

الطرف الايسر

بأخذ أ ، ب ، جـ عامل مشترك من ع١ ، ع٢ ، ع٣

$$= \text{أبجـ} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{جـ}^2 \\ \frac{1}{\text{أ}} & \frac{1}{\text{ب}} & \frac{1}{\text{جـ}} \end{vmatrix}$$

بضرب أبجـ × ص٣

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}^2 & \text{ب}^2 & \text{جـ}^2 \\ \text{بجـ} & \text{جـأ} & \text{أب} \end{vmatrix} = \text{الايمن}$$

---

(٢) اثبت ان

$$\begin{vmatrix} \text{ب}^2 & \text{جـ}^2 & \text{بجـ} \\ \text{أ}^2 & \text{جـأ} & \text{جـ}^2 \\ \text{أب} & \text{أ}^2 & \text{ب}^2 \end{vmatrix} = \text{أبجـ} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

الحل

الايمن : بأخذ بجـ من ع١ ، جـأ من ع٢ ، أب من ع٣

$$= \text{بجـ} \times \text{جـأ} \times \text{أب} \begin{vmatrix} \frac{\text{ب}}{\text{أ}} & \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} & 1 \\ \frac{\text{أ}}{\text{ب}} & 1 & \frac{\text{جـ}}{\text{ب}} \\ 1 & \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} & \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} \end{vmatrix}$$

بضرب أ × ص١ ، ب × ص٢ ، جـ × ص٣

$$\Leftarrow \text{أبجـ} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = \text{الايسر}$$

٣) اثبت ان

$$\begin{vmatrix} \text{ص}+\text{س} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & ٢ & \text{ص}+٢ \\ \text{س} & \text{س}+٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٢\,\text{س}\,\text{ص}$$

الحل

$$\xrightarrow{\text{ع}_٣-\text{ع}_١-\text{ع}_٢ \text{ ، } \text{ع}_٢+\text{ع}_٣} \begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ -٦ & ٣ & \text{ص}+٢ \\ -٦ & \text{س}+٣ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow{-\text{ص}_٢+\text{ص}_٣} \begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ ٠ & -\text{س} & \text{ص} \\ -٦ & \text{س}+٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow{\text{ص}_٢+\text{ص}_١} \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢\text{ص} \\ ٠ & -\text{س} & \text{ص} \\ -٦ & \text{س}+٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٢\text{ص} \times -\text{س} \times -٦$$

$$= \boxed{١٢\,\text{س}\,\text{ص}}$$

---

٤) اثبت ان

$$\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{ع}+\text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ص}+\text{س} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع} & ٠ \\ \text{س} & ٠ & \text{ع} \end{vmatrix}$$

الحل

$$\xrightarrow{\text{ص}_١+\text{ص}_٢-\text{ص}_٣} \begin{vmatrix} ٠ & ٢\text{س} & ٢\text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ص}+\text{س} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

بأخذ ٢ عامل مشترك من ص١

$$\longrightarrow ٢ \begin{vmatrix} ٠ & \text{س} & \text{ص} \\ \text{ص} & \text{ع}+\text{س} & \text{ص} \\ \text{ص}+\text{س} & \text{ع} & \text{ع} \end{vmatrix}$$

ص٢ − ص١ ←

$$٢\begin{vmatrix} ص & س & ٠ \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ع & س+ص \end{vmatrix}$$

ص٣ − ص٢ ←

$$٢\begin{vmatrix} ص & س & ٠ \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \end{vmatrix} = \text{الأيسر}$$

⑤ اثبت أن أ ب جـ = ١ حيث أ ≠ ب ≠ جـ ،

$$\begin{vmatrix} أ^{٣}-١ & أ^{٢} & أ \\ ب^{٣}-١ & ب^{٢} & ب \\ جـ^{٣}-١ & جـ^{٢} & جـ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

الحل

بفصل المحدد لمحددين

$$\therefore \begin{vmatrix} أ^{٣} & أ^{٢} & أ \\ ب^{٣} & ب^{٢} & ب \\ جـ^{٣} & جـ^{٢} & جـ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ١ & أ^{٢} & أ \\ ١ & ب^{٢} & ب \\ ١ & جـ^{٢} & جـ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

أ، ب، جـ عوامل مشتركة ← بتبديل ع٢، ع٣

$$\therefore أ\,ب\,جـ \begin{vmatrix} أ^{٢} & أ & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ جـ^{٢} & جـ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & أ & أ^{٢} \\ ١ & ب & ب^{٢} \\ ١ & جـ & جـ^{٢} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

بتبديل ع١، ع٣ ←

$$أ\,ب\,جـ \begin{vmatrix} أ^{٢} & أ & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ جـ^{٢} & جـ & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} أ^{٢} & أ & ١ \\ ب^{٢} & ب & ١ \\ جـ^{٢} & جـ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

= بأخذ Δ عامل مشترك وهو ≠ صفر ك٢

أ ≠ ب ≠ جـ

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ} & 1 \\ \text{ب}^2 & \text{ب} & 1 \\ \text{جـ}^2 & \text{جـ} & 1 \end{vmatrix} (\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جـ} - 1) = \text{صفر}$$

$$\Leftarrow \text{أ}\,\text{ب}\,\text{جـ} - 1 \Leftarrow \boxed{\text{أ}\,\text{ب}\,\text{جـ} = 1}$$

(٦)

بدون فك المحدد اثبت ان

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^2+1 & \text{أ}\text{ب} & \text{أ}\text{جـ} \\ \text{أ}\text{ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب}\text{جـ} \\ \text{أ}\text{جـ} & \text{ب}\text{جـ} & \text{جـ}^2+1 \end{vmatrix} = \text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2+1$$

الحل

نفصل المحدد لمحددين

$$\text{الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ}\text{ب} & \text{أ}\text{جـ} \\ \text{أ}\text{ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب}\text{جـ} \\ \text{أ}\text{جـ} & \text{ب}\text{جـ} & \text{جـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \text{أ}\text{ب} & \text{أ}\text{جـ} \\ 0 & \text{ب}^2+1 & \text{ب}\text{جـ} \\ 0 & \text{ب}\text{جـ} & \text{جـ}^2+1 \end{vmatrix}$$

بأخذ أ عامل مشترك من ص١ ، ع١

$$= \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب}\text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب}\text{جـ} & \text{جـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \text{أ}\text{ب} & \text{أ}\text{جـ} \\ 0 & \text{ب}^2+1 & \text{ب}\text{جـ} \\ 0 & \text{ب}\text{جـ} & \text{جـ}^2+1 \end{vmatrix}$$

ص٢ − ب ص١ ، ص٣ − جـ ص١ وفك المحدد الثاني

$$= \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{جـ} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\left(\cancel{\text{ب}^2\text{جـ}^2} + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 + 1 - \cancel{\text{ب}^2\text{جـ}^2}\right)$$

$$= \text{أ}^2 \times 1 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 + 1$$

$$= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2 + 1 = \text{الأيسر}$$

المصفوفات

① اوجد المعكوس الضربي للمصفوفة أ حيث:

$$أ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 21 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

الحل

★ ايجاد قيمة محدد المصفوفة

∴ $|أ| = 1(-62-5) + 1(42-1) + 2(10+3)$

∴ $|أ| = -68 + 41 + 26 = \boxed{-1} \neq$ صفر

★ ايجاد مصفوفة العوامل المرافقة

$\bar{أ}_{11} = (-62-5) = -68$ ، $\bar{أ}_{12} = -(42-1) = -41$

$\bar{أ}_{21} = (10+3) = 13$ ، $\bar{أ}_{22} = -(-21-10) = 31$

$\bar{أ}_{31} = (21-2) = 19$ ، $\bar{أ}_{32} = -(5+1) = -6$

$\bar{أ}_{13} = (-1+6) = 5$ ، $\bar{أ}_{23} = -(1-4) = 3$

$\bar{أ}_{33} = (-2+2) = -1$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة م $= \begin{pmatrix} -68 & -41 & 13 \\ 31 & 19 & -6 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

★ ايجاد المصفوفة الملحقة

$أ^{مل} = م^{مد} = \begin{pmatrix} -68 & 21 & 5 \\ -41 & 19 & 2 \\ 12 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

★ ايجاد $\boxed{أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} أ^{مل}}$

∴ $أ^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -68 & 21 & 5 \\ -41 & 19 & 2 \\ 12 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & -21 & -5 \\ 41 & -19 & -2 \\ -12 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(٢) احسب مرتبة المصفوفة
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$
ومن ثم اثبت ان المعادلات

٢س − ص − ٢ع = ٣ ، س + ٢ص + ع = ١ ، ٢س − ٥ص + ٢ع = ١٢

لها حل وحيد واوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

الحل

|أ| = ٢ (٤ + ٥) + ١ (٢ − ٣) − ٣ (− ٥ − ٦) = ٥٠ ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٣

المصفوفة الموسعة أ*
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 12 \end{array}\right)$$

ر(أ*) = ٣ ∴ ر(أ) = ر(أ*) = عدد المجاهيل = ٣

∴ المعادلات لها حل وحيد

نوجد المعكوس الضربي
$$أ^{-1} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 12 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 12 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ١

---

(٢) بين ان للمعادلات الاتية عدداً لانهائياً من الحلول واكتب صورة الحل

س + ٢ص + ٢ع = ٠ ، ٢س + ٢ص + ٥ع = ٠ ، ٢س − ص + ٢ع = ٠

المعادلات متجانسة

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٢ & −١ & ٣ \end{pmatrix}$$

ع١ ، ع٢ ، ع٣

$$|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٣ & ٥ \\ ٢ & −١ & ٢ \end{vmatrix} = صفر$$

∴ ر(أ) < ٣

$$\because \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٣ − ٤ = −١ \neq صفر$$

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٢ < عدد المجاهيل

∴ للمعادلات عدد لا نهائي من الحلول

لإيجاد صورة الحل نضع س = ل والتعويض في ①

ل + ٢ص + ٣ع = ٠ ← ① بالتعويض في المعادلة ③

∴ ٣ل − ص + ٢ع = ٠ ← ② نضرب ② × ٢ والجمع ①

∴ ٧ل + ٧ع = ٠ ← $\boxed{ع = −ل}$ بالتعويض في ①

∴ ل + ٢ص − ٣ل = ٠ ⟸ $\boxed{ص = ل}$

∴ صورة الحل هو (ل ، ل ، −ل)

---

④

ابحث إمكانية حل المعادلات الآتية واكتب الحل إن وجد

س + ص = ٢ ، ٢س + ٢ص = ٥

الحل

المعادلة المصفوفية

$$\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$$

$أ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow |أ| = 3 - 2 = 1 \neq$ صفر

∴ $ر(أ) = 2$

$\overset{*}{أ} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$ الموسعة

$ر(\overset{*}{أ}) = 2 \Leftarrow ر(أ) = ر(\overset{*}{أ}) = 2 =$ عدد المجاهيل

∴ يوجد حل وحيد للمعادلة ونوجد $أ^{-1}$

$أ^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ س = ١ ، ص = ١ ∴ م.ح = {(١ ، ١)}

---

⑤ إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 0 & 2ص & ع \\ س & ص & -ع \\ س & -ص & ع \end{pmatrix}$ وكانت $أ^{مد} = أ^{-1}$

أوجد س ، ص ، ع

الحل

∴ $أ^{مد} = أ^{-1}$ بالضرب × أ من اليسار

∴ $أ^{مد}\, أ = I$

∴ $\begin{pmatrix} 0 & س & س \\ 2ص & ص & -ص \\ ع & -ع & ع \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2ص & ع \\ س & ص & -ع \\ س & -ص & ع \end{pmatrix} = I$

$$\therefore \begin{pmatrix} ٢س^2 & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٦ص^2 & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٢ع^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

بالمقارنة

$\Leftarrow$ $٢س^2 = ١$ ، $٦ص^2 = ١$ ، $٢ع^2 = ١$

$س = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $ص = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$ ، $ع = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

---

(٦) أوجد قيمة ك التي تجعل للمعادلات ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ١ ، س + ص + ك ع = ١
عدد غير منتهٍ من الحلول

الحل

$$\begin{pmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$$

عدد المجاهيل

للمعادلات عدد غير منتهٍ من الحلول $\Leftarrow$ ر(أ) = ر($أ^*$) < ن

Δ = صفر $\Leftarrow$ (ك − ١) (ك² + ك − ٢) = صفر

∴ ك = ١ أو ك = −٢

١ ≤ ر(أ) < ٣

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$$

جميع محددات أ والدرجة الثانية = صفر ∴ ر(أ) = ر($أ^*$) = ١

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول عند ك = ١

$$\therefore أ = \begin{pmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{pmatrix}$$

جميع محددات الدرجة الثانية ≠ صفر

∴ ر(أ) = ٢

وكذلك $|أ^*|$ ≠ صفر

∴ ر(أ) ≠ ر($أ^*$) ~~لاحظ عدد~~

لابد ر($أ^*$) = ٣

∴ لا يوجد حل عند ك = −٢

مراجعه الهندسة الفراغية

رضا

① بعد النقطة (٢، -١، ٢) عن المستوى س ع هو ---- واحد

(أ) ٢ (ب) -١ (ج) ٢ (د) ١

② طول العمود المرسوم من (-٣، ٢، ٤) على محور س = ---

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ٤

③ إحداثيات منتصف القطعة التي طرفاها (-٣، ٢، ٤)، (٥، ١، ٨)

هي (أ) (١، $\frac{٣}{٢}$، ٦) (ب) (٣، -١، ٤) (ج) (٨، -١، ٤) (د) (١، $\frac{٣}{٢}$، ٢)

④ إذا كان أ (٧، -١، ٨)، ب (١١، ٢، -٤) فإن أب = ---

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (ج) ١٥ (د) ١٤

⑤ معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ هي

(أ) س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٥ (ب) س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٠

(ج) (س-٠)^٢ + (ص-٠)^٢ + (ع-٠)^٢ = ٥ (د) س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢٥

⑥ معادلة الكرة التي مركزها (٢، -٣، ٤) وتمس المستوى س ص هي

(أ) (س-٢)^٢ + (ص+٣)^٢ + (ع-٤)^٢ = ٤ (ب) (س-٢)^٢ + (ص+٣)^٢ + (ع-٤)^٢ = ٩

(ج) (س-٢)^٢ + (ص+٣)^٢ + (ع-٤)^٢ = ١٦ (د) (س+٢)^٢ + (ص-٣)^٢ + (ع+٤)^٢ = ١٦

⑦ إذا كان $\vec{أ}$ = (-٢، ل، ١) وكان $\|\vec{أ}\|$ = ٢ فإن ل = ---

(أ) ٤ (ب) -٤ (ج) ±٢ (د) $\sqrt{١٤}$

⑧ إذا كان $\vec{أ}$ = (-٢، ٤، ٦)، $\vec{ب}$ = (٠، ل، ٢) حيث ل ∈ ص+

وكان $\|\vec{أب}\|$ = ٧ فإن ل = ---

(أ) ١٠ (ب) ٨ (ج) ٦ (د) ٤

⑨ إذا كان $\vec{أ}$ = (-١، ٥، -٢)، $\vec{ب}$ = (٢، ١، ١) وكان $\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ + $\vec{ج}$ = $\vec{و}$

فإن $\vec{ج}$ = --- (أ) $\vec{س}$ + ٦$\vec{ص}$ - $\vec{ع}$ (ب) -$\vec{س}$ - ٦$\vec{ص}$ + $\vec{ع}$

(ج) $\vec{س}$ + ٤$\vec{ص}$ - ٢$\vec{ع}$ (د) $\vec{س}$ + ٤$\vec{ص}$ - $\vec{ع}$

(١٠) إذا كانت ٢٠° ، ٧٠° ، θ هي زوايا الاتجاه لمتجه فإن إحدى قيم θ = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ٨٠° (ج) ٢٦٠° (د) ٢٥٥ و ٩٢°

(١١) جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه أ = (-٢ ، ١ ، ٢) هي ...

(أ) (-٢ ، ١ ، ٢) (ب) (-٢/٣ ، ١/٣ ، ٢/٣) (ج) (-٥/٢ ، ٥ ، ٥/٢) (د) (-١ ، ١ ، ١)

(١٢) سَ × صَ = ...

(أ) وَ (ب) ٠ (ج) ١ (د) عَ

(١٣) إذا كان أ ، ب متجهي وحدة متعامدين فإن حاصل الضرب القياسي (أ - ٢ب) . (٢أ + ٥ب) = ...

(أ) -٨ (ب) -٧ (ج) ٢٤ (د) ١

(١٤) إذا كان أ ، ب متجهي وحدة فإن أ . ب ∈ ...

(أ)]٠ ، ١[(ب)]-١ ، ١[(ج) [-١ ، ١] (د) ح+

(١٥) قياس الزاوية بين المتجهين (٢ ، -٢ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤) هو

(أ) ٢٠و٥٧° (ب) ٢٦و٢٥° (ج) ١٢٤و٢٧° (د) ٠°

(١٦) إذا كان المتجهان (٢ ، ل ، -٢) ، (٤ ، ٦ ، -٦) متوازيين فإن ل = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (ج) -٢ (د) ١

(١٧) المستقيمان سَ سَ′ ، عَ عَ′ يكونان مستوى الإحداثيات معادلته ...

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (ج) ع = ٠ (د) ص = ٢

(١٨) معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٢ ، -١ ، ٢) هي

(أ) س² + ص² + ع² = ٤ (ب) (س - ٢)² + (ص + ١)² + (ع - ٢)² = ١٤

(ج) (س - ٢)² + (ص + ١)² + (ع - ٢)² = √١٤ (د) س² + ص² + ع² = ١٤

(١٩) إذا كان أ // ب فإن || أ × ب || = ...

(أ) صفر (ب) ١ (ج) || أ || (د) || ب ||

(٢٠) المتجه الذي يمثل متجه وحدة من المتجهات الآتية :

(أ) (-٢ ، ٢ ، ٢) (ب) (١/٢ ، ١/٣ ، ١/٤) (ج) (٣/٥ ، ٤/٥ ، ٠) (د) (١/١٢ ، ٢/١٢ ، ٢/١٢)

(٢١) إذا كانت ل ، م ، هـ ، و هي جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه أ فإن

(أ) ل + هـ + و = ١ (ب) ل = هـ = و (جـ) ل² + هـ² + و² = ١ (د) ل + هـ + و = ||أ||

(٢٢) إذا كان أ × ب = و ، أ · جـ = ٠ فإن ب · جـ = ___

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) أ (د) ||ب||

(٢٣) إذا كان أ = ٤س - ٢ص + ٥ع فإن مركبة أ في اتجاه محور ص = ___

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) -٢

(٢٤) إذا كان أ = (٢ ، ٢ ، -١) ، ب = (٣س + ٤ص) فإن مركبة أ في اتجاه ب = ___

(أ) ١٨ (ب) $\frac{١٨}{٥}$ (جـ) $-\frac{١٨}{٥}$ (د) $\frac{١٨}{٢٥}$

(٢٥) قياسات زوايا الاتجاه له ٤٥° ، ٤٥° ، θ فإن θ = ___°

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) صفر (د) ٦٠

(٢٦) أي من النقط تقع في المستوى ٢س + ٢ص - ع = ٥

(أ) (١ ، ١ ، ١) (ب) (١ ، ٢ ، ٠) (جـ) (٠ ، ٢ ، ١) (د) (٢ ، ٢ ، -١)

(٢٧) المستوى ٢س - ٣ص + ٤ع = ١٢ يقطع من محور س جزء طوله ___

(أ) ٣ (ب) -٤ (جـ) ٤ (د) ٦

(٢٨) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات بواسطة المستوى س + ٥ص - ٦ع = ٢٠ هي م ، ن ، هـ فإن م + ن + هـ = ___

(أ) صفر (ب) ٢٠ (جـ) ٢١ (د) ٤١

(٢٩) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) ويوازي محوري الإحداثيات س ، ص هي ___

(أ) س + ص = ٢ (ب) ع = ٢ (جـ) س = ١ (د) ص = ٢

(٣٠) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، -٢ ، ٥) والمتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودي عليه هي ___

(أ) ٢س + ص + ٣ع = ١ (ب) ٣س + ص + ٢ع = ١٥ (جـ) س - ٢ص + ٥ع = ١٥ (د) س + ص + ع = ٤

(٢١) معادلة المستوى المار بالنقط (٢، ٢، ٥) ، (−١، ٣، ١) ، (٤، ٢، −٢) هي ____

أ) س + ص + ع = ٠ ب) س = −١ ج) ص = ٢ د) ع = −٢

(٢٢) معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(−١، ١، ٢) والمتجه ى = (١، −١، ٢) متجه اتجاه له هي ____

أ) $\frac{س-1}{2} = \frac{ص}{1} = \frac{ع-1}{-1}$ ب) $\frac{س+1}{1} = \frac{ص}{-1} = \frac{ع-2}{2}$

ج) $\frac{س-1}{2} = \frac{ص}{-1} = \frac{ع}{1}$ د) $\frac{س-1}{1} = \frac{ص-1}{-1} = \frac{ع}{2}$

(٢٣) معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ(١، −١، ٢) ، ب(−١، ٠، ١) هي

أ) $\frac{س-1}{2} = \frac{ص+1}{-1} = \frac{ع-2}{1}$ ب) $\frac{س+1}{2} = \frac{ص}{1} = \frac{ع-1}{-1}$

ج) $\frac{س-2}{2} = \frac{ص+1}{2} = \frac{ع-1}{2}$ د) $\frac{س-1}{1} = \frac{ص+1}{2} = \frac{ع-2}{1}$

(٢٤) قياس الزاوية بين المستقيمين $\frac{س-2}{2} = \frac{ع+1}{2}$ ، ص = ١ و $\frac{س+1}{1} = \frac{ص-2}{2} = \frac{ع+1}{-2}$ = ____

أ) ١٥ ب) ٢٠ ج) ٤٥ د) ٦٠°

(٢٥) إذا كان المستقيمين $\frac{س}{2} = \frac{ص-1}{-1} = \frac{ع-2}{م}$ ، $\frac{س-1}{م} = \frac{ص-2}{1} = \frac{ع}{-1}$ متعامدين فإن م = ____

أ) −١ ب) ٢ ج) ١ د) −٢

(٢٦) إذا كان المستقيمان ل١: س = ٢ك − ١ ، ص = ك + ١ ، ع = ك − ١
ل٢: س = أك + ١ ، ع = بك − ٢ ، ص = ٢ك + ١
متوازيين فإن أ + ب = ____

أ) ٤ ب) −٢ ج) ٦ د) −٢

(٢٧) إذا قطع المستوى $\frac{س}{4} + \frac{ص}{2} + \frac{ع}{2} = 1$ محاور الإحداثيات في أ ، ب ، ج فإن مساحة Δ أ ب و = ____

أ) ١٢ ب) ١٠ ج) ٦ د) ٤

(٣٨) طول العمود من النقطة (٢، ٢، ١) إلى المستوى ٢س − ٢ص + ع = ٥ هو ____
(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

(٣٩) معادلة خط تقاطع المستويين ل١ : ٢س − ص + ع − ١ = ٠ ، ل٢ : س − ٢ص + ع + ٢ = ٠ هي ____
(أ) (س+١)/(−١) = ص/٢ = ع/٢ (ب) (س−٢)/(−٢) = ص/١ = (ع+٥)/٥
(ج) (س−٢)/١ = (ص−٢)/٣ = ع/١ (د) (س−٢)/٤ = (ص−١)/٣ = ع/٥

(٤٠) النقطة التي تقع على المستقيم ر = (٢، −١، ٢) + ك(١، ٢، −١)
(أ) (١، ١، ١) (ب) (٠، ٢، −٢) (ج) (٢، ١، ٣) (د) (٤، −٢، ٠)

(٤١) المسافة بين المستويين ص = ٤ ، ص = −٢ هي
(أ) ٢ وحدات (ب) وحدتان (ج) ٦ وحدات (د) ٨ وحدات

(٤٢) س² + ص² + ع² + ٤س − ٦ص + ٨ع + ٤ = ٠
معادلة كرة طول قطرها = ____ سم
(أ) ٥ (ب) ١٠ (ج) ١٥ (د) ٢٠

(٤٣) إذا كان ل١ : (س−٢)/١ = (ص+٢)/٢ = (ع+١)/(−٤) يوازي المستقيم
ل٢ : (س+٥)/(−٣) = (ص+٠)/(ك+١) = (ع−١)/٨ فإن ك = ____
(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٦

(٤٤) إذا كانت س² + ص² + ع² + ٦س − ٤ص + ١٠ع − ٨ = ٠
معادلة كرة مركزها م فإن م = ____
(أ) (−٣، ٢، −٥) (ب) (٤، −٢، −٥) (ج) (−٣، −٢، −٥) (د) (٣، ٢، ٥)

(٤٥) إذا كان (س−٢)/٢ = (ص−١)/٦ = ع/ل يوازي (س+٢)/٦ = (ص−٤)/م = (ع−١)/٣
فإن ل + م = ____
(أ) −١٧ (ب) −١٠ (ج) ١٠ (د) ١٧

(٤٦) إذا كان أ = (−١، ٢، ٤) ، ب = (٠، −٢، ٥) فإن ||أب|| = ____
(أ) $3\sqrt{2}$ (ب) $2\sqrt{2}$ (ج) $4\sqrt{2}$ (د) $5\sqrt{2}$

(٤٧) إذا كان $\frac{س+٢}{-١} = \frac{ص+٢}{٢} = \frac{ع+٥}{٢}$ عمودي على $\frac{س-٣}{٢} = \frac{ص-ب}{ل} = \frac{ع-٦}{م}$

فإن ٢ل + ٣م = ____ ~~أ ... ب ١٠ جـ ١٢٠ د ١٥٠~~

أ -١ ب صفر جـ ٢ د ٤

(٤٨) إذا كان $\vec{أ} = (-٧، ٢، ١)$، $\vec{ب} = (-٤، -١، -٢)$ فإن متجه الوحدة في اتجاه $\vec{أب}$ = ____

أ $(\frac{٢}{١٢}، \frac{٤}{١٢}، \frac{١٢}{١٢})$ ب $(\frac{٢}{١٢}، \frac{-٤}{١٢}، \frac{-١٢}{١٢})$ جـ $(\frac{٣}{١٢}، \frac{٤}{١٢}، \frac{١٢}{١٢})$ د $(\frac{٣}{١٢}، \frac{٤}{١٢}، \frac{-١٢}{١٢})$

(٤٩) إذا كان $\vec{أ} = (١، -١، ٢)$، $\vec{ب} = (٢، -٢، ١)$،

$\vec{جـ} = (٠، ٢، ٤)$ فإن $\vec{أ} \cdot \vec{ب} \times \vec{جـ}$ = ____

أ ١٠ ب ١٢ جـ ١٤ د ١٦

(٥٠) طول العمود المرسوم من أ(١، ٠، ٢) على المستقيم

$\frac{س-٢}{٢} = \frac{ص+١}{-١} = \frac{ع-٢}{-٢}$ = ____

أ $\frac{\sqrt{٢٦}}{٤}$ ب $\frac{\sqrt{٢٦}}{٥}$ جـ $\frac{\sqrt{٢٦}}{٢}$ د $\frac{\sqrt{٢٦}}{٦}$

(٥١) قياس الزاوية المحصورة بين المستويين س + ص - ١ = ٠

، ص + ع - ١ = ٠ يساوي ____

أ ٢٠ ب ٤٥ جـ ٦٠ د ٧٥

(٥٢) إذا كان $\vec{أ} = (٣، ١، -٢)$ ، $\vec{أ} + \vec{ب} = \vec{أ} \times \vec{ب}$ فإن $\vec{ب}$ = ____

أ (٢، -١، -٢) ب (٣، ١، -٢) جـ (٣، -١، -٢) د (٢، -١، -٢)

(٥٣) إذا كان $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ ، $\vec{أ} \perp \vec{جـ}$ وكان $\vec{ب} = (٣، ٢، ٢)$

، $\vec{جـ} = (١، ٢، ١)$ وكان $\|\vec{أ}\| = ٤\sqrt{٢}$ فإن $\vec{أ}$ = ____

أ (٢، ٢، ١) ب (-٤، ٠، ٤) جـ (٤، ٤، ٠) د (٠، -٤، ٤)

(٥٤) طول العمود المرسوم بين المستويين

٢س + ١٢ص + ٤ع = ٩ ، ٢س + ١٢ص - ٤ع = -١٧ = ____

أ ٢ ب ٣ جـ ٤ د ٥

(٥٥) إذا كان $\overline{أ} = (٤ ، ل ، ٦)$ ، $\overline{ب} = (٢ ، ٢ ، م)$
وكان $\overline{أ} // \overline{ب}$ فإن ل + م = ___

أ) −٢ ب) −٢ جـ) −١ د) صفر

(٥٦) إذا كان المستقيم س = ٢ص = أع يوازي
المستوى س + ٢ص + ٢ع + ٤ = ٠ ، فإن أ = ___

أ) ٢ ب) ٢ جـ) ١ د) −١

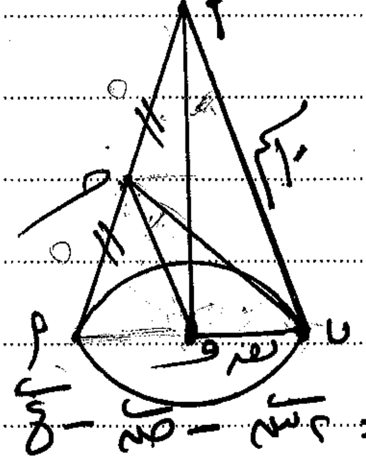
(٥٧) إذا كان $\overline{أ} = (١ ، −٢ ، ١)$ ، $\overline{ب} = (−٢ ، ١ ، ٢)$ فإن
متجه اتجاه $\overline{أ}$ في اتجاه $\overline{ب}$ = ___

أ) $(\frac{٤}{٩} ، \frac{-٢}{٩} ، \frac{-٤}{٩})$ ب) $(\frac{٤}{٩} ، \frac{٢}{٩} ، \frac{٤}{٩})$ جـ) $(\frac{-٤}{٩} ، \frac{-٢}{٩} ، \frac{-٢}{٩})$ د) $(\frac{٤}{٩} ، \frac{-٢}{٩} ، \frac{-٤}{٩})$

(٥٨) أ ب جـ د متوازي أضلاع وكان $\overline{أب} = (٢ ، ٣ ، −١)$
، $\overline{أد} = (−١ ، ٢ ، −٢)$ فإن مساحة متوازي الأضلاع = ___ سم²

أ) ٦ ب) $٧\sqrt{٦}$ جـ) $٢\sqrt{١١}$ د) $\sqrt{١٤٩}$

(٥٩) في الشكل المقابل
مخروط دائري قائم محيط قاعدته = ١٢π سم
و هـ ينصف أم فإن $\overline{ب هـ} \cdot \overline{هـ و}$ = ___

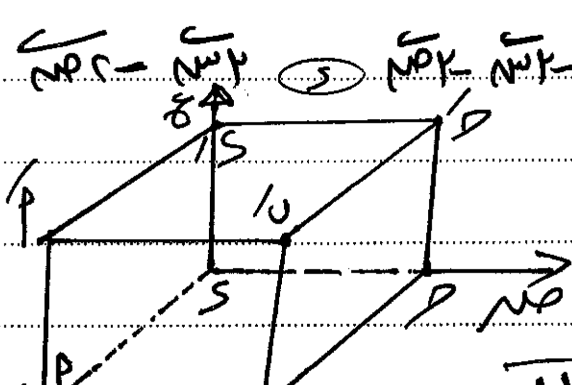


أ) −٤٢ ب) −٤٤
جـ) −٢٧ د) −٢٢

(٦٠) إذا كان $\overline{أ} = \overline{س} + \overline{ص} + \overline{ع}$ ، $\overline{ب} = ٢\overline{س} - \overline{ص} - \overline{ع}$
فإن $\overline{أ} \times (\overline{أ} - \overline{ب}) = $ ___

أ) $\overline{س} + \overline{ع}$ ب) $-٢\overline{ص} + ٢\overline{ع}$ جـ) $-٢\overline{س} - ٢\overline{ص}$ د) $٢\overline{س} - ٢\overline{ص}$

(٦١) في الشكل متوازي مستطيلات فيه
أ(٤ ، ٠ ، ٠) ، جـ(٠ ، ٩ ، ٠) ،
دَ(٠ ، ٠ ، ٧) ، فإن ‖$\overline{أجَ}$‖ = ___



أ) $\sqrt{١٤٦}$ ب) ٥ جـ) $\sqrt{٣٠}$ د) $\sqrt{١١٤}$

إجابة اختبر

① بعد (٢ ، -١ ، ٢) عن المستوى س ع هو |ص| = $\boxed{١}$

② البعد عن س = $\sqrt{ص^٢ + ع^٢}$ = $\sqrt{٩+١٦}$ = $\boxed{٥}$

③ $\left(\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{٢+١}{٢} ، \frac{٤+٨}{٢}\right)$ = $\boxed{\left(١ ، \frac{٣}{٢} ، ٦\right)}$

④ أب = $\sqrt{(٧-١١)^٢ + (-١-٢)^٢ + (٨+٤)^٢}$ = $\boxed{١٢}$ وحدة

---

⑤ $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ٢٥$

⑥ ماس للمستوى س ص ⟸ نق = |ع| = ٤

$(س-٢)^٢ + (ص+٢)^٢ + (ص-٤)^٢ = ١٦$

⑦ $\sqrt{٤ + ل^٢ + ١}$ = ٣ ⟸ $ل^٢ + ٥ = ٩$

⟸ $ل^٢ = ٤$ ⟸ $\boxed{ل = \pm ٢}$

⑧ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٠ ، ل ، ٣) - (-٢ ، ٤ ، ٦) = (٢ ، ل-٤ ، -٣)

$\|\overrightarrow{أب}\|$ = ٧ ⟸ $\sqrt{٤ + (ل-٤)^٢ + ٩}$ = ٧

⟸ $(ل-٤)^٢ + ١٢ = ٤٩$ ⟸ $(ل-٤)^٢ = ٣٦$

∴ ل - ٤ = ٦ ⟸ $\boxed{ل = ١٠}$ | ∴ ل - ٤ = -٦ ⟸ $\boxed{ل = -٢}$ مرفوض

---

⑨ (-١ ، ٥ ، -٢) + (٢ ، ١ ، ١) + $\overrightarrow{ح}$ = (١ ، ٠ ، ٠)

⟸ (٢ ، ٦ ، -١) + $\overrightarrow{ح}$ = (١ ، ٠ ، ٠)

⟸ $\overrightarrow{ح}$ = (-١ ، -٦ ، ١) = $-\overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

⑩ جتا²٢٠ + جتا²٧٠ + جتا²θ = ١

$\frac{٣}{٤}$ + ١٢و٠ + جتا²θ = ١ ⟸ θ = ٢٠٠و٨٢°

(١١) $\|\vec{أ}\| = \sqrt{٤+١+٤} = ٣$

⟸ جيوب تمام الاتجاه $\vec{أ} = \left(\frac{-٢}{٣} ، \frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣}\right)$

(١٢) $\vec{س} \times \vec{ص} = \vec{ع}$

$\vec{س} \to \vec{ص} \to \vec{ع}$

(١٣) $٣ - ١٠ = \boxed{-٧}$

(١٤) $[-١ ، ١ ، ١]$ عندما $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ متجهي وحده

---

(١٥) $\|\vec{أ}\| = \sqrt{٤+٤+٤} = ٢\sqrt{٣}$

$\|\vec{ب}\| = \sqrt{١+١+١٦} = ٣\sqrt{٢}$

$$جتا\, هـ = \frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\|\,\|\vec{ب}\|} = \frac{٢-٢+٨}{٢\sqrt{٣} \times ٣\sqrt{٢}}$$

$$جتا\, هـ = \frac{٨}{٦\sqrt{٦}} \Longleftarrow ق(\hat{هـ}) = \boxed{٥٧,٠٢^\circ}$$

(١٦) $\vec{أ} \parallel \vec{ب} \Longleftarrow \frac{٢}{٤} = \frac{ك}{٦} = \frac{-٣}{-٦}$

$\Longleftarrow ك = \frac{١٢}{٤} = \boxed{٣}$

(١٧) المستوى الناتج س ع معادلته ص = ٠

(١٨) نق $= \sqrt{٩+١+٤} = \sqrt{١٤}$

∴ المعادلة $\boxed{س^٢ + ص^٢ + ع^٢ = ١٤}$

(١٩) $\vec{أ} \parallel \vec{ب} \Longleftarrow \vec{أ} \times \vec{ب} =$ صفر

(٢٠) $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{-٤}{٥} ، ٠\right)$ هو متجه وحده لأن $\sqrt{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} + ٠} = ١$

---

(٢١) $ل^٢ + م^٢ + ن^٢ = ١$ قاعده $جتا^٢ θ_١ + جتا^٢ θ_٢ + جتا^٢ θ_٣ = ١$

(٢٢) $\vec{أ} \parallel \vec{ب}$ ، $\vec{أ} \perp \vec{د} \Longleftarrow \vec{ب} \perp \vec{د}$

$\Longleftarrow \vec{ب} \cdot \vec{د} =$ صفر

(٢٣) مركبة $\overline{A}$ في اتجاه محور ص هي $\boxed{-٣}$ سريله

(٢٤) مركبة $\overline{A}$ في اتجاه $\overline{ب}$

$A_ب = \frac{\overline{A} \cdot \overline{ب}}{\|\overline{ب}\|}$ أو $\|\overline{A}\|$ جتا هـ

$= \frac{٦ + ١٢ - ٠}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \boxed{\frac{١٨}{٥}}$

(٢٥) جتا٢ ٤٥ + جتا٢ ٤٥ + جتا٢ هـ = ١

$\Leftarrow \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} +$ جتا٢ هـ = ١ $\Leftarrow$ جتا٢ هـ = صفر

$\Leftarrow \boxed{هـ = ٩٠}$

---

(٢٦) نعوض بالنقط فنجدها (٠، ٦، ٢، ١) تحقق معادلة المستوى ∴ هـ اليه

(٢٧) نوضع ص = ٠ ، ع = ٠

$\Leftarrow$ ٢ س = ١٢ $\Leftarrow$ $\boxed{س = ٤}$ الجزء المقطوع

(٢٨) بالقسمة على ٣٠

$\Leftarrow \frac{س}{٢٠} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{-٥} = ١$

∴ أ + ب + ج = ٢٠ + ٦ − ٥ = $\boxed{٣١}$

(٢٩) ع = ٣ المستوى يوازي محوري س ، ص

---

(٣٠) الصورة الكارتيزية أ (س − س١) + ب (ص − ص١) + جـ (ع − ع١) = ٠

∴ ٢ (س − ١) + ١ (ص + ٢) + ٢ (ع − ٥) = ٠

الصورة العامة

٢ س − $\cancel{٢}$ + ص + $\cancel{٢}$ + ٢ ع − ١٠ = ٠

$\Leftarrow$ ٢ س + ص + ٢ ع = ١٠

تذكر فضل الله عليك في جميع نعمه

(٢١) نفرض ان النقط هي أ ، ب ، جـ

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (-٢ ، ٠ ، -٤)$

$\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، ٠ ، -٧)$

$\frac{-٢}{٢} \ne \frac{-٤}{-٧}$ ⟸ أ ، ب ، جـ ليست على استقامة واحدة

نوجد $\overrightarrow{\text{ن}}$ (متجه العمودي على المستوى)

$$\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٢ & ٠ & -٤ \\ ٢ & ٠ & -٧ \end{vmatrix} = -٢٩\overrightarrow{\text{ص}}$$

∴ الصوره العامه هي

$$\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س ، ص ، ع}) \cdot (٠ ، -٢٩ ، ٠)$$

$$\therefore \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = (٠ ، -٢٩ ، ٠) \cdot (٢ ، ٣ ، ٥)$$

$$= ٠ - ٨٧ + ٠ = -٨٧$$

⟸ المعادله هي

$-٢٩\,\text{ص} = -٨٧$ ⟸ $\boxed{\text{ص} = ٣}$

(٢٣) المعادله هي $\frac{\text{س} - \text{س}_١}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_١}{\text{جـ}}$

$$\therefore \boxed{\frac{\text{س} + ١}{١} = \frac{\text{ص}}{-١} = \frac{\text{ع} - ٢}{٢}}$$

(٢٤)

$$\text{جتا هـ} = \frac{|\overrightarrow{\text{هـ}_١} \cdot \overrightarrow{\text{هـ}_٢}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}_١}\|\,\|\overrightarrow{\text{هـ}_٢}\|} = \frac{|(٢ ، \text{صفر} ، -٢) \cdot (١ ، ٢ ، -٢)|}{\sqrt{٤ + ٠ + ٤} \times \sqrt{١ + ٤ + ٤}}$$

$$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{٢ + ٤ + ٠}{\sqrt{٨} \times \sqrt{٩}} = \frac{٦}{٦\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$\therefore \boxed{\text{هـ} = ٤٥}$

لاحظ تركيب متجه اتجاه المستقيم الاول

إعداد م / ناصر ابوزيد

(٢٤) متجه الاتجاه = (−١ ، ١ ، ٠ ، ١) − (١ ، −١ ، ٢) = (−٢ ، ١ ، −١)

∴ معادلته هي * $\frac{\text{س} - 1}{-2} = \frac{\text{ص} + 1}{1} = \frac{\text{ع} - 2}{-1}$

بالضرب × −١

$$\boxed{\frac{\text{س} - 1}{2} = \frac{\text{ص} + 1}{-1} = \frac{\text{ع} - 2}{1}}$$

(٢٥) (٢ ، −١ ، م) · (م ، ١ ، −١) = صفر

٢م − ١ − م = صفر ⟵ $\boxed{\text{م} = 1}$

(٢٦) معادلته هي $\frac{\text{س} + 1}{2} = \frac{\text{ص} - 1}{1} = \frac{\text{ع} + 1}{1}$ ،

$\frac{\text{س} - 1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - 1}{2} = \frac{\text{ع} + 2}{\text{ب}}$ لاحظ الترتيب !! طول بالك

ل١ // ل٢ ⟸ $\frac{2}{\text{أ}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\text{ب}}$ ⟸ أ = ٤ ، ب = ٢

⟸ $\boxed{\text{أ} + \text{ب} = 6}$

(٢٧) $\text{س}_1 = 4$ ، $\text{ص}_2 = 2$ ، $\text{ع}_3 = 2$ (الاجزاء المقطوعة من المحاور)

∴ أ (٤ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٢ ، ٠) ، جـ = (٠ ، ٠ ، ٢)

م ∆ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ ‖ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}}$ ‖

* $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٠ ، ٢ ، ٠) − (٤ ، ٠ ، ٠) = (−٤ ، ٢ ، ٠)

* $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ = (٠ ، ٠ ، ٢) − (٤ ، ٠ ، ٠) = (−٤ ، ٠ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \hat{\text{س}} & \hat{\text{ص}} & \hat{\text{ع}} \\ -4 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

= $\hat{\text{س}}$ (٤ − ٠) − $\hat{\text{ص}}$ (−٨ − ٠) + $\hat{\text{ع}}$ (٠ + ٨)

= ٤ $\hat{\text{س}}$ + ٨ $\hat{\text{ص}}$ + ٨ $\hat{\text{ع}}$

م ∆ أ ب جـ = $\frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 + 64} = \frac{1}{2} \times 12$

∴ م ∆ أ ب جـ = ٦ وحدة مربعة

(٢٨) طول العمود على المستوى من نقطة

$$= \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ ع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$$ حيث النقطة $(س_١ ، ص_١ ، ع_١)$

$$ل = \frac{|٢ \times ٢ - ٢ \times ٣ + ١ \times ١ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}} = \frac{|٤ - ٦ + ١ - ٥|}{\sqrt{٩}}$$

$$\therefore ل = \frac{٦}{٣} = ٢$$ وحدة طول

(٢٩) بطرح المعادلتين ل١ − ل٢ ⟸ س + ٢ص = ٣

بفرض $\boxed{ص = ك}$ ∴ س = ٣ − ٢ك

بالتعويض في ① ⟸ ٦ − ٤ك − ك + ع − ١ = صفر

⟸ ع = ٥ك − ٥

∴ المعادلة البارامترية هي س = ٣ − ٢ك ، ص = ك ، ع = ٥ك − ٥

∴ الإحداثية هي $$\boxed{\frac{س - ٣}{-٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع + ٥}{٥}}$$

ط ٢ آخر

بطرح المعادلتين ⟸ س + ٢ص = ٣

$$\Leftarrow ص = \frac{٣ - س}{٢} \Leftarrow \boxed{س = ٣ - ٢ص}$$

بالتعويض في ② عن س ، ص

$$٢س + \frac{٣ - س}{٢} + ع - ١ = صفر \quad \times ٢$$

٤ س + س − ٣ + ٢ع − ٢ = ٠

$$\therefore ٥س = ٥ - ٢ع \Leftarrow \boxed{س = \frac{٥ - ٢ع}{٥}}$$

∴ المعادلة هي

$$\boxed{س = ٣ - ٢ص = \frac{٥ - ٢ع}{٥}}$$

(٤٠) الصورة البارامترية $س = ٢ + ل$ ، $ص = -١ + ٢ل$ ، $ع = ٢ - ل$

الصورة العامة $\frac{س - ٢}{١} = \frac{ص + ١}{٢} = \frac{ع - ٢}{-١}$

∴ النقطة $(٢ ، ١ ، ٢)$ هي التي تحقق المعادلة

---

(٤١) المسافة بين المستويين $= ٤ + ٢ = ٦$ وحدة

(٤٢) $م = (-٢ ، ٣ ، -٤)$

$نق^٢ = ٤ + ٩ + ١٦ - ٤ = ٢٥ \Longleftarrow \boxed{نق = ٥}$

∴ طول القطر $= ١٠$ سم

(٤٣) $ه_١ = (١ ، -٢ ، -٤)$ ، $ه_٢ = (-٢ ، ل + ١ ، ٨)$

$\Longleftarrow \frac{١}{-٢} = \frac{-٢}{ل + ١} \Longleftarrow ل + ١ = ٤$

$\Longleftarrow \boxed{ل = ٣}$

---

(٤٤) $م = (-٢ ، ٢ ، -٥)$ $(-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ع$)$

(٤٥) $ه_١ = (٢ ، -٦ ، ل)$ ، $ه_٢ = (٦ ، م ، ٣)$

$\Longleftarrow \frac{٢}{٦} = \frac{-٦}{م} = \frac{ل}{٣} \Longleftarrow م = -١٨$

$\Longleftarrow ل = ١$

$\Longleftarrow \boxed{ل + م = -١٧}$ $\boxed{\text{خلي بالك من اشارة ص في ل١}}$

---

(٤٦) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٠ ، -٢ ، ٥) - (-١ ، ٣ ، ٤) = (١ ، -٥ ، ١)$

$\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{١ + ٢٥ + ١} = \sqrt{٢٧} = \boxed{٣\sqrt{٣}}$

(٤٧) $ه_١ = (-١ ، ٣ ، م)$ ، $ه_٢ = (٢ ، ل ، م)$

$ل_١ \perp ل_٢ \Longleftarrow -٢ + ٣ل + م^٢ =$ صفر

$\Longleftarrow \boxed{٣ل + م^٢ = ٢}$

(٤٨) $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (٣ ، -٤ ، -١٢)$

متجه الوحدة في اتجاه $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{(٣ ، -٤ ، -١٢)}{\sqrt{١٤٤+١٦+٩}}$

$\hat{e} = \frac{(٣ ، -٤ ، -١٢)}{\sqrt{١٦٩}} = \left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{-٤}{١٣} ، \frac{-١٢}{١٣}\right)$

---

(٤٩) $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

$= ١(-٨ - ٠) - ٢(-٤ - ٤) + \text{صفر}$

$= -٨ + ٢٤ = \boxed{١٦}$

---

(٥٠)

ه للمستقيم $= (٢ ، -١ ، -٢)$ ، ب ∈ للمستقيم $(٢ ، -١ ، ٣)$

طول العمود من أ على المستقيم $= \frac{\|\vec{e} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\vec{e}\|} = \cancel{\frac{|\vec{e} \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\vec{e}\|}}$

$\overrightarrow{AB} = (١ ، -١ ، ١)$

∴ طول العمود $= \frac{\|(٢ ، -١ ، -٢) \times (١ ، -١ ، ١)\|}{\sqrt{٤+١+٤}}$

$= \frac{\|(٣ ، ١ ، -٤)\|}{٣} = \frac{\sqrt{٩+١+١٦}}{٣} = \boxed{\frac{\sqrt{٢٦}}{٣}}$

---

(٥١) جتا $\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\| \|\vec{n_2}\|} = \frac{|(١ ، ١ ، ٠) \cdot (٠ ، ١ ، ١)|}{\sqrt{١+١+٠} \times \sqrt{٠+١+١}}$

∴ جتا $\theta = \frac{١}{٢} \Longleftarrow \boxed{\theta = ٦٠^\circ}$

تحليل

(٥٢) الأيسر $\overline{أ} \times \overline{ب}$ = صفر عندما $\overline{أ} = -\overline{ب}$

الأيمن $\overline{أ} + \overline{ب} = \overline{أ} \times \overline{ب}$ اذا كانت $\overline{أ} = -\overline{ب}$

$\Leftarrow \overline{ب} = (-٢ ، -١ ، ٢)$

(٥٣) $\overline{أ} \perp \overline{ب}$ ، $\overline{أ} \perp \overline{ج}$ $\Leftarrow$ $\overline{ب} \,//\, \overline{ج}$

نفرض ان $\overline{أ} = (س ، ص ، ع)$ $\Leftarrow$ $\overline{أ} \cdot \overline{ب}$ = صفر

$\Leftarrow$ ٢س + ٢ص + ٢ع = صفر [illegible]

س + ٢ص + ع = صفر $\times -٢$

بالحل المتآني ص = صفر $\Leftarrow$ س = −ع

$\therefore$ (−٤ ، ٠ ، ٤) هو $\overline{أ}$ لأن $\|\overline{أ}\| = ٤\sqrt{٢}$

(٥٤)

المستويان متوازيان وغير منطبقين

توجد نقطة في المستوى الأول بوضع ص = ع = ٠

$\Leftarrow$ س = ٣ $\therefore$ النقطة هي (٣ ، ٠ ، ٠)

طول العمود المرسوم من (٣ ، ٠ ، ٠) على المستوى الثاني هو

$$= \frac{|٣\times٣ + ١٢\times٠ - ٤\times٠ + ١٧|}{\sqrt{٩ + ١٤٤ + ١٦}} = \frac{٢٦}{١٣} = \boxed{٢}$$

(٥٥)

$\overline{أ} \,//\, \overline{ب}$ $\Leftarrow$ $\frac{٤}{٢} = \frac{-ك}{٢} = \frac{٦}{م}$

$\Leftarrow$ $\boxed{ك = -٤}$ ، $\boxed{م = ٣}$

$\Leftarrow$ ك + م = −٤ + ٣ = $\boxed{-١}$

(٥٦)

$\frac{س}{٢أ} = \frac{ص}{أ} = \frac{ع}{٢}$ ، $\overline{ن} = (١ ، ٢ ، ٢)$

$\because \overline{ع} \perp \overline{ن}$ $\Leftarrow$ ٢أ × ١ + أ × ٢ + ٢ × ٢ = صفر $\Leftarrow$ $\boxed{أ = -١}$

(٥٧) $\overrightarrow{\text{أ}}_{\text{ب}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} \times \frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{(-٢ ، -٢ ، +٢) \cdot (-٢ ، ١ ، ٢)}{\sqrt{٤+١+٤} \times \sqrt{٤+١+٤}}$

فيكون اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ في اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ $= \frac{(٤ ، -٢ ، -٤)}{٩} = \left(\frac{٤}{٩} ، \frac{-٢}{٩} ، \frac{-٤}{٩}\right)$

(٥٨) مساحة ▱ $= \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أد}}\|$

$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أد}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٢ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & -٢ \end{vmatrix} = -٨\overrightarrow{\text{س}} + ٧\overrightarrow{\text{ص}} + ٦\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة ▱ $= \sqrt{٣٦+٤٩+٦٤} = \sqrt{١٤٩}$ وحدة مربعة

(٥٩) رااائع

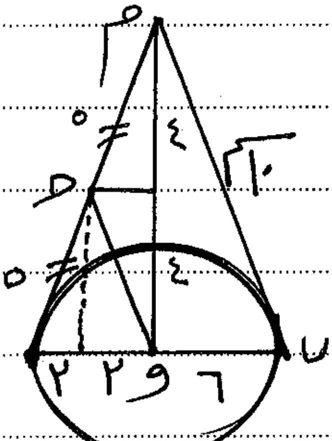
من هندسة الشكل و هـ $= \frac{١}{٢}$ ب م $= ٥$ سم

محيط القاعدة $= ١٢ \cancel{\pi} = ٢ \cancel{\pi}$ نق ← $\boxed{\text{نق} = ٦}$

من فيثاغورث ع (م و) $= ٨$ سم

نفرض ان و نقطة الاصل $(٠ ، ٠)$

ب $(٦ ، ٠)$ هـ $(-٣ ، ٤)$



$\therefore \overrightarrow{\text{ب هـ}} = \overrightarrow{\text{هـ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (-٩ ، ٤)$

$\overrightarrow{\text{هـ م}} = \overrightarrow{\text{م}} - \overrightarrow{\text{هـ}} = (٣ ، -٤)$

$\therefore \overrightarrow{\text{ب هـ}} \cdot \overrightarrow{\text{هـ م}} = (-٩ ، ٤) \cdot (٣ ، -٤)$

$= -٢٧ - ١٦ = \boxed{-٤٣}$

(٦٠)

$\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (-١ ، ١+١ ، ٢)$

$\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) = (١ ، ١ ، ١) \times (-١ ، ٢ ، ٢)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & ١ \\ -١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٢\overrightarrow{\text{ع}}$

تابع مراجعه الهندسة الفراغية

(٦١) إحداثيات $\overrightarrow{ب}$ = (صفر، ٩، ٧)

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (-٤، ٩، ٧)$

$\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{١٦+٨١+٤٩} = \sqrt{١٤٦}$

أسئلة متنوعة

(١) عين مركز وطول نصف قطر الكرة التي معادلتها

$٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٢ع^٢ - ٢س - ٦ص - ٤ع + ٥ =$ صفر

الحل

بالقسمة على ٢

$\therefore س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - س - ٣ص - ٢ع + ٢٫٥ =$ صفر

$\therefore م = (-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ع$)$

$= (\frac{١}{٢}، \frac{٣}{٢}، ١)$

$\therefore نق^٢ = \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} + ١ - ٢٫٥ = ١$

نق = ١ وحده طول

(٢) أوجد معادلة الكرة التي $\overline{أب}$ قطر فيها أ(-١، ٤، ٢)، ب(٢، -٢، ٦)

الحل

إحداثي م (منتصف $\overline{أب}$) $= (\frac{-١+٢}{٢}، \frac{٤-٢}{٢}، \frac{٢+٦}{٢})$

$\therefore م = (١، ١، ٤)$

$\therefore نق = أم = \sqrt{٤ + ٩ + ٤}$

$\therefore$ معادلة الكرة $\boxed{(س-١)^٢ + (ص-١)^٢ + (ع-٤)^٢ = ١٧}$

(٣) اوجد معادلة الكرة التي طول نصف قطرها ٣ وحدات وتمس الاحداثيات الموجب

الحل

تمس المحاور ⟵ نق = ل = ك = ن = ٢

∴ المعادلة هي م = (٢، ٢، ٢)

$س^2 + ص^2 + ع^2 - ٦س - ٦ص - ٦ع + ١٨ = صفر$

الطالب $(س - ٢)^2 + (ص - ٢)^2 + (ع - ٢)^2 = ٩$

---

(٤) اذا قطع محور السينات الكرة

$(س - ٢)^2 + (ص + ٢)^2 + (ع - ١)^2 = ١٤$ في النقطتين

أ ، ب اوجد طول $\overline{أب}$

الحل

بوضع ص = ع = ٠

∴ $(س - ٢)^2 + ٩ + ١ = ١٤$

$(س - ٢)^2 = ٤$

س − ٢ = ٢	س − ٢ = −٢
س = ٤	س = صفر

∴ النقطتان هما

أ (٤، ٠، ٠) ، ب (٠، ٠، ٠)

$أب = \sqrt{١٦ + ٠ + ٠} = ٤$ وحدة طول

تقويم

(١) اوجد معادلة كرة مركزها (١، ٦، −١) وتمر بالنقطة (٢، −١، ٥)

(٢) اوجد معادلة الكرة التي مركزها (٠، ٤، ٠) وتمس المستوى س ع

٥) إذا كانت الكرتان $(س-٣)^2 + (ع-٢)^2 + ص^2 = ١٦$ ،
$(س+١)^2 + (ص-٤)^2 + (ع-ل)^2 = ٢٥$ متماستان
أوجد ل

الحل

$نق_١ = ٤$ ، م = (٣ ، ٠ ، ٢) لاحظ الترتيب

$نق_٢ = ٥$ ، ن = (−١ ، ٤ ، ل) مركز الثانية

★ $م ن = \sqrt{١٦ + ١٦ + (ل-٢)^2} = \sqrt{٣٢ + (ل-٢)^2}$

★ الدائرتان متماستان من الداخل

$\boxed{م ن = نق_٢ - نق_١}$

∴ $٣٢ + (ل-٢)^2 = ١$

وهذا مرفوض !!

الدائرتان متماستان من الخارج

$\boxed{م ن = نق_١ + نق_٢}$

$٣٢ + (ل-٢)^2 = ٨١$

∴ $(ل-٢)^2 = ٤٩$

∴ $ل - ٣ = \pm ٧$

∴ $\boxed{ل = ١٠}$ أو $\boxed{ل = -٤}$

---

٦) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\overline{أ} = ٤\overline{س} + ٣\overline{ص} + ٧\overline{ع}$
، $\overline{ب} = ٢\overline{س} + ٥\overline{ص} + ٤\overline{ع}$

الحل

$\|\overline{أ}\| = \sqrt{١٦ + ٩ + ٤٩} = \sqrt{٧٤}$

$\|\overline{ب}\| = \sqrt{٤ + ٢٥ + ١٦} = \sqrt{٤٥}$

$جتا \theta = \dfrac{\overline{أ} \cdot \overline{ب}}{\|\overline{أ}\| \, \|\overline{ب}\|} = \dfrac{(٤ ، ٣ ، ٧) \cdot (٢ ، ٥ ، ٤)}{\sqrt{٧٤} \times \sqrt{٤٥}}$

$جتا \theta = \dfrac{٨ + ١٥ + ٢٨}{\sqrt{٣٣٣٠}} = \dfrac{٥١}{\sqrt{٣٣٣٠}} \Leftarrow \theta = ٢٧° \; ٩'$

٧) يتحرك جسم تحت تأثير قوة = -٦ س + ٨ ص من النقطة أ (-١، ١، ٣) إلى النقطة ب (٤، ٢، ٧) أوجد الشغل المبذول من القوة

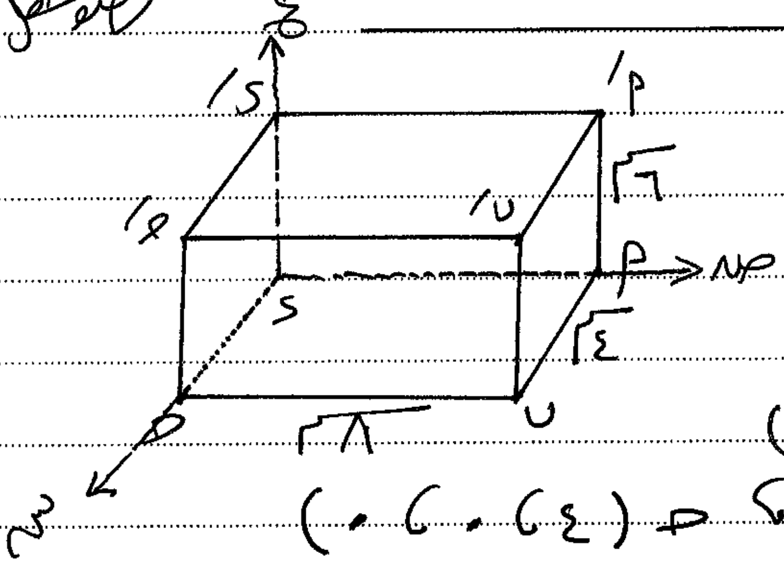
الحل

ف = أ ب = ب - أ = (٤، ٢، ٧) - (-١، ١، ٢) = (٥، ٤)

شغ = ق · ف

= (-٦، ٨) · (٥، ٤) = -٣٠ + ٣٢ = $\boxed{٢}$ وحدة شغل

٨) في الشكل المقابل متوازي مستطيلات أوجد جـ أ · ب د



الحل

نأخذ د هي (٠، ٠، ٠)

∴ ب (٤، ٨، ٠) ، جـ (٤، ٠، ٠)

أ (٠، ٨، ٠)

* ب د = د - ب = (-٤، -٨، ٠)

* جـ أ = أ - جـ = (-٤، ٨، ٠)

∴ ب د · جـ أ = (-٤، -٨، ٠) · (-٤، ٨، ٠)

= ١٦ - ٦٤ + ٠ = $\boxed{-٤٨}$

٩) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات أ = (١، -١، ٢) ،

ب = (٢، -٢، ٠) ، جـ = (٠، ٢، ٤)

الحل

الحجم =

١	١-	٢
٣	٢-	٠
٠	٢	٤

= ١(−٨) + ١(١٢ − ٠) + ٢(٦)

= −٨ + ١٢ + ١٢ = $\boxed{١٦}$

وهو مربع

(١٠) إذا كان أ ، ب ، جـ ثلاث متجهات متعامدة مثنى مثنى (وحدة)

أوجد ‖ ٢أ − ب + ٣جـ ‖

وإذا كان أ = (١/٣ ، ٢/٣ ، ٢/٣) ، ب = (٣/٥ ، ٠ ، ٤/٥)

أوجد جـ

الحل

(‖ ٢أ − ب + ٣جـ ‖)² = (٢أ − ب + ٣جـ) · (٢أ − ب + ٣جـ)

= ٤ ‖أ‖² − ٢ أ · ب + ٦ أ · جـ − ٢ ب · أ

+ ‖ب‖² − ٣ ب · جـ + ٦ جـ · أ − ٣ جـ · ب + ٩ ‖جـ‖²

∵ أ ، ب ، جـ متجهات وحدة ومتعامدة مثنى مثنى

∴ ‖أ‖ = ‖ب‖ = ‖جـ‖ = ١

، أ · ب = ٠ ، ب · جـ = ٠ ، أ · جـ = صفر

∴ (‖ ٢أ − ب + ٣جـ ‖)² = ٤ + ١ + ٩ = ١٤

∴ ‖ ٢أ − ب + ٣جـ ‖ = √١٤ ← أولاً

نفرض أن جـ = (س ، ص ، ع) ← س² + ص² + ع² = ١ ①

∵ جـ ⊥ أ ⇐ جـ · أ = ٠ ← $\boxed{\text{س − ٢ص + ٢ع = ٠}}$ ②

بالمثل جـ ⊥ ب ⇐ ٣/٥ س − ٤/٥ ع = ٠ ← س = ٤/٣ ع بالتعويض ③

∴ ص = ٥/٣ ع ← ② بالتعويض في ①

∴ س = ± ٥√٢/١٠ ، ص = ± ٤√٢/١٠ ، ع = ± ٣√٢/١٠

∴ جـ = ± √٢/١٠ (٥ ، ٤ ، ٣)

(٢٨) إذا م مستوى $٢أس - ٣أص + ٤أع + ٦ =$ صفر ينتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الكرتين

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٦س - ٨ص - ٢ع = ١٣$ ،

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ - ١٠س + ٤ص - ٢ع = ٨$

فما قيمة أ

الحل

م = (−٣ ، ٤ ، ١) ، ن = (٥ ، −٢ ، ١)

منتصف م ن (هـ) = $\left(\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{٤-٢}{٢} ، \frac{١+١}{٢}\right)$

∴ هـ = (١ ، ١ ، ١) وهي تحقق معادلة المستوى

∴ ٢أ − ٣أ + ٤أ + ٦ = صفر ⟸ ٣أ = −٦

⟸ $\boxed{أ = -٢}$

(٢٩) أوجد المعادلة الاحداثية للمستوى الذي معادلته

(س ، ص ، ع) = (٢ ، ٣ ، ٥) + ل₁(−١ ، ٢ ، ٤) + ل₂(٦ ، ١ ، −٢)

حيث ل₁ ، ل₂ بارامترات

الحل

التوافيق

ق(∠ ص م ى) = ٩٠°

ق(∠٢) + ق(∠٤) ← أولًا

∴ ق(∠٢) + ق(∠٤) + ق(∠هـ)

= ١٨٠°

∴ ق(∠ص م ى) + ق(∠هـ) = ١٨٠°

وهما متقابلتان

∴ الشكل م ص هـ ى رباعي دائري

∵ ق(∠٥) = ق(∠١)

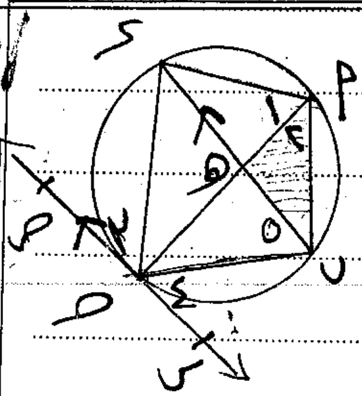
ق(∠١) = ق(∠٢)

∴ ق(∠٥) = ق(∠٢)

∴ ى ص مماس للدائرة المارة

برؤوس △ م ب هـ

مثال ٤



في الشكل

س ص مماس

س ص // ب ى

برهن أن

(١) م ى ينصف ∠ ب م ى

(٢) ب ى مماس للدائرة المارة

برؤوس △ م ب هـ

الحل

∵ س ص مماس

ق(∠٤) = ق(∠٢) محيطية

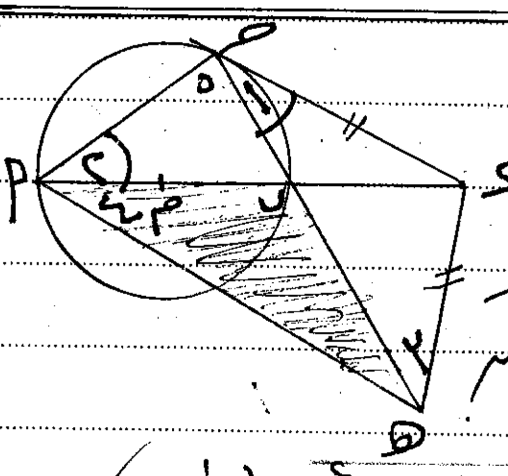
∵ س ص // ب ى

∴ ق(∠٤) = ق(∠٥) بالتبادل

∴ ق(∠١) = ق(∠٥) محيطيتان

∴ ق(∠١) = ق(∠٢) ← أولًا

مثال ٥



م ن قطر

د ص مماس

د هـ = د ص

برهن أن

(١) الشكل م ص د هـ رباعي دائري

(٢) م هـ قطر للدائرة المارة برؤوس △

الحل

∵ د ص مماس ∴ ق(∠١) = ق(∠٢)

∵ د ص = د هـ ∴ ق(∠٣) = ق(∠١)

∴ ق(∠٣) = ق(∠٢) وهما مرسومتان على ص د ∴ الشكل م ص د هـ رباعي دائري

∵ م ن قطر ∴ ق(∠٥) = ٩٠°

∴ هـ م قطر للدائرة الجديدة

∴ ق(∠١) = ق(∠٤) لأنهما الشكل

م ص د هـ رباعي دائري

∴ ق(∠٤) = ق(∠٢) ∴ د هـ مماس للدائرة المارة برؤوس △ م ب هـ

(١١) أوجد المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{أب}$ حيث أ(٢،١،٠)، ب(٢،١،٢√٣) في اتجاه $\overrightarrow{حـ}$ حيث $\overrightarrow{حـ}$ = (٣،٢،٢√٣)

الحل

$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٢،١،٢√٣) − (٢،١،٠) = (١،٠،٢√٣)

مركبة $\overrightarrow{أب}$ في اتجاه $\overrightarrow{حـ}$

= ($\overrightarrow{أب}$ • $\overrightarrow{حـ}$) / ||$\overrightarrow{حـ}$|| × $\overrightarrow{حـ}$ / ||$\overrightarrow{حـ}$|| { مركبة المتجه × متجه الوحدة }

= [(٣،٢،٢√٣) • (١،٠،٢√٣)] / [√(٩ + ٤ + ١٢) × √(٩ + ٤ + ١٢)] × (٣،٢،٢√٣)

= ٩/٢٥ (٣،٢،٢√٣) = (٢٧/٢٥ ، ١٨/٢٥ ، ١٨√٣/٢٥)

(١٢) أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذي معياره ١٢√٣ ويصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة للمحاور الاحداثيات

الحل

جتا²هـ + جتا²هـ + جتا²هـ = ١

⟸ ٣ جتا²هـ = ١ ⟵ جتا هـ = ± ١/√٣

أس = ||$\overrightarrow{أ}$|| جتا هـ = ١٢√٣ × ± ١/√٣ = ± ١٢

أص = ||$\overrightarrow{أ}$|| جتا هـ = ١٢√٣ × ± ١/√٣ = ± ١٢

أع = ||$\overrightarrow{أ}$|| جتا هـ = ١٢√٣ × ± ١/√٣ = ± ١٢

∴ $\overrightarrow{أ}$ = ± ١٢ $\overrightarrow{س}$ ± ١٢ $\overrightarrow{ص}$ ± ١٢ $\overrightarrow{ع}$

(١٣) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤، -٢، ٥) ومتجه (٢، ١، -١) متجه اتجاه له

الحل

أ = (٤، -٢، ٥) ، ه = (٢، ١، -١)

المعادلة هي: ر = أ + ك ه ← الاتجاهية

$\boxed{\text{∴ ر = (٤، -٢، ٥) + ك (٢، ١، -١)}}$

∴ س = ٤ + ٢ك ، ص = -٢ + ك ، ع = ٥ - ك — المعادلات البارامترية

الاحداثية: $\boxed{\frac{\text{س} - ٤}{٢} = \frac{\text{ص} + ٢}{١} = \frac{\text{ع} - ٥}{-١}}$

---

(١٤) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ر = (٢، -١، ٣) + ك (-٢، ٠، ٢) ،

س = ١ ، $\frac{\text{ص} - ٤}{٢} = \frac{\text{ع} + ٥}{-٣}$

الحل

ه١ = (-٢، ٠، ٢) ، ه٢ = (٠، ٣، -٣)

$\text{جتا } \theta = \frac{|\text{ه١} \cdot \text{ه٢}|}{\|\text{ه١}\| \, \|\text{ه٢}\|} = \frac{|(-٢، ٠، ٢) \cdot (٠، ٣، -٣)|}{\sqrt{٤ + ٤} \times \sqrt{٩ + ٩}}$

∴ جتا θ = $\frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$ ⟸ θ = ٦٠°

تقويم

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين الذين جيوب تمام اتجاههما

$\left(\frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ ، $\left(\frac{-٢}{\sqrt{٥}} ، \frac{٢}{\sqrt{٥}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$

(١٥) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

$$\frac{س+٣}{٢} = \frac{٢ص-١}{٥} = \frac{٣ع+٢}{٤}$$

الحل

نفرض $\frac{س+٣}{٢} = ك \Leftarrow س = -٣ + ٢ك$

$\Leftarrow ٢ص - ١ = ٥ك \Leftarrow ص = \frac{١}{٢} + \frac{٥}{٢}ك$

$\Leftarrow ٣ع + ٢ = ٤ك \Leftarrow ع = \frac{-٢}{٣} + \frac{٤}{٣}ك$

المعادلة البارامترية

$\therefore \overrightarrow{ر} = (-٣ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٢}{٣}) + ك(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣})$

المتجهة

---

(١٦) أوجد طول العمود المرسوم من أ$(-٢ ، ٣ ، ١)$ على المستقيم $\frac{س+٢}{٢} = \frac{ص-٣}{٤} = \frac{ع-١}{٤}$

الحل

$\overrightarrow{ه} = (٢ ، ٤ ، ٤)$ ، $\overrightarrow{ر} = (-٢ ، ٣ ، ١) + ك(٢ ، ٤ ، ٤)$

$\therefore$ أ $\in$ المستقيم $\therefore$ طول العمود = صفر

---

(١٧) إذا كان طول العمود المرسوم من أ$(٠ ، -١ ، ٢)$ على المستوى $\sqrt{٢}\,س + ص - ع + ك = ٠$ = ٤ وحدة

أوجد ك

الحل

$$طول\ العمود = \frac{|٠ \times \sqrt{٢} - ١ \times ١ + ٢ \times -١ + ك|}{\sqrt{٢ + ١ + ١}}$$

$$طول\ العمود = \frac{|-٣ + ك|}{٢} \Leftarrow |-٣ + ك| = ٤$$

$\therefore -٣ + ك = ٤ \Leftarrow \boxed{ك = ٧}$ أو $-٣ + ك = -٤ \Leftarrow \boxed{ك = -١}$

(١٨) أوجد قياس الزاوية بين المستويين

٢س + ٢ص + ٧ع = ٨ ، ٣س − ٤ص + ٤ع = ٥

الحل

$\overrightarrow{ن_1}$ = (٢ ، ٢ ، ٧) ، $\overrightarrow{ن_2}$ = (٣ ، −٤ ، ٤)

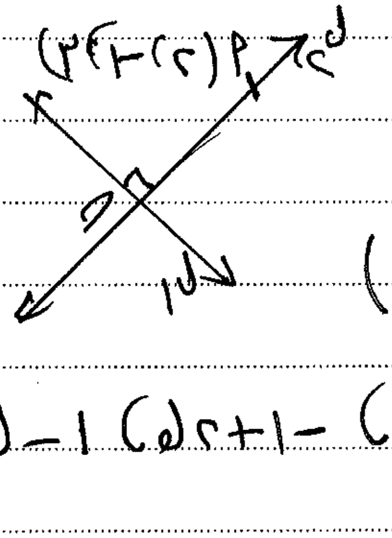
جتا θ = $\frac{|\overrightarrow{ن_1} \cdot \overrightarrow{ن_2}|}{\|\overrightarrow{ن_1}\| \, \|\overrightarrow{ن_2}\|}$ = $\frac{|(٢ ، ٢ ، ٧) \cdot (٣ ، −٤ ، ٤)|}{\sqrt{٤+٤+٤٩} \times \sqrt{٩+١٦+١٦}}$

جتا θ = $\frac{|٦ − ٨ + ٢٨|}{\sqrt{٥٧} \times \sqrt{٤١}}$ = $\frac{٢٦}{\sqrt{٢٣٣٧}}$

∴ θ = ٥٧° ٢٠′

(١٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١ ، ٣) ويقطع المستقيم ر = (٢ ، −٢ ، ٤) + ك(٢ ، ٢ ، −١) على التعامد

الحل



ب ∈ للمستقيم ل١

∴ ب عليه احداثيات

(٢ + ٢ك ، −٢ + ٢ك ، ٤ − ك)

ه متجه اتجاه ل٢ (المطلوب)

ه = $\overrightarrow{أب}$ = ب − أ = (٢ك ، −١ + ٢ك ، ١ − ك)

المستقيمان متعامدان

∴ (٢ ، ٢ ، −١) · (٢ك ، −١ + ٢ك ، ١ − ك) = صفر

∴ ٤ك − ٢ + ٤ك − ١ + ك = صفر ⟸ $\boxed{ك = \frac{١}{٣}}$

∴ ه = ($\frac{٢}{٣}$ ، −$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) = (٢ ، −١ ، ٢)

∴ معادلة ل٢ هي $\boxed{ر = (٢ ، −١ ، ٣) + ك(٢ ، −١ ، ٢)}$

(٢٠) اوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (−٢، ٤، ٢) والمتجه $\overrightarrow{ن}$ = (١، −١، ٣) عمودي على المستوى

الحل

المتجهة: $\overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \cdot \overrightarrow{أ}$

(١، −١، ٣) $\cdot \overrightarrow{ر}$ = (١، −١، ٣) $\cdot$ (−٢، ٤، ٢)

$\boxed{(١، −١، ٣) \cdot \overrightarrow{ر} = −١}$ ← (١)

الكارتيزية

أ(س − س١) + ب(ص − ص١) + جـ(ع − ع١) = ٠

حيث $\overrightarrow{ن}$ = (أ، ب، جـ)

∴ ١(س + ٢) − ١(ص − ٤) + ٢(ع − ٢) = ٠

∴ $\boxed{\text{س − ص + ٢ع + ١ = صفر}}$

---

(٢١) اوجد معادلة المستوى المار بالنقاط (٣، −١، ٠)، (٢، ١، ٤)، (٠، ٢، ٢)

الحل

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{س}_1 & \text{ص} - \text{ص}_1 & \text{ع} - \text{ع}_1 \\ \text{س}_2 - \text{س}_1 & \text{ص}_2 - \text{ص}_1 & \text{ع}_2 - \text{ع}_1 \\ \text{س}_3 - \text{س}_1 & \text{ص}_3 - \text{ص}_1 & \text{ع}_3 - \text{ع}_1 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{س} - 3 & \text{ص} + 1 & \text{ع} - 0 \\ 2 - 3 & 1 + 1 & 4 - 0 \\ 0 - 3 & 2 + 1 & 2 - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{س} - 3 & \text{ص} + 1 & \text{ع} \\ -1 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

= (س − ٣)(٦ − ١٢) − (ص + ١)(−٢ + ١٢) + ع(−٣ + ٦)

= −١٠س + ٣٠ − ٩ص − ٩ − ٤ع + ٦ع = صفر

= −١٠س − ٩ص + ٢ع + ٢١ = صفر

(٢٢) اوجد نقطة تقاطع المستويات ٢س + ص − ع = ١
س + ص + ع − ٢ = ٠ ، ٢س − ص − ع = ٦

الحل

بجمع ① ، ② ← ٢س + ٢ص = ١ ← I

بجمع ② ، ③ ← ٤س = ٨ ← $\boxed{\text{س} = ٢}$

بالتعويض في I ← ٦ + ٢ص = ١ ← ص = −٥/٢

بالتعويض في ② ∴ ٢ − ٥/٢ + ع − ٢ = ٠

← ع = ٥/٢ ∴ النقطة (٢ ، −٥/٢ ، ٥/٢)

(٢٣) اثبت ان المستقيم (س − ١)/٢ = (ص + ٢)/−١ = ع/٣ يقطع المستوى ٢س + ٢ص + ع − ٨ = ٠ ، ثم نقطة التقاطع ثم اوجد قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى

الحل

بفرض ان (س − ١)/٢ = ل ← س = ١ + ٢ل

بالمثل ← ص = −٢ − ل

← ع = ٣ل

بالتعويض في معادلة المستوى

∴ ٢(١ + ٢ل) + ٢(−٢ − ل) + ٣ل − ٨ = ٠

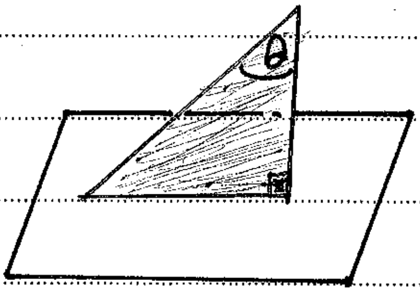
← ٧ل = ١١ ← ل = ١١/٧

∴ س = ١ + ٢٢/٧ = $\boxed{٢٩/٧}$ ، ص = −٢ − ١١/٧ = $\boxed{−٢٥/٧}$

ع = ٣ × ١١/٧ = $\boxed{٣٣/٧}$ ∴ النقطة (٢٩/٧ ، −٢٥/٧ ، ٣٣/٧)

★ ثم متجه الاتجاه العمودي على المستوى = (٢ ، ٢ ، ١)

★ متجه اتجاه المستقيم (٢ ، −١ ، ٣)



الزاوية بينهما θ

$$\therefore \text{جا}\,\theta = \frac{|(٣ ، ١ ، -٢) \cdot (١ ، ٢ ، ٣)|}{\sqrt{١+٤+٩} \times \sqrt{٤+١+٩}}$$

$$\text{جا}\,\theta = \frac{٣ + ٢ - ٦}{\sqrt{١٤} \times \sqrt{١٤}} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$$

$\therefore \theta = ٦٠$ ⟵ الزاوية بين المستقيم والمستوى $= \boxed{٣٠}$

---

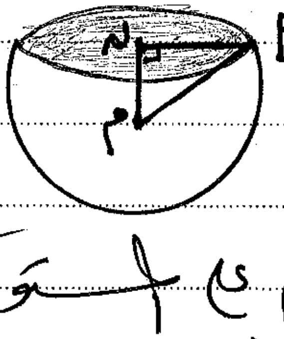
(٢٤) إذا قطع المستوى $٢س - ص - ٢ع + ١٢ = ٠$

الكرة $(س + ٢)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ١٥$

أوجد مساحة المقطع الناتج من التقاطع

الحل

مركز الكرة م $= (-٢ ، -٢ ، ١)$



المقطع الناتج هو دائرة مركزها ن

متجه الاتجاه العمودي على المستوى

هو $(٢ ، -١ ، -٢)$

م ن هو طول العمود المرسوم من م على المستوى

$$= \frac{|٢ \times -٣ - ١ \times -٢ - ٢ \times ١ + ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}} = \frac{٦}{٣} = \boxed{٢}$$

وهو طول

$\therefore$ م أ = طول نصف قطر الكرة $= \sqrt{١٥}$

من فيثاغورث $(أ ن)^٢ = ١٥ - ٤ = ١١$

$\therefore$ أ ن $= \sqrt{١١}$ وهو طول نصف قطر الدائرة المطلوبة

مساحة المقطع $= \pi$ نق^٢ $= ١١ \pi$ وحدة مربعة

إعداد أ/ ناصر ابوزيد

(٢٥) كرة مركزها (١، ٢، ١) تمس سطح المستوى س + ص + ع = ١
أوجد معادلة الكرة

الحل

نوجد طول العمود الساقط من المركز على المستوى وهو نق

$$\text{نق} = \frac{|١\times١ + ١\times٢ + ١\times١ - ١|}{\sqrt{١+١+١}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$$

∴ معادلة الكرة هي $(س-١)^2 + (ص-٢)^2 + (ع-١)^2 = ٣$

(٢٦) أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى س + ٢ص + ٣ع = ١٢

الحل

من معادلة المستوى $\boxed{س = ١٢ - ٢ص - ٣ع}$ (١)

بالتعويض في معادلة المستقيم

١٢ − ٢ص − ٣ع = ص = ع

ومنها ٣ص + ٣ع = ١٢ ⟵ (٢)

، ص − ع = صفر ⟵ (٣)

بحل المعادلتين

٦ص = ١٢ ⟸ $\boxed{ص = ٢}$ بالتعويض في (٣)

∴ $\boxed{ع = ٢}$ بالتعويض في (١)

س = ١٢ − ٤ − ٦ ⟸ $\boxed{س = ٢}$

∴ نقطة التقاطع هي (٢، ٢، ٢)

(٢٧) أوجد نقطة تقاطع المستقيم $\vec{ر}$ = (١، ٤، ٢) + ك(٣، ٢، ٢)
مع المستوى $\vec{ر}$. (١، ٢، ٢) = −٢

متروك للطالب