اعداد م/ أحمد ربيع
Tel: ٠١٢٢٩٠٨١٨١٨

مشتقة الدوال المثلثية

ص= جاس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتاس

ص= جتاس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ جاس

ص=ظاس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{٢}س

ص=ظتاس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ قتا^{٢}س

ص= قاس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قاس ظاس

ص=قتاس $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$= ـ قتاس ظتاس

لاحظ إذا كان

ص = قا د(س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$= د/(س)قاد(س)ظاد(س)

ص= ظا الزاوية

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$= تفاضل الزاوية قا^{٢} الزاوية

وهكذا مع كل الدوال

الاشتقاق الضمني:

تفاضل س بالنسبة الي س = ١

تفاضل ص بالنسبة الي س =$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

تفاضل ع بالنسبة الي ص =$\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}}$

مثال توضيحي:

ص=س^{٢} + ٣ع

تفاضل بالنسبة الي س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$= ٢س +٣ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

تفاضل بالنسبة الي ع

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$= ٢س$\frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$ +٣

تفاضل بالنسبة الي ص

١= ٢س$\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$ +٣ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}}$

مثال: اذا كان ظا ص= جا ٥س

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

قا^{٢}ص$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٥جتا٥س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$= $\frac{\text{٥ جتا ٥س}}{\text{قا}^{٢}\text{ص}}$

الاشتقاق البارمترى

ص = د(ع) & ع =د(س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

ص = د(ع) & س = د(ع)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءع}}$

مثال توضيحي:

س = ٢ من^{٢} ، ص= من^{٤} أوجد عند ن = ٤

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ = ٤ من^{٣} $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$= ٤ من

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ = ن^{٢}= ١٦

المشتقات العليا

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = المشتقة الاولي " ميل المماس " "معدل التغير للداله"

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ المشتقة الثانية

او "معدل تغير ميل المماس"

مثال توضيحي

اوجد المشتقة الثالثة:

ص = س^{٥} ـ٤س^{٣} +٣

ص/ = ٥س^{٤} ـ١٢ س^{٢}

ص// = ٢٠س^{٣} ـ٢٤س

ص///= ٦٠س^{٢} ـ ٢٤

مثال: اذا كان ٣ص^{٤} =٤س^{٣}

اثبت ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ +٣($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)^{٢}= $\frac{\text{٢س}}{\text{ص}^{٢}}$

الحل

١٢ص^{٣} $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ =١٢س^{٢}

٣٦ص^{٢}($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)^{٢}+١٢ص^{٣}$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ =٢٤س ÷١٢ص^{٢}

٣($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)^{٢}+ص$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢س}}{\text{ص}^{٢}}$

ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ +٣($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)^{٢}= $\frac{\text{٢س}}{\text{ص}^{٢}}$

تطبيقات على المشتقة:

١) لايجاد ميل المماس عند نقطة: نحسب المشتقة الاولي ونعوض بالنقطة ف المشتقة

٢) لايجاد الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات :نحسب ميل المماس ثم (للميل shift tan)

٣)لايجاد معادلة المماس او معادلة العمودي: يجب معلومية الميل ونقطة أولا:

معادلة المماس $\frac{\text{ص}-\text{ص}_{١}}{\text{س}-\text{س}_{١}}$ =م المماس

معادلةالعمودي $\frac{\text{ص}-\text{ص}_{١}}{\text{س}-\text{س}_{١}}$ =م العمودي

نقلب،نغير الاشارة

٤)ايجاد النقط الواقعه ع المنحنى

-نحسب المشتقة الاولي

-نضع المشتقة الاولي = الميل

- نقوم بحل المعادلة ونوجد قيم س والتعويض في اصل الدالة لايجاد ص

الميل يكون معطي بشكل مباشر او غير مباشر.

لايجاد الميل

الميل= $\frac{\text{ص}_{٢}-\text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢}-\text{س}_{١}}$ بمعلومية نقطتين

= $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ بمعلومية معادلة المستقيم

= ظا هـ بمعلومية الزاوية التى ٠٠٠

اذا كان المستقيمان متوازيان م$_{١}$=م$_{٢}$

اذا كان المستقيمان متعامدان م$_{١}$×م$_{٢}$= ـ١

ميل المستقيم الموازي محور السينات =صفر

ميل المستقيم الموازي محور الصادات غير معرف

لاحظ أن

$\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = ١ \div \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

المعادلات الزمنية المرتبطة

نكون قاعدة الدالة المطلوبة

نفاضل بالنسبة للزمن ونوجد المطلوب

*يجب حفظ جميع قوانين المساحات والحجوم

*استخدام نظرية فيثاغورث واقليدس لايجاد المطلوب

*استخدام التشابه

*استخدام النسب المثلثية وقانون الجيب وجيب التمام

نهايات الدوال لمرتبطة بالعدد هـ

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}}$ = هـ

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} (١+\text{س})^{\frac{١}{\text{س}}}$ = هـ

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(١+\frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{مس}}$ = هـم

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \left(١+\frac{\text{م}}{\text{س}}\right)^{\text{س}}$ = هـم

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}$ هـ$^{\text{س}}$ = ١

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{م}}(١+\text{س})}{\text{س}}$ =لو$_{\text{م}}$هـ

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(١+\text{س})}{\text{س}}$ =لو$_{\text{هـ}}$هـ= ١

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{م}^{\text{س}}-١}{\text{س}}$ =لو$_{\text{هـ}}$م

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}-١}{\text{س}}$ =لو$_{\text{هـ}}$هـ = ١

مع أطيب تمنيات النجاح والتفوق
Tel: ٠١١٥٢٦٢٨٧٢٩

اعداد ا/ أحمد ربيع
Tel: ٠١٢٢٩٠٨١٨١٨

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

مشتقة الدالة الاسية:

د(س)= هـ^س   د/(س)= هـ^س

د(س)= هـ^{ر(س)}   د/(س)=ر/(س) هـ^{ر(س)}

تفاضل الداله الاسية للاساس هـ = نفسها × تفاضل الاس

د(س)= ا^س   د/(س)= ا^س لوهـ ا

تفاضل الداله الاسية للاساس ا = نفسها × تفاضل الاس × لوهـ ا

مشتقة الدالة اللوغاريتمية:

* د(س)= لوهـ س   د/(س)= ١/س
* د(س)=لوا س

د/(س)= ١/(س لوهـ ا) = (١/س) لوا هـ

• د(س)=لوا ر(س)

د/(س)= ر/(س) / (ر(س) لوهـ ا)

مشتقة لو (دالة)= تفاضل الدالة / لو الدالة

الاشتقاق اللوغاريتمي

اذا كانت س موجودة في الاساس والاس نقوم باخذ لوغاريتم الطرفين

مثال توضيحي

ص = س^س   باخذ لوهـ للطرفين

لوهـ ص = لوهـ س^س = س لوهـ س

(١/ص) (ءص/ءس) = لوهـ س + س × (١/س)

ءص/ءس =

ص(لوهـ س + ١) = س^س(١+لوهـ س)

تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمة:

$\int$ هـ^س ءس = هـ^س + ث

$\int$ هـ^{ر(س)} ر/(س)ءس = هـ^{ر(س)} + ث

$\int$ هـ^{اس} ءس = هـ^{اس}/ا + ث

$\int$ ا^س ءس = ا^س / لوهـ ا + ث

$\int$ ا^{ر(س)} ر/(س)ءس = ا^{ر(س)} / لوهـ ا + ث

$\int$ دالة اسية × تفاضل الاس ءس = الدالة الاسية × لو الاساس هـ + ث

$\int$ (١/س) ءس = لوهـ |س| + ث

$\int$ (ر/(س) / ر(س)) ءس = لوهـ |ر(س)| + ث

$\int$ (تفاضل المقام / المقام) ءس = لوهـ |المقام| + ث

سلوك الدالة

*** المشتقة الاولي**

نوجد منها النقط الحرجة ونوجد فترات التزايد والتناقص

النقطة الحرجة: هي النقطة التي تجعل المشتقة الاولي = ٠ أو النقطة التي تكون عندها الدالة غير قابله للاشتقاق.

لايجاد النقط الحرجة

- نحسب المشتقة الاولي
- نساويها بالصفر ونحسب قيم س ونعوض في اصل الدالة لايجاد ص

لايجاد فترات التزايد والتناقص نرسم خط الاعداد للمشتقة الاولي ونبحث اشارتها

د/(س)>صفر   تزايد

د/(س)<صفر   تناقص

مع مراعاة مجال الدالة

لتحديد النقط الحرجة من حيث كونها عظمى محليا اوصغرى محليا

*اذا كانت تفصل بين تزايد ثم تناقص تكون عظمى محليا

*اذا كانت تفصل بين تناقص ثم تزايد تكون صغرى محليا

أو اختبار المشتقة الثانية

د//(ا)<صفر   عظمى محليا

د//(ا)>صفر   صغرى محليا

اذا كانت هناك نقطة حرجة معطاة

فانها ١)تحقق معادلة المنحنى

٢)تجعل المشتقة الاولي = صفر

القيمة العظمة والصغرى المطلقة

اذا كانت ص= د(س) متصلة في الفترة [ا، ب] لايجاد اكبر واصغر قيمة للدالة

-نوجد النقط الحرجة اولا وليكن س١،س٢ يجب ان تنتمي الفترة

نحسب د(س١)=   د(س٢)=

د(ا)=   د(ب)=

اكبر القيم هي العظمي المطلقة

اصغر القيم هي الصغرى المطلقة

*** المشتقة الثانية**

نوجد منها نقط الانقلاب ونوجد فترات التحدب لاعلى ولاسفل

نقطة الانقلاب: هي النقطة التي تجعل المشتقة الثانية = ٠ أو النقطة التي تكون عندها د// غير معرفة

لايجاد نقط الانقلاب

- نحسب المشتقة الثانية
- نساويها بالصفر ونحسب قيم س ونعوض في اصل الدالة لايجاد ص

لايجاد فترات التحدب

نرسم خط الاعداد للمشتقة الثانية ونبحث اشارتها

د//(س)>صفر تحدب لاعلى

د//(س)<صفر تحدب لاسفل

اذا كانت هناك نقطة انقلاب معطاة

فانها ١)تحقق معادلة المنحنى

٢)تجعل المشتقة الثانية = صفر

تطبيقات على القيم العظمي والصغر المطلقة

خطوات الحل:

- نكون قاعدة دالة الهدف المطلوبة"نعرفها اكبر مايمكن اقل"
- نجعل الدالة في متغير واحد من خلال المعطيات المعطاة
- نقوم بالاشتقاق بالنسبة لهذا المتغير ونساوي المشتقة بالصفر ونوجد قيمة المتغير
- اذا وجدت اكثر من قيمة نقوم بتحديد نوعها من حيث كونها عظمى او صغرى محليا
- نوجد المطلوب في المسألة

تكامل الدوال المثلثية

$\int$ جتا س ءس = جاس + ث

$\int$ جا س ءس = ـ جتاس + ث

$\int$ قا²س ءس = ظاس + ث

$\int$ قتا²س ءس = ـ ظتاس + ث

$\int$ قاس ظاس ءس = قاس + ث

$\int$ قتاس ظتاس ءس= ـ ظتاس+ث

لاحظ

$\int$ جتا(اس +ب)ءس = جا(اس+ب)/ا +ث

بصفه عامه مع كل القوانين

$\int$ جتا "زاوية من الدرجة الاولي" = (1/تفاضل الزاوية) جا الزاوية +ث

قوانين اضافية

$\int$ ظاس ءس = ـ لو |جتاس| +ث

$\int$ ظتاس ءس = لو |جاس | +ث

$\int$ دالة × مشتقتها = زود ع الاس واحد ونقسم ع الاس الجديد

$\int$ جا^ن س جتاس ءس = جا^{ن+١}س/(ن + ١)

$\int$ قا⁶س ظاس ءس

=$\int$ قا⁵س قاس ظاس ءس

= (١/٥) قا⁵س+ث

تذكر أن

الدوال المثلثية لضعف الزاوية

جا(٢ ا) = ٢جاا جتاا

جتا (٢ ا) = جتا²ا ـ جا²ا

=٢جتا²ا ـ ١

=١ ـ ٢جا²ا

ظا(٢ ا)= ٢ظاا/(١ ـ ظا²ا)

اعداد أ/ أحمد ربيع
Tel: ٠١٢٢٩٠٨١٨١٨

تفاضلي الدالة

$ص = د(س)$

$ءص = د'(س)\ ءس$

ءص تسمى تفاضلي ص

مثال توضيحي

$ص = (س^{٣} + ٥)^{٤}$

$ءص = ٤(س^{٣}+٥)^{٣}(٣س^{٢})\ ءس$

التكامل بالتعويض

باختصار كدا:
عباره عن فرض يتم فرضه ف المسألة لتبسيط التكامل وتطبيق قاعدة تم دراستها
لو فرضك هيعقد المسألة الغي الفرض ده وشوفلك فرض تاني او التكامل بالتجزيء

الخطوات
نفرض ان ع = ----
من الفرض نوجد س = ----
نحسب ءس =----
نعوض في الكامل ليكون المتغير ع
نكامل الدالة ثم نحوله بدلاله س

مثال توضيحي:

$\int س\sqrt{س+٥}\ ءس$

الحل
لنفرض ان $ع = س+٥$

$س = ع - ٥$

$ءس = ءع$

$ا = \int (ع-٥)\ ع^{\frac{1}{2}}\ ءع$

$ا = \int (ع^{\frac{3}{2}} - ٥\ ع^{\frac{1}{2}})\ ءس$

$= \frac{2}{5} ع^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3} ع^{\frac{3}{2}} + ث$

$= \frac{2}{5}(س+٥)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(س+٥)^{\frac{3}{2}} + ث$

التكامل بالتجزيء

يستخدم لاجراء حاصل ضرب دالتين أحدهما يمكن تكاملها والاخرى مشتقتها منتهية

$\int د_{١}\ د_{٢}\ ءس$

نفرض أن

$ص = د_{١}$ $ءع = د_{٢}\ ءس$

$ءص = \text{-----}\ ءس$ $ع = \int د_{٢}\ ءس$

$\int د_{١}\ د_{٢}\ ءس = ص\ ع - \int ع\ ءص$

مثال توضيحي :

$\int س\ جاس\ ءس$

نضع $ص = س$ $ءع = جاس\ ءس$

$ءص = ءس$ $ع = \int جاس\ ءس$

$ع = -\ جتاس$

$ا = -\ س\ جتاس - \int -\ جتاس\ ءس$

$= -\ س\ جتاس + جاس + ث$

التكامل المحدد

اذا كانت الدالة د متصلة على [أ ،ب] وكانت ت المشتقة العكسية للدالة د على نفس الفترة بمعنى

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = [ت(س)]_{أ}^{ب}$

$= ت(ب) - ت(أ)$

خواص التكامل المحدد:

$\int_{أ}^{أ} د(س) = صفر$

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\ ءس$

$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ءس = \int_{أ}^{جـ} د(س) + \int_{جـ}^{ب} د(س)$

حيث $جـ \in [أ ،ب]$

لاحظ أن
اذا كانت د دالة زوجية متصله

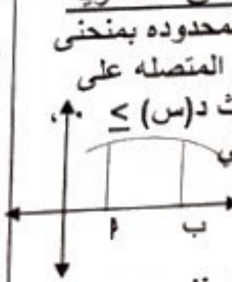
$\int_{-أ}^{أ} د(س)\ ءس = ٢\int_{0}^{أ} د(س)\ ءس$

اذا كانت د دالة فردية متصله

$\int_{-أ}^{أ} د(س)\ ءس = صفر$

مساحات المناطق المستوية

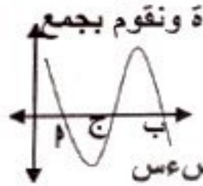
مساحة المنطقة المحدوده بمنحنى الدالة ص=د(س) المتصله على الفترة [أ، ب]حيث د(س) ≥ ٠، محور السينات هي



$م = \int_{أ}^{ب} ص\ ءس$

اذا كان المنحنى اسفل محور السينات نضع المقياس

*يفضل رسم المسألة وتحديد نقط التقاطع مع محور السينات
"بوضع ص=٠" ونوجد قيم س التى تمثل حدود التكامل
*إذا كان المساحة المطلوبة مقسمة الي اكثر من منطقة نحسب مساحة كل منطقة على حدة ونقوم بجمع المساحات



المساحه

$ا = \left|\int_{أ}^{جـ} ص\ ءس\right| + \int_{جـ}^{ب} ص\ ءس$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين

اذا كان $ص_{١}$،$ص_{٢}$ منحنيين ،المطلوب ايجاد المساحة المحصورة بينهما

الخطوات:
*نقوم برسم المنحنيين بصورة دقيقة لاستخراج نقط التقاطع التي تمثل حدود التكامل
*أو نقوم بحل المعادلتين معا جبريا لايجاد نقط التقاطع
أذا تقاطع عند س=أ ، س= ب

المساحة $= \int_{أ}^{ب} ص_{٢} - ص_{١}\ ءس$

اذا تقاطع ف ثلاث نقاط عند س = أ ،جـ ، ب

$ا = \left|\int_{أ}^{جـ} ص_{٢} - ص_{١}\ ءس\right| + \int_{جـ}^{ب} ص_{٢} - ص_{١}\ ءس$

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق
أ/أحمد ربيع

حجوم الاجسام الدورانية

المجسم : ينشأ من دوران منطقة مستوية حول محور ثابت ف مستويها

الدوران حول محور السينات:

$ح = \pi\int_{أ}^{ب} ص^{٢}\ ءس$

الدوران حول محور الصادات:

$ح = \pi\int_{أ}^{ب} س^{٢}\ ءص$

دوران المنطقة المحصورة بين منحنين

الخطوات:
*نقوم برسم المنحنيين بصورة دقيقة لاستخراج نقط التقاطع التي تمثل حدود التكامل
*أو نقوم بحل المعادلتين معا جبريا لايجاد نقط التقاطع

**الدوران حول محور السينات
أذا تقاطع عند س=أ ، س= ب

الحجم $= \pi\int_{أ}^{ب} ص_{١}^{٢} - ص_{٢}^{٢}\ ءس$

**الدوران حول محور الصادات
أذا تقاطع عند ص=أ ، ص= ب

الحجم $= \pi\int_{أ}^{ب} س_{١}^{٢} - س_{٢}^{٢}\ ءص$

وما توفيقي الا بالله عليه توكلت واليه أنيب