السؤال الأول

إذا كانت د(س)= س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٤ حيث أ ، ب ثابتان أوجد قيمتي أ ، ب إذا كان للدالة د قيمة صغرى محلية عند س = ٢ ونقطة انقلاب عند س = ١

====================================== الحل ======================================

د´(س) =٣س^{٢} + ٢أس + ب ، د″(س) =٦س + ٢أ ∵ عند س=١ نقطة انقلاب

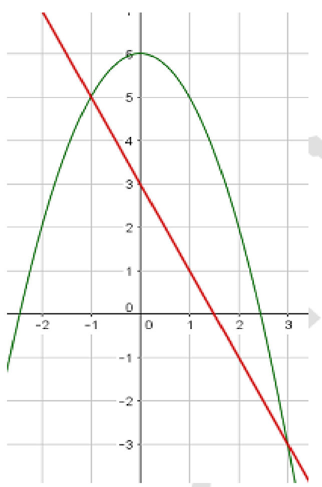
∴ د″(١) = ٠ ∴ أ = -٣ ، ∵ س=٢ قيمة صغرى ∴ د´(٢) =٠

∴ ٣×٤+٢×-٣×٢+ب=٠ ∴ ب = ٠

السؤال الثانى

أوجد مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين المنحنيين ص + س^{٢} = ٦ ، ص + ٢س – ٣ = ٠

====================================== الحل ======================================



ص = ٦- س^{٢} ، ص =٣-٢س

نوجد نقاط التقاطع ∴ ٦-س^{٢} = ٣-٢س

∴ س^{٢} -٢س – ٣ = ٠ ∴ س=-١ ، س=٣

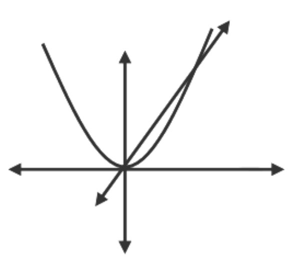
المساحة المحصورة = $\left| \int_{-١}^{٣} (٦ - س^{٢}) - (٣ - ٢س) \, ءس \right|$

$= \left| \int_{-١}^{٣} (٣ + ٢س - س^{٢}) \, ءس \right| = \left| \left[٣س + س^{٢} - \frac{١}{٣} س^{٣} \right]_{-١}^{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣}$

السؤال الثالث

اوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٢} والمستقيم ص = ٢س

====================================== الحل ======================================



نقط التقاطع ∴ س^{٢} =٢س ∴ س=٠ ، ٢ ، بوضع ص=٠ ∴ س =٠

∴ ح = $\left| \pi \int_{٠}^{٢} (س^{٤} - ٤س^{٢}) \, ءس \right| = \frac{٦٤}{١٥} \pi$

السؤال الرابع

إذا كان س ص = حا٢س فأثبت أن س ص ً + ٢ص َ + ٤ س ص = ٠

==================== الحل ====================

س ص = حا٢س (باشتقاق الطرفين بالنسبة الى س)

س صَ + ص = ٢ حتا ٢س

س صً + صَ + صَ = - ٤ حا٢س

س صً + صَ + صَ = - ٤ س ص

س صً + ٢صَ +٤ س ص = ٠

السؤال الخامس

عين فترات التحدب لأعلى وفترات التحدب لأسفل ونقط الانقلاب (ان وجدت) لمنحنى الدالة د :

د(س) = (س – ١)^{٤} + ٣

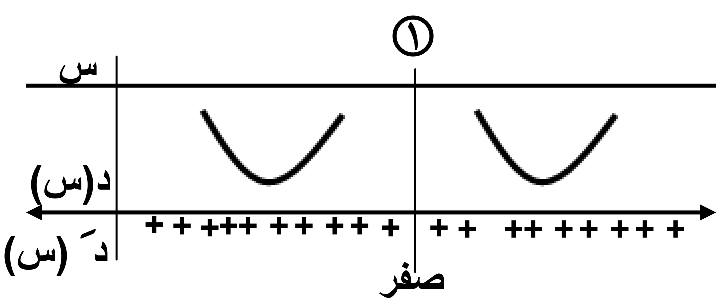
==================== الحل ====================

دَ (س) = ٤(س-١)^{٣}

دً (س) = ١٢ (س-١)^{٢}

بوضع دً(س) = ٠ ∴ س = ١

المنحنى محدب لأسفل في الفترتين



] - ∞ ، ١ [،] ١ ، ∞ [وليس له نقطة انقلاب

السؤال السادس

عين القيم القصوى المطلقة للدالة د في الفترة [٠ ، ٢] حيث د(س) = $٣\sqrt{٤ - س^{٢}}$

================================== الحل ==========================

تذكر أن : مشتقة دالة الجذر التربيعي = $\frac{\text{مشتقة ما بداخل الجذر}}{\text{٢ الجذر}}$

$د'(س) = ٣ \times \frac{-٢س}{٢\sqrt{٤ - س^{٢}}} = \frac{-٣س}{\sqrt{٤ - س^{٢}}}$

د َ(س) = ٠ عندما س = ٠ ، ٠ ∈ [٠ ، ٢]

د َ(س) غير معرفة عندما س = ٢ ، س = -٢

خدبالك : ٢ ∈ [٠ ، ٢] بينما -٢ ∉ [٠ ، ٢]

د(٠) = ٦ ، د(٢) = ٠

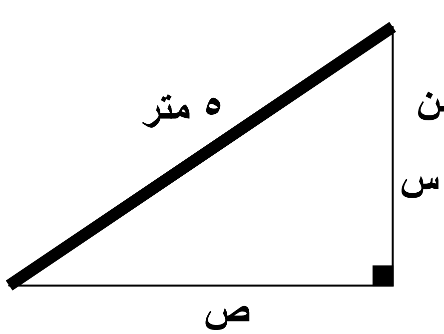
الدالة لها قيمة عظمى مطلقه هي ٦ وذلك عند س = ٠ ولها قيمة صغرى مطلقة وذلك عند س = ٢

السؤال السابع

قضيب طوله ٥ أمتار مثبت بمفصل في الأرض عند أحد طرفيه ، فإذا رُفع طرفه الآخر رأسياً إلى أعلى بوسطة ونش بمعدل ١ متر / دقيقة . أوجد معدل تناقص طول مسقط القضيب على الأرض عندما يكون ارتفاع هذا الطرف ٣ أمتار

================================== الحل ==========================

$\frac{دس}{دن}$ = ١ م / د



من هندسة الشكل $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

عندما س = ٣ ، من العلاقة السابقة يكون ص = ٤

$٢س \frac{دس}{دن} + ٢ص \frac{دص}{دن} = ٠$

$٢ \times ٣ \times ١ + ٨ \frac{دص}{دن} = ٠$

$٦ + ٨ \frac{دص}{دن} = ٠$ ∴ $\frac{دص}{دن} = -\frac{٣}{٤}$ متر / د

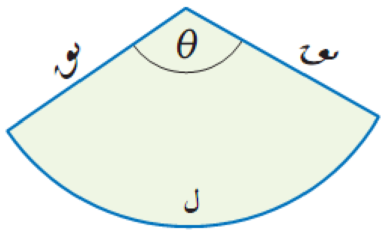
السؤال الثامن

اذا كان محيط قطاع دائري = ١٢ سم فأوجد قياس زاوية القطاع الذى يجعل مساحته أكبر ما يمكن

==================== الحل ====================

تذكرأن : محيط القطاع الدائري = ٢نق + ل

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق ل



∵ محيط القطاع = ٢نق + ل ∴ ل = ١٢ - ٢نق ⇐ (١) ،

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل× نق = $\frac{١}{٢}$ نق(١٢-٢نق) = ٦نق – نق^{٢} بالاشتقاق بالنسبة لـ نق

∴ $\frac{دم}{دنق}$ = ٦ – ٢نق ، $\frac{د^{٢}م}{دنق^{٢}}$ = –٢ < ٠ ، بوضع $\frac{دم}{دنق}$ = ٠ ∴ نق = ٣ قيمة عظمى

∴ أكبر مساحة عند نق=٣ ، ل = ١٢ - ٢×٣ = ٦ سم ∴ $\theta^{ء}$ = $\frac{ل}{نق}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢^{ء}

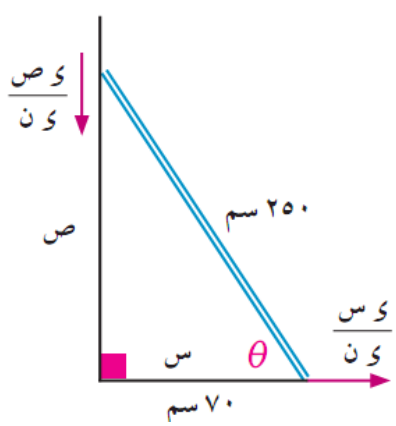
السؤال التاسع

يستند سلم طوله ٢٥٠ سم على حائط رأسي ، فإذا انزلق الطرف العلوى للسلم الى أسفل الحائط بمعدل ١٠سم / ث عندما يكون الطرف السفلى للسلم على بعد ٧٠ سم من الحائط أوجد

(١) معدل انزلاق الطرف السفلى للسلم

(٢) معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض

==================== الحل ====================



نفرض أن س هي المسافة بين الطرف السفلى للسلم والحائط الرأسي

نفرض أن ص هي المسافة بين الطرف العلوى للسلم والحائط الرأسي

من نظرية فيثاغورث س^{٢} + ص^{٢} = (٢٥٠)^{٢} ——← (١)

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للزمن

٢س $\frac{دس}{دن}$ + ٢ص $\frac{دص}{دن}$ = ٠ (÷٢)

س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ + ص $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٠ **(٢)**

وهذا يعنى أن الطرف العلوى ينزلق $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = - ١٠ سم / ث

عند س = ٧٠ بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ ص = ٢٤٠

بالتعويض في (٢) ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٢٤٠}{٧}$ سم / ث (أولاً)

نفرض أن θ قياس زاوية ميل السلم على الأرض

حا θ = $\frac{\text{ص}}{٢٥٠}$ باشتقاق الطرفين بالنسبة الى ن

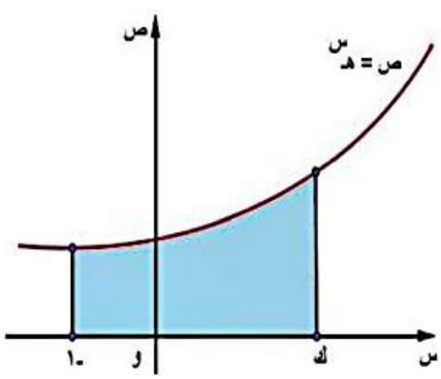
حتا θ $\frac{\text{د}\theta}{\text{دن}} = \frac{١}{٢٥٠}\,\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ⟵ —— $\frac{٧٠}{٢٥٠} \times \frac{\text{د}\theta}{\text{دن}} = \frac{١}{٢٥٠} \times$ - ١٠

$\frac{\text{د}\theta}{\text{دن}}$ = -$\frac{١}{٧}$ ء / ث

أى أن قياس الزاوية يتناقص بمعدل $\frac{١}{٧}$ زاوية نصف قطرية / ث

السؤال العاشر

في الشكل المقابل :
اذا كان حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور السينات
والمستقيم س = - ١ ، س = ك
تساوي $\frac{\pi}{٢}$ (هـ^{١٠} − هـ$^{-٢}$) وحدة مكعبة
أوجد قيمة ك .



================================ **الحل** ================================

حجم الجزء الناشئ من الدوران حول محور السينات = $\pi \int_{-١}^{\text{ك}} \text{ص}^٢ \, \text{دس}$

$\frac{\pi}{٢}$ (هـ^{١٠} − هـ$^{-٢}$) = $\pi \int_{-١}^{\text{ك}}$ هـ$^{٢\text{س}}$. دس ⟵ $\frac{١}{٢}$(هـ^{١٠} − هـ$^{-٢}$) = $\frac{١}{٢}$ [هـ$^{٢\text{س}}$]$_{-١}$

(هـ^{١٠} − هـ$^{-٢}$) = (هـ$^{٢\text{ك}}$ − هـ$^{-٢}$) ⟵ (هـ^{١٠} = هـ$^{٢\text{ك}}$) ⟵ ك = ٥

السؤال الحادي عشر

أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى ٢ + لو$_{هـ}$ ص . لو$_{هـ}$ س = س^{٢} + ص عند النقطة التي احداثيها السيني = ١

==================================== الحل ====================================

٢ + لو$_{هـ}$ ص . لو$_{هـ}$ س = س^{٢} + ص بالتعويض عن س بـ (١)

٢ + صفر = ١ + ص

ص = ١ ∴ نقطة التماس (١ ، ١)

بالاشتقاق بالنسبة الى س

لو$_{هـ}$ ص × $\frac{١}{س}$ + لو$_{هـ}$ س × $\frac{١}{ص}$ × $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢س + $\frac{ءص}{ءس}$

عن النقطة (١ ، ١)

صفر = ٢ × ١ + $\frac{ءص}{ءس}$ ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = -٢

ميل المماس = -٢ وميل العمودي عليه = $\frac{١}{٢}$

معادلة المماس هي

ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)

ص-١ = -٢(س – ١)

٢س + ص – ٣ = ٠

معادلة العمودى

ص – ص$_{١}$ = م(س – س$_{١}$)

ص – ١ = $\frac{١}{٢}$ (س – ١)

س – ٢ص + ١ = ٠

السؤال الثاني عشر

أوجد مشتقة $\sqrt{س^{2} + ٥}$ بالنسبة الى $\frac{س}{س + ٢}$ عند س = ٢

================================ الحل ========================

نفرض ص = $\sqrt{س^{2} + ٥}$ ، ع = $\frac{س}{س + ٢}$

∴ المطلوب $\frac{ءص}{ءع}$

$\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢س}{٢\sqrt{س^{2} + ٥}}$ بالتعويض عن س بـ ٢ ⟵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{ءع}{ءس} = \frac{س + ٢ - س}{(س + ٢)^{2}} = \frac{٢}{(س + ٢)^{2}}$ بالتعويض عن س بـ ٢ ⟵ $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٨}$

$\frac{ءص}{ءع} = \frac{٢}{٣} \div \frac{١}{٨} = ٥\frac{١}{٣}$

السؤال الثاني عشر

إذا كان د(س) + د̸(س) + د̸̸(س) = $س^{3} + ٧س^{2} + ٩س - ٢$ أوجد د(س)

================================ الحل ========================

نفرض د(س) حسب أكبر درجة موجودة في الطرف الأيسر

نفرض د(س) = $ا س^{3} + ب س^{2} + حـ س + د$ ....(١)

د̸(س)= $٣ا س^{2} + ٢ب س + حـ$ ....(٢)

د̸̸(س) = $٦ا س + ٢ب$ ....(٣)بجمع (١) ، (٢) ، (٣)

د(س) + د̸(س) + د̸̸(س) = $ا س^{3}$ + (٣ا + ب)$س^{2}$ + (٦ا + ٢ب + حـ) س + حـ + د .....(٥)

د(س) + د̸(س) + د̸̸(س) = $س^{3} + ٧س^{2} + ٩س - ٢$ ....(٦)

بمقارنة معاملات المعادلتين (٥) ، (٦)

∴ ٫ = ١ ، ٣٫ + ب = ٧ ⟵ ٣ + ب = ٧ ⟵ ب = ٤

٦٫ + ٢ب + حـ = ٩

٦ + ٨ + حـ = ٩ ⟵ حـ = - ٥

حـ + د = -٢

-٥ + د = -٢ ⟵ د = ٣

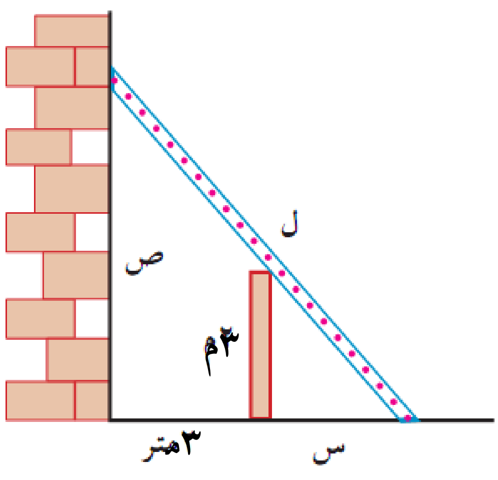
∴ د(س) = س^{٣} + ٤س^{٢} ــ ٥س + ٣

السؤال الثالث عشر

جدار ارتفاعه ٣ متر ويبعد ٣متر عن أحد المنازل . أوجد طول أقصر سلم يصل من الأرض الى المنزل مرتكزاً على الجدار

================================ الحل ================================

نفرض طول السلم = ل ، ارتفاع قمة السلم عن الأرض = ص ، بُعد طرف السلم السفلى عن الجدار = س



من نظرية فيثاغورث ل^{٢} = (س + ٣)^{٢} + ص^{٢}

من تشابه المثلثين الأصغر والأكبر نجدأن $\frac{ص}{٢} = \frac{س + ٣}{س}$

ص = ٣ + ٩س$^{-١}$

ص َ = $\frac{-٩}{س^{٢}}$

ل^{٢} = ص^{٢} + (س + ٣)^{٢}

٢ل × لَ = ٢ص × صَ + ٢(س + ٣)

٢ل لَ = ٢ (س+٣) + ٢(٣ + $\frac{٩}{س}$) ($\frac{-٩}{س^{٢}}$) = ٢(س+٣)+ ٦ (س+٣) ($\frac{-٩}{س^{٣}}$)

٢ ل لَ = ٢ (س+٣)(١ - $\frac{٢٧}{س^{٣}}$) بوضع لَ = ٠ نجدأن س = - ٣(مرفوض) أو س = ٣

ثم اكمل الحل

السؤال الرابع عشر

ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة المتصلة د الذى يحقق الخواص الآتية

(١) د(٠) = ٣

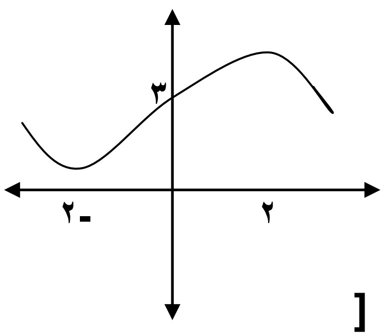
(٢) دَ (٢) = دَ (-٢) = ٠

(٣) دَ (س) > ٠ عندما -٢ < س < ٢

(٤) دً (س) > ٠ عندما س < ٠ ، دً (س)< ٠ عندما س> ٠

================================ الحل ======================

∵ د(٠) = ٣ ∴ النقطة (٠،٣) تنتمى لمنحنى الدالة



∵ دَ (٢) = دَ (-٢) = ٠

∴ للمنحنى نقط حرجه عند س = ٢ ، س = -٢

وعند هاتين النقطتين المماس يوازى محور السينات

دَ (س) > ٠ عندما -٢ < س < ٢ الدالة تزايديه في الفترة] -٢ ، ٢ [

دً (س) > ٠ عندما س < ٠ المنحنى محدب لأعلى عندما س < ٠

دً (س) < ٠ عندما س > ٠ المنحنى محدب لأسفل عندما س > ٠

وبالتالى النقطة (٠، ٣) هى نقطة انقلاب

السؤال الخامس عشر

إذا كانت د دالة متصلة على ح ، $\int_{٣}^{٤}$ د(س) . وس = ٣ ، $\int_{٣}^{٥}$ د(س) . وس = ٤ فأوجد $\int_{٥}^{٤}$ د(س) . وس

================================ الحل ======================

$\int_{٤}^{٥}$ د(س) .وس = $\int_{٣}^{٥}$ د(س) . وس - $\int_{٣}^{٤}$ د(س) . وس = ٤ – ٣ = ١

$\int_{٥}^{٤}$ د(س). وس = -١

السؤال السادس عشر

إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى الدالة د(س) هو $\frac{١}{٣ - ٣س^{٢}}$ فأوجد القيم العظمى والصغرى المحلية لمنحنى الدالة د ونقط الانقلاب ان وجدت علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (-٢ ، -١)

================================ الحل ================================

∵ ميل العمودي = $\frac{١}{٣ - ٣س^{٢}}$

∴ ميل المماس = -(٣ − ٣س^{٢}) = ٣س^{٢} − ٣

د(س) = $\int$ (٣س^{٢} − ٣) . ءس = س^{٣} − ٣س + ث

المنحنى يمر بالنقطة (-٢ ، -١)

-١ = -٨ + ٦ + ث ∴ ث = ١

د(س) = س^{٣} − ٣س + ١

د$'$ (س) = ٣س^{٢} − ٣ ، د$''$ (س) = ٦س

نضع د$'$ (س) = ٠

∴ س = ± ١

د$''$ (١) = ٦ > ٠ د$''$ (-١) = -٦ < ٠

عند س = ١ صغرى محلية عند س = -١ عظمى محلية

د(١) = ١ − ٣ + ١ = -١ د(-١) = -١ + ٣ + ١ = ٣

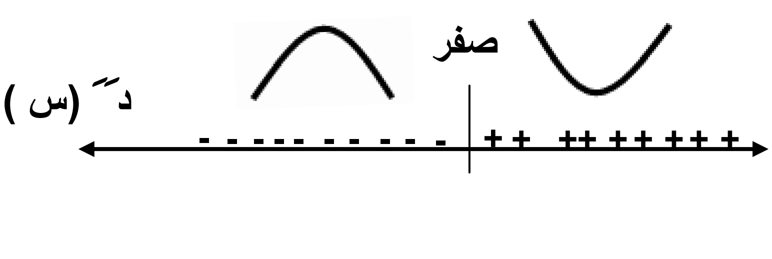
(١ ، -١) نقطة صغرى محلية (-١ ، ٣) نقطة عظمى محلية)

بوضع د$''$ (س) = ٠ نجد أن س = ٠

المنحنى محدب لأعلى فى الفترة] − ∞ ، ٠ [

ومحب لأسفل فى الفترة] ٠ ، ∞ [

النقطة (٠ ، ١) هى نقطة انقلاب



السؤل السابع عشر

إذا كان ص = $\text{س}^{\text{س}}$ فأثبت أن ص´´ = ص (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س)^{٢} + $\text{س}^{\text{س}-١}$

=============================== الحل =======================

ص = $\text{س}^{\text{س}}$ بأخذ لو$_{\text{هـ}}$ للطرفين

لو$_{\text{هـ}}$ ص = لو$_{\text{هـ}}$ $\text{س}^{\text{س}}$ ⟵ لو$_{\text{هـ}}$ ص = س لو$_{\text{هـ}}$ س

باشتقاق الطرفين بالنسبة الى س

$\frac{١}{\text{ص}}$ × ص´ = س × $\frac{١}{\text{س}}$ + لو$_{\text{هـ}}$ س

$\frac{\text{ص´}}{\text{ص}}$ = ١ + لو$_{\text{هـ}}$ س

ص´ = ص (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س) نشتق الطرفين مرة أخرى بالنسبة الى س .... (١)

ص´´ = ص × $\frac{١}{\text{س}}$ + ص´ (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س)

ص´´ = $\text{س}^{\text{س}}$ × $\text{س}^{-١}$ + ص´ (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س) ....(٢) بالتعويض من(١) فى(٢)

ص´´ = $\text{س}^{\text{س}-١}$ + ص (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س) (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س)

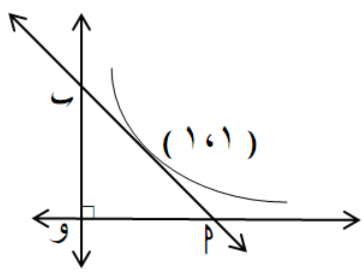
ص´´ = $\text{س}^{\text{س}-١}$ + ص (١ + لو$_{\text{هـ}}$ س)^{٢}

السؤال الثامن عشر :

اثبت ان مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى ص = $\frac{١}{س}$ حيث س > ٠

عند النقطة (١،١) الواقعة عليه ومحور السينات ومحور الصادات تساوي ٢ .

=============================== الحل ===============================



ﺃ) ∵ ص = $\frac{١}{س}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س^٢}$

وميل المماس عند النقطة (١،١) = -١

ومعادلته

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م ← $\frac{ص-١}{س-١}$ = -١

∴ ص - ١ = - س + ١ أي أن $\boxed{ص + س = ٢}$

ونقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين هما ﺃ (٢،٠) ، ب(٠،٢)

∴ م △ ﺃ و ب = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ = ٢ وحدة مربعة

السؤال التاسع عشر

إذا كانت ص = س حتاس فأثبت أن ص‴ دالة فردية

=============================== الحل ===============================

ص´ = حتاس + س × - حاس = حتاس – س حاس

ص˝ = - حاس – (س حتاس + حاس)

ص‴ = - حاس – س حتاس – حاس = - ٢حاس – س حتاس

د‴ (- س) = -٢ حا (- س) – (- س × حتا (- س))

= ٢ حاس + س حتاس = - د‴ (س)

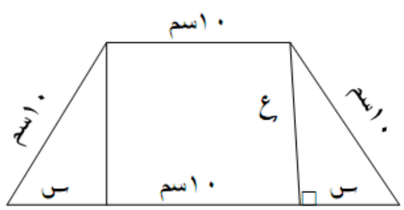
∴ ص‴ دالة فردية

السؤال العشرون

شبه منحرف طول كل من قاعدته الصغرى وكل من ضلعيه الجانبيين ١٠سم ٠

عين طول قاعدته الكبرى الموازية للقاعدة الصغرى بحيث تكون المساحة أكبر مايمكن٠

================================ الحل ================================



$\because$ $ع^{٢} = ١٠٠ - س^{٢}$

$\therefore$ $ع = (١٠٠ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

م شبه المنحرف $= \frac{١٠ + (١٠ + ٢س)}{٢} \times ع$

$= (س + ١٠)\, ع$

$= (س + ١٠)(١٠٠ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{دم}{دس} = (١٠٠ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}} + (س + ١٠) \times \frac{١}{٢}(١٠٠ - س^{٢})^{\frac{-١}{٢}} \times -٢س$

$= (١٠٠ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}} - \frac{س^{٢} + ١٠س}{(١٠٠ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١٠٠ - س^{٢} - س^{٢} - ١٠س}{(١٠٠ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$

$\therefore$ صفر $= \frac{-٢س^{٢} - ١٠س + ١٠٠}{(١٠٠ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$

$\leftarrow$ $-٢(س^{٢} + ٥س - ٥٠) =$ صفر

$\therefore$ $س = -١٠$ (مرفوض) ، $س = ٥$

أي أن طول القاعدة الكبرى = ٢٠ سم

السؤال الحادي والعشرون

أوجد (i) $\int س^{٨} \left(\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}} \right)^{٤} ءس$

(ii) $\int ٤ \, حا^{٢} \frac{س}{٢} \, حتا^{٢} \frac{س}{٢} \, ءس$

====================== الحل ======================

(i) $\int س^{٨} \left(\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}} \right)^{٤} ءس = \int س^{٨} \left(\frac{٢س+٣}{س^{٢}} \right)^{٤} ءس$

$= \int \cancel{س^{٨}} \frac{(٢س+٣)^{٤}}{\cancel{س^{٨}}} ءس = \int (٢س + ٣)^{٤} ءس$

$= \frac{(٢س+٣)^{٥}}{٥ \times ٢} + ث = \frac{(٢س+٣)^{٥}}{١٠} + ث$

(ii) $\int ٤ \, حا^{٢} \frac{س}{٢} \, حتا^{٢} \frac{س}{٢} \, ءس = \int ٤ \left(حا \frac{س}{٢} \, حتا \frac{س}{٢} \right)^{٢} ءس$

$= \int ٤ \left(\frac{١}{٢} حا س \right)^{٢} ءس = \int حا^{٢} س \, ءس$

$= \int \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} حتا ٢س \right) ءس = \frac{١}{٢} س - \frac{١}{٤} حا ٢س + ث$

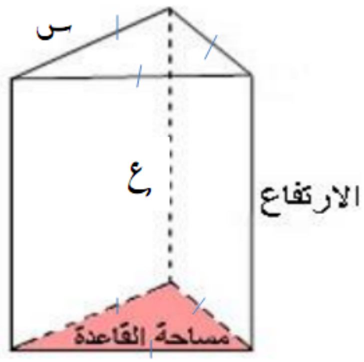
السؤال الثاني والعشرون

منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ع سم وقاعدته مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه س سم وفي لحظة ما كان البعد س يتزايد بمعدل $\frac{١}{٢}$ سم/ ث بينما يتناقص الإرتفاع بمعدل ١سم/ ث وبذلك يظل حجم المنشور ثابتاً ٠

فاثبت عند تلك اللحظة أن س = ع

====================== الحل ======================

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الإرتفاع



$= \frac{١}{٢}$ س^{٢} حا ٦٠° ع

$= \frac{١}{٢}$ س^{٢} × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ع

$= \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢} ع

$\frac{دح}{دن} = \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (٢س ع $\frac{دس}{دن}$ + س^{٢} $\frac{دع}{دن}$)

صفر $= \frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ($\cancel{٢}$ س ع × $\frac{١}{\cancel{٢}}$ + س^{٢} × -١)

س ع - س^{٢} = صفر

س(ع - س) = صفر

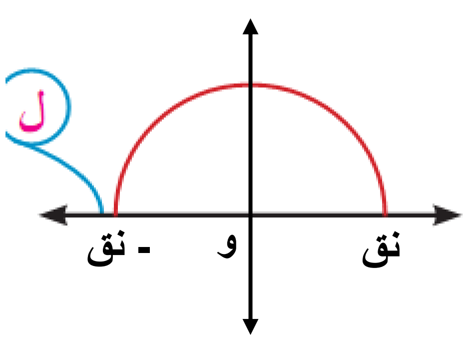
س = صفر (مرفوض) ، س = ع

السؤال الثالث والعشرون

باستخدام التكامل أثبت أن حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

================================ الحل ========================

الكرة تنشأ من دوران نصف دائرة دورة كاملة



معادلة الدائرة هى س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

ص^{٢} = نق^{٢} – س^{٢}

ح = $\pi \int_{-نق}^{نق}$ ص^{٢} .ءس = $\pi \int_{-نق}^{نق}$ (نق^{٢} – س^{٢}) . ءس

ح = $\left[\text{نق}^{٢} \text{س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} \right]_{-نق}^{نق}$ = $\pi \left[(\text{نق}^{٣} - \frac{١}{٣}\text{نق}^{٣}) - (-\text{نق}^{٣} + \frac{١}{٣}\text{نق}^{٣}) \right]$ = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

السؤال الرابع والعشرون

أوجد معادلة المنحنى ص = د(س) إذا كان ص" = ا س + ب حيث ا ، ب ثابتان وللمنحنى نقطة انقلاب عند (٠ ، ١) وقيمة صغرى محلية عند (٢ ، ٠) ثم أوجد موقع القيمة العظمى المحلية

=============================== الحل ===============================

ب) ∵ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = ا\,س + ب$ والمنحنى له نقطة انقلاب عند (٠،١)

∴ د"(صفر) = صفر ← ب = صفر   ∴ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = ا\,س$

$\frac{ءص}{ءس} = \int ا\,س\;ءس = \frac{1}{2}\,ا\,س^2 + ث_1$ وللمنحنى قيمة صغرى عند (٢،٠)

∴ د'(٢) = صفر ← $\frac{1}{2}\,ا \times 4 + ث_1 =$ صفر

أي أن $2ا + ث_1 =$ صفر ....← (١)

، ص = $\int (\frac{1}{2}\,ا\,س^2 + ث_1)\;ءس = \frac{1}{6}\,ا\,س^3 + ث_1\,س + ث_2$

،(٠،١) تحقق ← ١ = صفر + صفر + $ث_2$ ∴ $ث_2 = 1$

، ص = $\frac{1}{6}\,ا\,س^3 + ث_1\,س + 1$ ،(٢،٠) تحقق

صفر = $\frac{1}{6}\,ا \times 8 + 2ث_1 + 1$ × ٣   ∴ $4ا + 6ث_1 + 3 =$ صفر

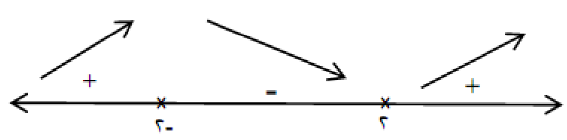
أي أن $4ا + 6ث_1 = -3$ ....← (٢)

ومن ١ ، ٢ $ا = \frac{3}{8}$ ، $ث_1 = \frac{-3}{4}$

∴ ص = $\frac{1}{6} \times \frac{3}{8}\,س^3 - \frac{3}{4}\,س + 1$ × ١٦

∴ ١٦ ص = $س^3 - 12\,س + 16$

∵ ١٦ ص' = $3\,س^2 - 12$ ∴ ص' = ٠ عندما س = ± ٢



عند س = -٢ عظمى محلية

∴ ١٦ ص = - ٨ + ٢٤ + ١٦

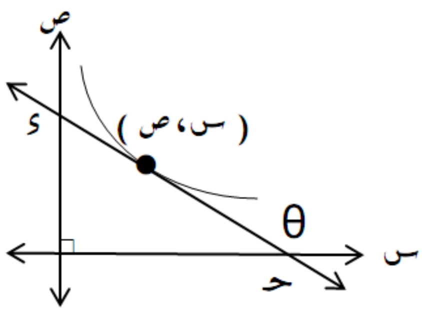
∴ ١٦ ص = ٣٢ ← ص = ٢   (-٢ ، ٢)

السؤال الخامس والعشرون

إثبت أن مجموع الجزئين المقطوعين من محوري الإحداثيات بأي مماس للمنحنى

$\sqrt{س} + \sqrt{ص} = أ$ هو دائماً مقدار ثابت حيث أ ثابت $\neq ٠$

================================ الحل ================================



طولا الجزئين حـ ، ء

$\sqrt{س} + \sqrt{ص} = أ$

$\frac{١}{٢\sqrt{س}} + \frac{١}{٢\sqrt{ص}} \frac{ءص}{ءس} = ٠$

ومنها $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ = ميل المماس

لكن ميل المماس = ظا θ = $\frac{-ء}{حـ}$

$\therefore \frac{-ء}{حـ} = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ ومنها ء = ك $\sqrt{ص}$ ، حـ = ك $\sqrt{س}$

$\therefore$ مجموع الجزئين = حـ + ء = ك $\sqrt{ص}$ + ك $\sqrt{س}$

= ك ($\sqrt{ص} + \sqrt{س}$) = ك أ (مقدار ثابت)

السؤال السادس والعشرون

أوجد $\int$ ظتاس قتا^{٣}س . وس

================================ الحل ================================

تذكران مشتقة قتاس هى- قتاس ظتاس

$\int$ ظتاس قتا^{٣}س . وس = $\int$ ظتا س قتاس قتا^{٢}س . وس

تذكر أن $\int$ (دالة)^{ن} × مشتقتها . وس = + ث

$\int$ ظتا س قتاس قتا^{٢}س. وس = - $\frac{١}{٣}$ قتا^{٣}س + ث

السؤال السابع والعشرون

اذا كان ميل المماس لمنحنى عند أى نقطة عليه (س ، ص) معطى بالعلاقة:

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جا س جتا س ، أوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{6}$ ، ١)

================================ الحل ======================

∵ ميل مماس المنحنى عند أى نقطة: $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = جا س جتا س

∴ معادلة المنحنى : ص = $\int$ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$. ء س = $\int$ جا س جتا س ء س

= $\frac{1}{2}$ $\int$ ٢ جا س جتا س ء س = $\frac{1}{2}$ $\int$ جا ٢ س ء س

= $\frac{1}{2}$ × - $\frac{1}{2}$ جتا ٢ س + ث = - $\frac{1}{4}$ جتا ٢ س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{6}$ ، ١)

∴ فهي تحقق معادلة

١ = - $\frac{1}{4}$ جتا (٢ × $\frac{\pi}{6}$) + ث ∴ ث = ١ + $\frac{1}{8}$ = $\frac{9}{8}$

∴ معادلة المنحنى هى : ص = - $\frac{1}{4}$ جتا ٢س + $\frac{9}{8}$

تذكر أن

جا ٢ س = ٢ جا س جتا س

جتا ٢ س = جتا^{2} س − جا^{2} س

= ١ − ٢ جا^{2} س

= ٢ جتا^{2} س − ١

السؤال الثامن والعشرون

أوجد $\int$ س لو$_{\text{هـ}}$ س . ءس

================================ الحل ======================

نستخدم التكامل بالتجزىء كالتالي

ص= لو$_{\text{هـ}}$ س   ءع=س.ءس

$\frac{1}{\text{س}}$ → $\frac{1}{2}$ س^{2}

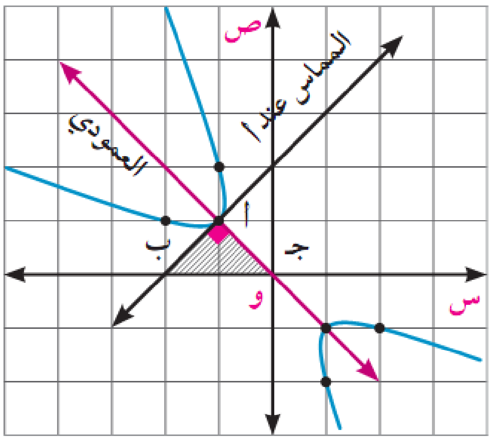
أوجد $\int$ س لو$_{\text{هـ}}$ س . ءس = $\frac{1}{2}$س^{2} لو$_{\text{هـ}}$ س - $\int$ $\frac{1}{2}$س . ءس = $\frac{1}{2}$س^{2}لو$_{\text{هـ}}$ س - $\frac{1}{4}$ س^{2} + ث

السؤال التاسع والعشرون

أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى س^{٢} – ٣س ص + ص^{٢} + ١ = ٠ عند النقطة ؟(-١ ، ١)

وإذا قطعا محور السينات في النقطتين ب ، جـ فاحسب مساحة المثلث ؟ ب جـ بالوحدات المربعة

==================================== الحل ==========================



∵ س^{٢} + ٣س ص + ص^{٢} + ١ = ٠

النقطة أ (-١ ، ١) تحقق معادلة المنحنى فهى تقع عليه باشتقاق طرفى معادلة المنحنى بالنسبة إلى س لإيجاد ميل المماس عند أى نقطة

∴ ٢ س + ٣س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٣ص + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

عند النقطة أ (-١ ، ١) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١

∴ ميل المماس = ١ ، ميل العمودى = -١

معادلة المماس : ص - ١ = س + ١ أى ص = س + ٢

معادلة العمودى : ص - ١ = - (س + ١) أى ص = -س

بحل معادلتى المماس والعمودى مع معادلة محور السينات ص = ٠ لإيجاد نقط التقاطع ب ، جـ

∴ النقطة ب (-٢، ٠) ، النقطة جـ (٠ ، ٠) ويكون ب جـ = ٠ - (-٢) = ٢

مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ وحدة مربعة

السؤال الثلاثون

إذا كان $\int_{١}^{٤}$ د(س) .وس = ٧ ، $\int_{٤}^{١}$ ر(س) .وس = ٣ احسب قيمة $\int_{١}^{٤}$ [د(س) + ٢ر(س) – ٤] .وس

==================================== الحل ==========================

$\int_{١}^{٤}$ ر(س) .وس = -٣

المطلوب = $\int_{١}^{٤}$ د(س). وس + ٢ $\int_{١}^{٤}$ ر(س).وس - $\int_{١}^{٤}$ ٤ . وس

= ٧ – ٦ - $[\,$٤س$\,]_{١}^{٤}$

= ٧ – ٦ -١٢ = -١١

السؤال الحادي و الثلاثون

أوجد $\int$ س^{٢} $\sqrt{٢س+١}$.ءس

================================== الحل ==========================

يمكن استخدام التكامل بالتعويض كالتالي

بوضع ع^{٢} = ٢س + ١ ⟵ ٢ ع . ءع = ٢.ءس ⟵ ع . ءع =ءس

وبالتالي فإن س = $\frac{ع^{٢}-١}{٢}$

$\int$ س^{٢} $\sqrt{٢س+١}$.ء س = $\int \left(\frac{ع^{٢}-١}{٢}\right)^{٢}$ ×ع × ع . ءع

$\int \frac{ع^{٤}-٢ع^{٢}+١}{٤}$ ع^{٢}.ءع = $\frac{١}{٤}\int$ (ع^{٦} – ٢ع^{٤} + ع^{٢}) . ءع

$\frac{١}{٤}$ ($\frac{١}{٧}$ع^{٧} - $\frac{٢}{٥}$ع^{٥} + $\frac{١}{٣}$ ع ^{٣}) + ث

= $\frac{١}{٤}$ [$\frac{\sqrt{(٢س+١)^{٧}}}{٧}$ - ٢ × $\frac{\sqrt{(٢س+١)^{٥}}}{٥}$ + $\frac{\sqrt{(٢س+١)^{٣}}}{٣}$] + ث

السؤال الثاني والثلاثون

أوجد $\int_{٠}^{٥}$ | س – ٢ | .ءس

================================== الحل ==========================

بوضع س-٢=٠ نجد أن س = ٢ ثم نعيد تعريف المقياس كالتالي

د(س) = { س – ٢ ، س ⩾٢ ؛ ٢ – س ، س <٢ }

$\int_{٠}^{٥}$ | س – ٢ | .ءس = $\int_{٠}^{٢}$ (٢ - س).ءس + $\int_{٢}^{٥}$ (س – ٢).ءس

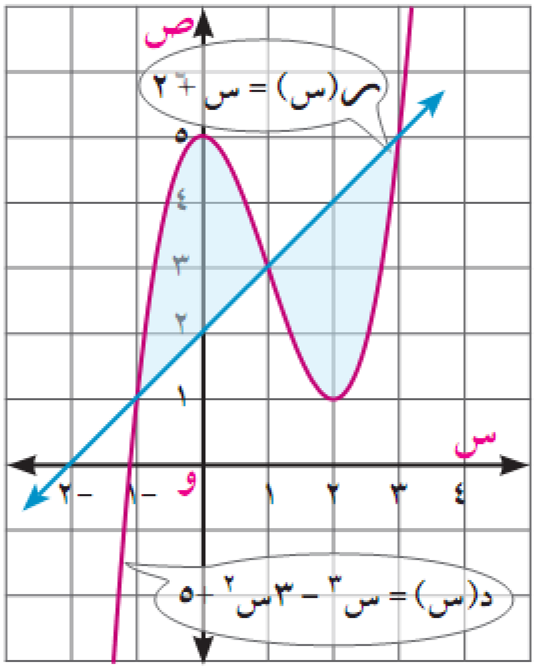
= [٢س - $\frac{١}{٢}$س^{٢}]$_{٠}^{٢}$ + [$\frac{١}{٢}$س^{٢} – ٢س]$_{٢}^{٥}$ = ٢ + (٢,٥ – (-٢)) = ٢ + ٤,٥ = ٦,٥

السؤال الثالث والثلاثون

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د ومنحنى الدالة ر حيث

د(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥ ، ر(س) = س + ٢

==================== الحل ====================



➢ لإيجاد الإحداثيات السينية لنقط التقاطع:

نضع د(س) = ر(س)

س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥ = س + ٢

س^{٣} ـ ٣س^{٢} - س + ٣ = ٠

(س^{٣} - ٣س^{٢}) - (س - ٣) = ٠

س^{٢} (س - ٣) - (س - ٣) = ٠

(س - ٣) (س - ١) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ أو س = ١ أو س = -١

➢ يكون التكامل على الفترتين [-١، ١] ، [١، ٣] لإيجاد المساحة المطلوبة وهى عبارة عن مساحتين أى:

م = م$_{١}$ + م$_{٢}$

م = $\left|\int_{-١}^{١}$ [د(س) - ر(س)] ء س$\right|$ + $\left|\int_{١}^{٣}$ [د(س) - ر(س)] ء س$\right|$

= $\left|\int_{-١}^{١}$ (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥ - س - ٢) ء س$\right|$ + $\left|\int_{١}^{٣}$ (س^{٣} - ٣س^{٢} - س + ٣) ء س$\right|$

= $\left|\left[\frac{١}{٤}\right.\right.$س^{٤} - س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣س$\left.\left.\right]_{-١}^{١}\right|$ + $\left|\left[\frac{١}{٤}\right.\right.$س^{٤} - س^{٣} - $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣س$\left.\left.\right]_{١}^{٣}\right|$

= |-٢ + ٦| + |٢٦ - ٣٠| = ٤ + ٤ = ٨ وحدات مربعة

السؤال الرابع والثلاثون

إذا كان العمودي للمنحنى ص = ٤ – س^{٢} عند النقطة (١ ، ٣) يقطع المنحنى مرة أخرى عند حـ .

أوجد معادلة المماس عند النقطة حـ

================================= الحل =========================

نوجد ميل المماس $\frac{ءص}{ءس}$ = -٢س

$\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة (١ ، ٣) = -٢ ميل العمودي = $\frac{١}{٢}$

معادلة العمودي هي ص – ص$_{١}$ = م(س – س$_{١}$)

ص – ٣ = $\frac{١}{٢}$ (س – ١)

معادلة العمودي هي س – ٢ص + ٥ = ٠

نحل المعدلتين س -٢ص + ٥ = ٠ ، ص = ٤ – س^{٢} سوياً

س – ٨ + ٢س^{٢} + ٥ = ٠

٢س^{٢} + س – ٣ = ٠

(٢س + ٣) (س – ١) = ٠

اما س = ١ وبالتالي ص = ٣ النقطة الأولى (١ ، ٣) معطى فى الاساس

أو س = - $\frac{٣}{٢}$ وبالتالي ص = $\frac{٧}{٤}$ النقطة الثانية (- $\frac{٣}{٢}$، $\frac{٧}{٤}$)

$\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة الثانية = ٣

معادلة المماس هى ص – ص$_{١}$ = م(س – س$_{١}$)

١٢س – ٤ص + ٢٥ = ٠

السؤال الخامس والثلاثون

أوجد

(١) $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}\,\text{ءس}$ (٢) $\int \frac{٤\text{س}}{\sqrt[٣]{٢\text{س} + ١}}\,\text{ءس}$

=============================== الحل ===============================

(١)

لاحظ أن $(\text{س} + ١)^{-٢}$ أسهل فى التكامل

بوضع $\text{ص} = \text{س هـ}^{\text{س}}$ $\text{ءع} = (\text{س} + ١)^{-٢}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = (\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}})\,\text{ءس}$ $\text{ع} = \frac{-١}{\text{س}+١}$

$$\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(\text{س} + ١)^{٢}}\,\text{ءس} = -\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} - \int \frac{-١}{\text{س}+١} \times \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+١)\,\text{ءس}$$

$$= -\frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$$

$$= \frac{-\text{س هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{\text{س}}(\text{س}+١)}{\text{س}+١} + \text{ث} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{س}+١} + \text{ث}$$

(٢) بوضع $\text{ص} = ٤\text{س}$ $\text{ءع} = (٢\text{س}+١)^{-\frac{١}{٣}}\,\text{ءس}$

$\text{ءص} = ٤\,\text{ءس}$ $\text{ع} = \frac{٣}{٢\times٢}(٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}}$

$$\int \frac{٤\text{س}}{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١}}\,\text{ءس} = ٣\text{س}(٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}} - \int \frac{٣}{٤}(٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}} \times ٤\,\text{ءس}$$

$$= ٣\text{س}(٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}} - \frac{٣\times٣}{٥\times٢}(٢\text{س}+١)^{\frac{٥}{٣}} + \text{ث}$$

$$= \frac{٣}{١٠}(٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}}\left[١٠\text{س} - ٣(٢\text{س}+١)\right] + \text{ث}$$

$$= \frac{٣}{١٠}(٢\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}}(٤\text{س} - ٧) + \text{ث}$$

السؤال السادس والثلاثون

إذا كان حاص + حتا٢س = ٠ فأثبت أن ص˝ – (ص´)^{٢} طاص = ٤حتا٢س قاص

================================ الحل ========================

حاص + حتا٢س = باشتقاق الطرفين بالنسبة الى س

حتا ص × ص´ - ٢ حا٢س = ٠ باشتقاق الطرفين بالنسبة الى س

حتاص × ص˝ + ص´ × - حاص × ص´ – ٤ حتا٢س = ٠

حتاص × ص˝ - (ص´)^{٢} حاص – ٤ حتا٢س = ٠ (÷ حتا ص)

ص˝ – (ص´)^{٢} طاص - ٤حتا٢س قاص = ٠

ص˝ – (ص´)^{٢} طاص = ٤حتا٢س قاص

السؤال السابع والثلاثون

يُراد تصميم مُلصق مستطيل الشكل يحوى ٨٠٠ سم^{٢} من المادة المطبوعة بحيث يكون عرض كل من الهامشين العلوى والسفلى ١٠ سم وكل من الهامشين الجانبيين ٥سم ، ما بعدا الملصق اللذان يجعلان مساحته أصغر ما يمكن ؟

================================ الحل ========================

بفرض بعدى الملصق س ، ص

س ص = ٨٠٠ ⟵ ص = $\frac{٨٠٠}{س}$

مساحة المستطيل = (س + ٢٠)(ص + ١٠)

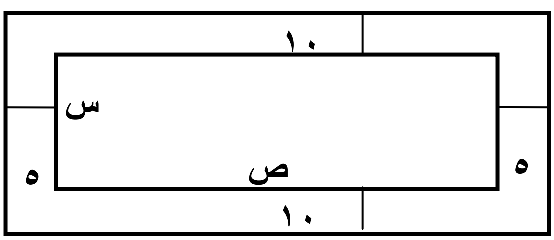
م = س ص + ١٠ س + ٢٠ص + ٢٠٠

م = ١٠٠٠ + ١٠س + ١٦٠٠ س$^{-١}$

م´ = ١٠ – ١٦٠٠ س$^{-٢}$

بوضع م´ = ٠ نجد أن س = ٤٠

م˝ = ٣٢٠٠ س$^{-٣}$



عند س = ٤٠ نجد أن ص˝ > ٠

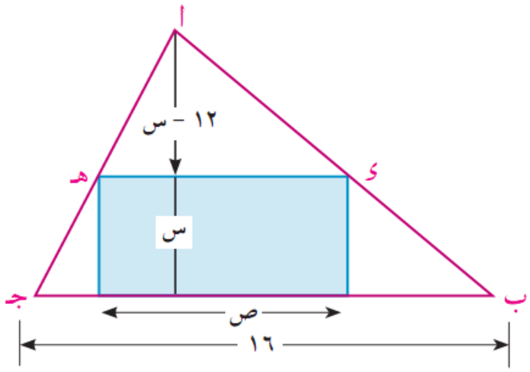
عند س = ٤٠ تجعل المساحة أصغر ما يمكن

بعدا المستطيل هما ٦٠ سم ، ٣٠ سم

السؤال الثامن والثلاثون

أوجد بعدى مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل مثلث طول قاعدته ١٦سم وارتفاعه ١٢سم بحيث ينطبق بأحد أضلاعه على قاعدة المثلث وتقع رأسا الضلع المقابل على الضلعين الآخرين للمثلث

================================ الحل ================================



مساحة المستطيل م = س ص .... (١)

يجب علينا ايجادعلاقة تربط بين س ، ص

من هندسة الشكل نجد أن Δأ ء هـ ∼ Δ أ ب جـ

$$\frac{ص}{١٦} = \frac{١٢ - س}{١٢}$$

١٢ص = ١٦ × ١٢ – ١٦س

ص = $\frac{٤}{٣}$ (١٢ – س) بالتعويض فى (١)

م = $\frac{٤}{٣}$ س (١٢ – س) = ١٦س - $\frac{٤}{٣}$ س^{٢}

م َ = ١٦ – $\frac{٨}{٣}$ س   بوضع م َ = ٠

س = ٦

نوجد م ً = ٣٢ – ٨س بالتعويض عن س = ٦ نجدأن م ً < ٠

عند س = ٦ تكون المساحة أكبر ما يمكن ، ص = $\frac{٤}{٣}$ (١٢ – ٦) = ٨

السؤال التاسع والثلاثون

باستخدام احدى طرق التكامل أوجد $\int$ لو$_{\text{هـ}}$ س . ءس

================================ الحل ================================

(١٠)   لو$_{\text{هـ}}$ س   ١

$\frac{١}{\text{س}}$ س

= س لو$_{\text{هـ}}$ س − $\int$ (١) ءس = س لو$_{\text{هـ}}$ س − س + ث

السؤال الأربعون

اختر : إذا كانت د(س) = (حتاس)$^{\text{حتاس}}$ فإن دَ (٠) = ...

(أ) صفر   (ب) -١   (جـ) -٣   (د) -٢

================================ الحل ================================

∵ ص= (حتاس)$^{\text{حتاس}}$

∴ لو$_{\text{هـ}}$ ص = لو$_{\text{هـ}}$ (حتاس)$^{\text{حتاس}}$

لو$_{\text{هـ}}$ ص = حتاس × لو$_{\text{هـ}}$ حتاس باشتقاق الطرفين بالنسبة الى س

ص$^{-١}$ × صَ = - حاس × لو$_{\text{هـ}}$ حتاس + ~~حتاس~~ × $\frac{١}{\cancel{\text{حتاس}}}$ × - حاس   (× ص)

صَ = ص × - حاس × لو$_{\text{هـ}}$ حتاس – حاس   بوضع س = ٠

صَ = ص × ٠ × لو$_{\text{هـ}}$ ١ – صفر = ٠

السؤال الحادي و الأربعون

إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{٢س + س}^{٢} & \text{عندما س < ٠} \\ \text{٢س - س}^{٢} & \text{عندما س} \geqslant \text{٠} \end{cases}$

أوجد

(١) القيم العظمى والصغرى للدالة

(٢) $\int_{-١}^{٣}$ د(س) . ءس

======================== الحل ========================

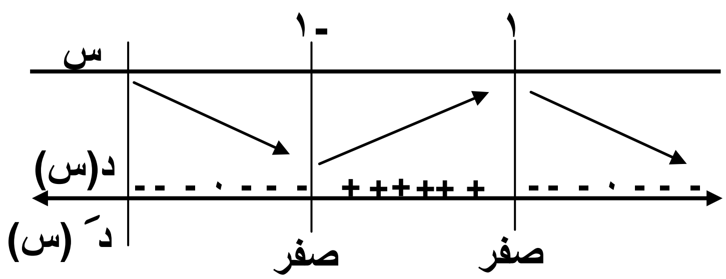
د َ(س) = $\begin{cases} \text{٢ + ٢س} & \text{عندما س < ٠} \\ \text{٢ - ٢س} & \text{عندما س > ٠} \end{cases}$

د َ(٠^{+}) = ٢ ، د َ(٠^{-}) = ٢

بوضع د َ(س) = ٠

٢ + ٢س = ٠ ، ٢ ــ ٢س ٠

س = ١- ، س = ١



الدالة لها قيمة صغرى محليه عند س = ١- قيمتها ١-

الدالة لها قيمة عظمى محليه عند س = ١قيمتها ١

$\int_{-١}^{٠}$ (٢س + س^{٢}) .ءس + $\int_{٠}^{٣}$ (٢س ــ س^{٢}). ءس = [س^{٢} + $\frac{١}{٣}$ س^{٣} $]_{-١}^{٠}$ + [س^{٢} - $\frac{١}{٣}$س^{٣} $]_{٠}^{٣}$

= - $\frac{٢}{٣}$

السؤال الثاني و الأربعون

أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى ٢ + لو$_{هـ}$ ص . لو$_{هـ}$ س = س^{٢} + ص عند النقطة التي احداثيها السيني = ١

================================== الحل ==========================

٢ + لو$_{هـ}$ ص . لو$_{هـ}$ س = س^{٢} + ص

بالاشتقاق بالنسبة الى س

$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ لو$_{هـ}$ س + $\frac{١}{\text{س}}$ لو$_{هـ}$ ص = ٢س + ص$'$

عندما س =١ فإن ٢ + ٠ = ١ + ص ∴ ص = ١

صفر = ٢ + ص$'$ ∴ الميل = ص$'$ = ـ٢

معادلة المماس: (ص ـ ١) = ـ ٢ (س ـ ١)

ص ـ ١ = ـ٢س + ٢ المعادلة : ص+٢س ـ٣=٠

معادلة العمودى: (ص ـ ١) = $\frac{١}{٢}$(س ـ ١)

٢ص ـ ٢ = س ـ١ المعادلة: ٢ص ـ س ـ١ = ٠

السؤال الثالث و الأربعون

اختر : إذا كانت د$'$(س) = س د(س) ، د(٣) = ـ٥ فإن د$''$ (٣) = ...

(أ) ٤ (ب) ١٥ (جـ) ـ ٥٠ (د) ٢٧

================================== الحل ==========================

∵ د$'$(س) = س د(س)

∴ د$'$(٣) = ٣ × د(٣) = ٣ × ـ٥ = ـ١٥

د$''$ (س) = س . د$'$ (س) + د(س)

د$''$ (٣) = ٣ × د$'$(٣) + د(٣) = ٣ × ـ١٥ + (ـ٥) = ـ ٥٠

السؤال الرابع و الأربعون

قطعه من الثلج على شكل متوازي مستطيلات أبعاده في لحظة ما هي ٣ ، ٤ ، ١٢ سم فإذا كان معدل تزايد البعد الأول ٢سم / ث ومعدل تزايد البعد الثاني ١سم / ث ومعدل تناقص البعد الثالث = ٣سم / ث فإذا علمت أن القطعة تظل محتفظة بشكلها . أجب عن أحد السؤالين الآتيين

(١) أوجد معدل تغير حجم قطعة الثلج في نهاية الثانية الثانية

(٢) أوجد معدل تغير المساحة السطحية لقطعة الثلج في نهاية الثانية الثانية

================================ الحل ==========================

(١) بعد مرور ن ثانية تكون الابعاد كالتالي (٣ + ٢ن) ، (٤ + ن) ، (١٢ – ٣ن)

ح = (٣ + ٢ن) (٤ + ن) (١٢ – ٣ن) = ١٤٤ + ٩٦ن - ٩ن^{٢} – ٦ن^{٣}

ح́ = ٩٦ – ١٨ن – ١٨ ن^{٢}

بعد مرور ٢ث يكون ح́ = ٩٦ – ١٨ × ٢ – ١٨ × ٤ = ٩٦ – ٣٦ – ٧٢ = -١٢ سم^{٣} / ث

(٢) مـ = ٢ [(٣ + ٢ن)(٤ + ن) +(٤ + ن)(١٢ – ٣ن) + (٣ + ٢ن) (١٢ – ٣ن)]

مـ = ٢ [١٢ + ١١ن + ٢ن^{٢} + ٤٨ – ٣ن^{٢} + ٣٦ + ١٥ن – ٦ن^{٢}]

مـ = ٢ [-٧ن^{٢} + ٢٦ن + ٨٤] = -١٤ن^{٢} + ٥٢ن + ١٦٨

مـ́ = -٢٨ن + ٥٢

في نهاية الثانية الثانية يكون مـ́ = -٢٨ × ٢ + ٥٢ = -٥٦ + ٥٢ = -٤ سم^{٢} / ث

السؤال الخامس و الأربعون

أوجد $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س}{س + ١} \right)^{س}$

================================ الحل ==========================

$$\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س + ١}{س} \right)^{-س} = \lim_{س \to \infty} \left(١ + \frac{١}{س} \right)^{-س} = \lim_{س \to \infty} \left[\left(١ + \frac{١}{س} \right)^{س} \right]^{-١} = هـ^{-١}$$

السؤال السادس و الأربعون

اختر : حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = | س | والمستقيمين س = -١ ، س = ١دورة كاملة حول محمور السينات = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}\pi$ (ب) $\frac{٤}{٣}\pi$ (ج) $\frac{١}{٣}\pi$ (د) π

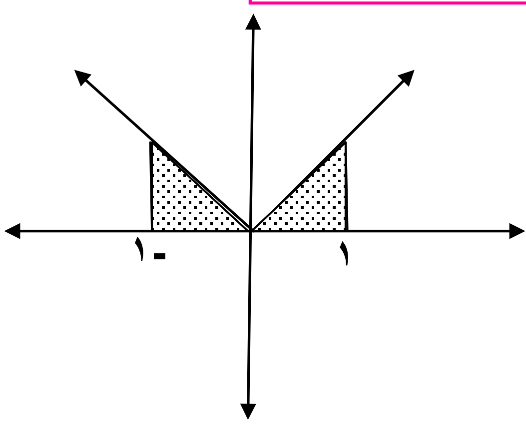
============================== الحل ==============================

١- إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [-أ ، أ] فإن:

$$\int_{-أ}^{أ} \text{د(س) ء س} = \text{صفرًا}$$

٢- إذا كانت الدالة د متصلة وزوجية على الفترة [-أ ، أ] فإن:

$$\int_{-أ}^{أ} \text{د(س) ء س} = ٢\int_{٠}^{أ} \text{د(س) ء س}$$



$$\text{ح} = \pi\int_{١-}^{١} \text{ص}^{٢}\,\text{ءس} = \pi\int_{١-}^{١} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$$

الدالة زوجية وبالتالى فإن

$$\text{ح} = ٢\pi\int_{١-}^{١} \text{س}^{٢}\,\text{ءس} = ٢\pi\left[\frac{١}{٣}\text{س}^{٣}\right]_{١-}^{١}$$

$$= ٢\pi\left[\frac{١}{٣} - \left(-\frac{١}{٣}\right)\right] = ٢\pi \times \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}\pi$$

السؤال السابع و الأربعون

اختر: $\lim_{\text{س}\to ٠}\left(١ + \frac{\text{س}}{\text{أ}}\right)^{\frac{\text{أ}}{\text{س}}} =$ ....

(أ) صفر (ب) هـ (ج) $\frac{١}{\text{أ}}$ (د) $\frac{١}{\text{هـ}}$

============================== الحل ==============================

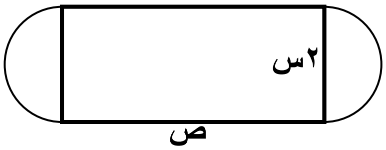
الاجابه الصحيحه هى (هـ) ليه؟ نفرض أن ص = $\frac{\text{س}}{\text{أ}}$ وعندما س ⟵ ٠ فإن ص ⟵ ٠

س = أص ، $\lim_{\text{ص}\to ٠}(١ + \text{ص})^{\frac{\text{أ}}{\text{أص}}} = \lim_{\text{ص}\to ٠}(١ + \text{ص})^{\frac{١}{\text{ص}}} = \text{هـ}$

السؤال الثامن و الأربعون

ملعب على شكل مستطيل ينتهى ضلعان متقابلان منه بنصفي دائرة خارج المستطيل طول قطرها مساوياً لطول هذا الضلع . إذا كان محيط الملعب ٤٠٠ متراً فأثبت أن مساحة سطح المعلب تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الملعب على شكل دائرة وأوجد طول نصف قطرها

================================= الحل =========================



نفرض طول المستطيل = ص وعرضه = ٢س

∴ طول نصف قطر الدائرة = س

محيط الملعب = ٤٠٠

٢ص + ٢ π س = ٤٠٠ ⟵ ص + π س = ٢٠٠

ص = ٢٠٠ - π س

بفرض مساحة الملعب بالدالة د(س)

∴ د(س) = ٢س ص + π س^{٢}

د(س) = ٢س (٢٠٠ - π س) + π س^{٢}

د(س) = ٤٠٠ س - π س^{٢}

دَ (س) = ٤٠٠ -٢ π س

بوضع دَ (س) = ٠

٤٠٠ -٢ π س = ٠ ⟵ ٢ π س = ٤٠٠ ⟵ π س =٢٠٠

س= $\frac{٢٠٠}{\pi}$

دً(س) = -٢ π

دً($\frac{٢٠٠}{\pi}$) = -٢ π < ٠

عند س = $\frac{٢٠٠}{\pi}$ تكون مساحة الملعب أكبر مايمكن

ص = ٢٠٠ - π × $\frac{٢٠٠}{\pi}$ = ٢٠٠ – ٢٠٠ = ٠

أى أن الملعب يكون على شكل دائرة طول نصف قطرها $\frac{٢٠٠}{\pi}$ سم

السؤال التاسع و الأربعون

أوجد معادلتى المماسين للدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٥ والتى كل منهما يميل على المحور السينى الموجب بزاوية ظلها يساوى ٢

=============================== الحل ===========================

س^{٢} + ص^{٢} =٥ ....(١) باشتقاق الطرفين بالنسبة الى س

٢س + ٢ص ص َ = ٠ (÷٢)

س + ص ص َ = ٠

ص ص َ = - س

ص َ = $\frac{\text{- س}}{\text{ص}}$ ، ص َ = ٢ معطى

$\frac{\text{- س}}{\text{ص}}$ = ٢ س = - ٢ص (بالتعويض فى ١)

٤ص^{٢} + ص^{٢} = ٥

٥ص^{٢} = ٥ ص = ± ١

عندما ص =١ أو ص = -١

س = ± ٢

عند النقط (٢ ، -١) عند النقطة (-٢ ، ١)

معادلة المماس معادلة المماس

ص -٢س + ٥ = ٠ ص -٢س – ٥ = ٠

السؤال الخمسون

أوجد $\int_{٠}^{٣}$ س $\sqrt{\text{س + ١}}$.ءس | عند س = ٠ يكون ع = ١

بوضع ع = س + ١ .... ءس =ءع | عند س = ٣ يكون ع = ٤

س = ع – ١ وبالتالى

$\int_{١}^{٤}$ (ع – ١) ع$^{\frac{١}{٢}}$ ءع = $\int_{١}^{٤}$ (ع$^{\frac{٣}{٢}}$ - ع$^{\frac{١}{٢}}$) ءع = [$\frac{٢}{٥}$ ع$^{\frac{٥}{٢}}$ - $\frac{٢}{٣}$ ع$^{\frac{٣}{٢}}$]$_{١}^{٤}$ = $\frac{١١٦}{١٥}$

السؤال الحادى والخمسون

أثبت أن المنحنيين $(س - ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ ، $(س + ١)^٢ + ص^٢ = ٢$ يتقاطعان على التعامد ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع

================================= الحل =================================

من المعادلة الاولى : $ص^٢ = ٢ - (س - ١)^٢$ بالتعويض في المعادلة الثانية

$(س + ١)^٢ + ٢ - (س - ١)^٢ = ٢$

$س^٢ + ٢س + ١ + ٢ - س^٢ + ٢س - ١ - ٢ = ٠$

$٤س = ٠$ $\qquad$ $س = ٠$

بالتعويض في المعادلة الاولى

$١ + ص٢ = ٢$ $\qquad$ $ص٢ = ١$

$ص = \pm ١$

المنحنيان يتقاطعان فى النقطتين (٠ ، ١) ، (٠ ، -١)

$٢(س - ١) + ٢ ص ص^َ = ٠$ & $٢ (س + ١) + ٢ص ص^َ = ٠$

عندالنقطة (٠ ، ١) & عند النقطة (٠ ، ١)

$٢ × -١ + ٢ ص^َ = ٠$ & $٢ × ١ + ٢ ص^َ = ٠$

$ص^َ = ١$ & $ص^َ = -١$

∴ عند النقطة (٠ ، ١) المنحنيان متعامدان

معادلة المماس ص - ١ = س & معادلة المماس ص - ١ = - س

ص - س = ١ & ص + س = ١

عند النقطة (٠ ، -١) & عند النقطة (٠ ، - ١)

$-٢ - ٢ ص^َ = ٠$ & $٢ - ٢ ص^َ = ٠$

ثم اكمل ....

السؤال الثاني والخمسون

إذا كانت ص = هـ^{٣س} + س^٢ أثبت أن : $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ - ٢ = ٩ (ص - س^٢)

ص َ = ٣ هـ^{٣س} + ٢س

ص ً = ٩ هـ^{٣س} + ٢

ص ً – ٢ = ٩ هـ^{٣س}

ص ً – ٢ = ٩ (ص – س^٢)

السؤال الثالث والخمسون

إذا كانت المعادلتان البرامتريتان لمنحنى هما س = ن^٢ + ٢ ، ص = ن^٣ + ١

أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى عند ن = ١

ميل المماس عند أى نقطة = $\frac{ءص}{ءس}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءن}$ ÷ $\frac{ءس}{ءن}$ = ٣ن^٢ ÷ ٢ن = $\frac{٣}{٢}$ن

عند ن = ١ يكون ميل المماس = $\frac{٣}{٢}$ ، ميل العمودى = - $\frac{٢}{٣}$

عند ن = ١ فإن س = (١)^٢ + ٢ = ٣ & ص = (١)^٣ + ١ = ٢

أى أن النقطة (٣ ، ٢) تقع على المنحنى

معادلة المماس : (ص – ٢) = $\frac{٣}{٢}$ (س – ٣) أى ٣س – ٢ص – ٥ = ٠

معادلة العمودي: (ص – ٢) = - $\frac{٢}{٣}$ (س – ٣) أى ٢س +٣ص – ١٢ = ٠

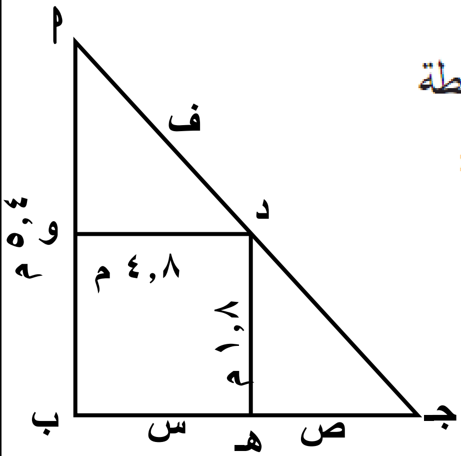
السؤال الرابع والخمسون

يسير رجل طوله ١,٨ متر في خط مستقيم مقرباً من قاعدة عمود إضاءة بمعدل ١,٢ متر / ث ، فإذا كان ارتفاع مصباح عمود الإضاءة ٥,٤ متراً عن سطح الأرض . أوجد :

(أ) معدل تغير طول ظل الرجل

(ب) معدل تغير بعد رأس الرجل عن المصباح عندما يكون الرجل على بعد ٤،٨ متراً من عمود الإضاءة .

================================ الحل ======================



نمذجة المشكلة: في الشكل المقابل تمثل $\overline{\text{اب}}$ عمود الإضاءة، النقطة ا المصباح وتمثل $\overline{\text{ده}}$ الرجل، والنقطة جـ نهاية ظل الرجل فيكون:

س = هـ ب   بعد الرجل عن قاعدة عمود الإضاءة.

ص = هـ جـ   طول ظل الرجل.

ف = ا د   بُعد رأس الرجل عن المصباح.

أولًا: ∵ △ ا ب جـ ~ △ د هـ جـ

$$\therefore \frac{\text{اب}}{\text{ده}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٥,٤}{١,٨} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}}$$

ويكون ٢ ص = س   باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة للزمن

$$\therefore ٢ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \quad \text{أى} \quad \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-١,٢}{٢} = -٠,٦ \text{ متر/ث}$$

ثانيًا: فى △ ا د و القائم الزاوية فى (و)

$\text{ف}^٢ = \text{س}^٢ + (٣,٦)^٢$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى ن

$$٢ \text{ ف} \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٢ \text{ س} \frac{\text{دس}}{\text{دن}} \qquad \text{عند س} = ٤,٨ \text{ م} \qquad \text{ف} = ٦ \text{ متر}$$

$$٦ \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = ٤,٨ \times -١,٢ \qquad \text{أى} \quad \frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -٠,٩٦ \text{ متر/ث}$$

السؤال الخامس والخمسون

أوجد قيمة ما يأتي

(١) $\int (١ - \text{س}^٢)(٣\text{س} - \text{س}^٣)^٥ \, \text{ءس}$ (٢) $\int ٩\text{س}^٢ \, \text{هـ}^{٣\text{س}} \, \text{ءس}$

(٣) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^٢ - ١} \, . \, \text{ءس}$ (٤) $\int_{-١}^{١} \sqrt{\text{س}^٤ + \text{س}^٢} \, . \text{ءس}$

(٥) $\int \text{طا}\,(٣\text{س} + ١) \, \text{ءس}$

=============================== الحل ===============================

(١) $\int (١ - \text{س}^٢)(٣\text{س} - \text{س}^٣)^٥ \, \text{ءس}$

$$\frac{١}{٣} \int (٣ - ٣\text{س}^٢)(٣\text{س} - \text{س}^٣)^٥ \, \text{ءس} = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{٦} (٣\text{س} - \text{س}^٣)^٦ + \text{ث} = \frac{١}{١٨} (٣\text{س} - \text{س}^٣)^٦ + \text{ث}$$

(٢) $\int ٩\text{س}^٢ \, \text{هـ}^{٣\text{س}} . \text{ءس}$ يمكن حل هذا التكامل باستخدام عمود التكامل

$$= ٣\text{س}^٢ \, \text{هـ}^{٣\text{س}} - ٢\text{س} \, \text{هـ}^{٣\text{س}} + \frac{٢}{٣} \text{هـ}^{٣\text{س}} + \text{ث}$$

التفاضل	التكامل
$٩\text{س}^٢$ (+)	$\text{هـ}^{٣\text{س}}$
١٨س (-)	$\frac{١}{٣}\text{هـ}^{٣\text{س}}$
١٨ (+)	$\frac{١}{٩}\text{هـ}^{٣\text{س}}$
صفر	$\frac{١}{٢٧}\text{هـ}^{٣\text{س}}$

(٣) $\int \frac{٣\text{س}}{\text{س}^٢ - ١} . \text{ءس} = ٣ \int \frac{\text{س}}{\text{س}^٢ - ١} . \text{ءس} = \frac{٣}{٢} \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ١} \text{ءس} = \frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^٢ - ١| + \text{ث}$

(٤) $\int_{-١}^{١} \sqrt{\text{س}^٤ + \text{س}^٢} \, . \text{ءس}$ نلاحظ أن الدالة زوجية وبالتالى

(٤) $\int_{-١}^{١} \sqrt{س^{٤} + س^{٢}} \,.ء س = ٢ \int_{٠}^{١} |س| \sqrt{س^{٢} + ١} \,.\, ءس = \int_{٠}^{١} ٢س \sqrt{س^{٢} + ١} \,.\, ءس$

$= \frac{٢}{٣} \left[(س^{٢} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١} = \frac{٤\sqrt{٢} - ٢}{٣}$

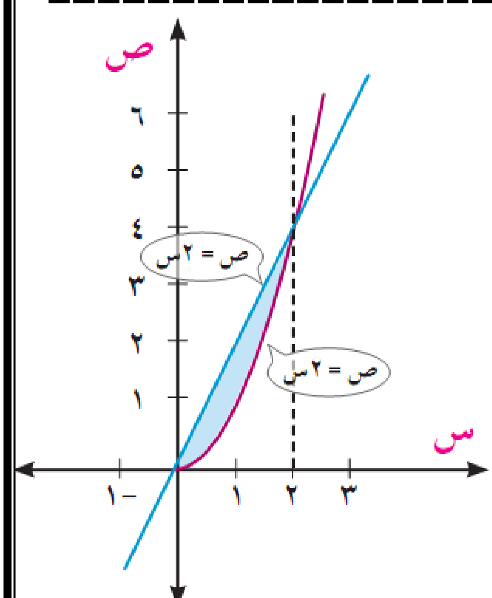
(٥) $\int ظا\,(٣س + ١)\, ء س = \int \frac{حا(٣س + ١)}{حتا(٣س + ١)} .ءس = - \frac{١}{٣} \int \frac{-٣حا(٣س + ١)}{حتا(٣س + ١)} \,.\, ءس$

$= - \frac{١}{٣} لو_{هـ} |\,حتا\,(٣س + ١)\,| + ث = \frac{١}{٣} لو_{هـ} |\,قا\,(٣س + ١)\,|$

السؤال السادس والخمسون

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س٢ والمستقيم ص = ٢س دورة كاملة حول محور السينات

================================ الحل ================================



بفرض $ص_{١} = س^{٢}$ ، $ص_{٢} = ٢\,س$

لإيجاد نقط التقاطع نضع $ص_{١} = ص_{٢}$

∴ س = ٠ أو س = ٢

∵ $ص_{٢} \geqslant ص_{١}$ لكل س ∈ [٠ ، ٢] كما هو واضح من الشكل

∴ $ح = \pi \int_{أ}^{ب} (ص_{٢}^{٢} - ص_{١}^{٢})\, ء س$

$= \pi \int_{٠}^{٢} (٢\,س)^{٢} - (س^{٢})^{٢}\, ء س$

∴ $ح = \pi \int_{٠}^{٢} (٤س^{٢} - س^{٤})\, ء س$

$= \pi \left[\frac{٤}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٥}س^{٥} \right]_{٠}^{٢}$

$= \pi \left(\frac{٣٢}{٣} - \frac{٣٢}{٥} \right) = ٣٢\,\pi \times \frac{٢}{١٥} = \frac{٦٤\,\pi}{١٥}$ وحدة مكعبة

مستطيل طوله ١٢ سم وعرضه ٥ سم يتناقص طوله بمعدل ١سم / ث بينما يتزايد عرضه بمقدار ٠,٥ سم /ث . أوجد متى يصبح الشكل مربعا ، ثم أوجد الزمن الذى تتوقف بعده المساحة في التزايد . كم تكون مساحة المستطيل حينئذ ؟

=============================== الحل ========================

بعد مرور ن ثانية يكون

الطول = (١٢ – ن)   ،   العرض = (٥ + ٠,٥ن)

م = (١٢ – ن)(٥ + ٠,٥ن) = ٦٠ + ن – ٠,٥ن^{٢}

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ١ – ن

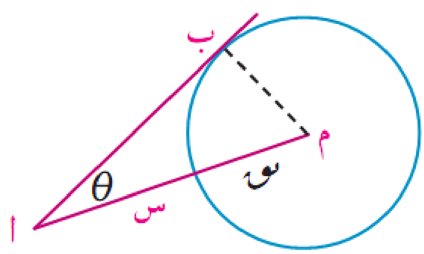
يكون المستطيل مربعا عندما ١٢ – ن = ٥ + ٠,٥ن

٧ = ١,٥ ن   ن= $\frac{١٤}{٣}$

تتوقف المساحة عن الزيادة عندما $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٠   أى بعد ١ث

م = ٦٠ + ن – ٠,٥ن^{٢} = ٦٠ + ١ – ٠,٥ = ٦٠,٥ سم^{٢}

السؤال الثامن والخمسون



في الشكل المقابل: أ نقطة تتحرك في المستوى، $\overline{\text{أب}}$ مماس للدائرة م عند ب ، أ م = س + نق حيث نق طول نصف قطر الدائرة:

أ) أثبت أن س = نق (قتا θ - ١)

ب) أوجد معدل تغير س بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{٦}$

=============================== الحل ========================

$\overline{\text{أب}}$ مماس للدائرة ، م ب نصف قطر

∴ $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{م ب}}$

قتا θ = $\frac{\text{نق + س}}{\text{نق}}$ = ١ + $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$

قتا θ – ١ = $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$

نق $\frac{\text{دس}}{\text{د}\theta}$

س = نق (قتا θ – ١)   = نق(- قتا θ ظتا θ) وعند $\theta = \frac{\pi}{٦}$ يكون $\frac{\text{دس}}{\text{د}\theta}$ = - ٢ $\sqrt{٣}$

السؤال التاسع والخمسون

إذا كانت $د(س) = \frac{٢}{س + ١}$ ، $ر(س) = ٣س$

أوجد $\frac{ء}{ءس} [(د \circ ر)(س)]$ عند $س = -٢$

==================== الحل ====================

اولاً نوجد $(د \circ ر)(س) = د[ر(س)] = \frac{٢}{ر(س) + ١} = \frac{٢}{٣س + ١}$

$$\frac{ء}{ءس} \left(\frac{٢}{٣س + ١} \right) = \frac{-٢ \times ٣}{(٣س + ١)^٢} = \frac{-٦}{(٣س + ١)^٢}$$

عند $س = -٢$ يكون $\frac{ء}{ءس} [(د \circ ر)(س)] = \frac{-٦}{(-٦ + ١)^٢} = \frac{-٦}{٢٥}$

السؤال الستون

اختر : مساحة المنطقة المحددة $ص = \sqrt{٤ - س^٢}$ ومحور السينات مقدرة بالوحدات المربعة يساوى بالمنحنى $ص =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٢π (د) ٤π

==================== الحل ====================

$\because ص = \sqrt{٤ - س^٢}$

بتربيع الطرفين $ص^٢ = ٤ - س^٢$

$س^٢ + ص^٢ = ٤$ وهى معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

وطول نصف قطرها وحدتين

$$م = \int_{-٢}^{٢} ص \, ءس = ٢\int_{٠}^{٢} ص \, ءس = ٢ \times \frac{١}{٤} \pi \, نق^٢ = \frac{١}{٤}\pi \times ٤ \times ٢ = ٢\pi$$

السؤال الحادى والستون

أوجد $\int \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} \, \text{ءس}$

================================ الحل ========================

نلاحظ أن البسط هو المشتقة الأولى للمقام

$\therefore \int \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} \, \text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left| \text{جاس} - \text{جتاس} \right|$

السؤال الثانى والستون

أوجد $\int \frac{\text{٣س} + ٥}{\text{هـ}^{\text{٢س}}} \, \text{ءس}$

================================ الحل ========================

$\int (\text{٣س} + ٥)\,\text{هـ}^{-\text{٢س}} \,.\, \text{ءس} = ٣ \underbrace{\int \text{س هـ}^{-\text{٢س}} \,.\, \text{ءس}}_{\text{تكامل بالتجزىء}} + ٥ \int \text{هـ}^{-\text{٢س}} \,.\, \text{ءس}$

س ، $\text{هـ}^{-\text{٢س}}$

تفاضل × تكامل

١ ، $-\frac{١}{٢}\text{هـ}^{-\text{٢س}}$

$٣ \left[-\frac{١}{٢} \text{س هـ}^{-\text{٢س}} + \frac{١}{٢} \int \text{هـ}^{-\text{٢س}} \,.\, \text{ءس} \right] + ٥ \int \text{هـ}^{-\text{٢س}} \,.\, \text{ءس}$

$-\frac{٣}{٢} \text{س هـ}^{-\text{٢س}} + \frac{٣}{٢} \int \text{هـ}^{-\text{٢س}} \,.\, \text{ءس} + ٥ \int \text{هـ}^{-\text{٢س}} \,.\, \text{ءس}$

$-\frac{٣}{٢} \text{س هـ}^{-\text{٢س}} - \frac{٣}{٤} \text{هـ}^{-\text{٢س}} - \frac{٥}{٢} \text{هـ}^{-\text{٢س}} + \text{ث}$

$-\frac{٣}{٢} \text{س هـ}^{-\text{٢س}} - \frac{١٣}{٢} \text{هـ}^{-\text{٢س}} + \text{ث}$

السؤال الثالث والستون

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة ص = $س^{قاس}$ عندما س = π

============================== الحل ==============================

السؤال الرابع والستون

اختر إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \left(\frac{س}{س+ك}\right)^{س}$ = هـ ، فإن ك تساوى

(أ) ١   (ب) -١   (جـ) ٢   (د) -٢

============================== الحل ==============================

السؤال الخامس والستون

اختر

إذا كانت معادلة العمودي للمنحني ص = د (س) عند النقطة (٢ ، ١) هي س+ ٣ص= ٥

فإن د َ (٢) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٣ (جـ) -٢ (د) - $\frac{١}{٣}$

================================ الحل ========================

معادلة العمودي هى س + ٣ص = ٥ ميل العمودي = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = - $\frac{١}{٣}$

∴ ميل المماس عند النقطة (٢ ، ١) = ٣

السؤال السادس والستون

اذا كان المماس للمنحنى س^{٢} - ص^{٢} =١٦ يمر بالنقطة (٢ ، -٢) أوجد معادلة هذا المماس

================================ الحل ========================

∵ النقطة لا تحقق معادلة المنحنى ∴ فهى ليست نقطة التماس ∴ نفرض نقطة التماس (م، ب)

∵ س^{٢} -ص^{٢} = ١٦ بالاشتقاق بالنسبة لـ س ∴ ٢س – ٢ص $\frac{ءص}{ءس}$ =٠ ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{س}{ص} = \frac{أ}{ب}$

∴ معادلة المماس $\frac{ص+٢}{س-٢} = \frac{أ}{ب}$ ، ∵ نقطة التماس تحقق معادلة المماس ∴ $\frac{ب+٢}{أ-٢} = \frac{أ}{ب}$

∴ ب^{٢} + ٢ب = م^{٢} - ٢م ∴ م^{٢} - ب^{٢} = ٢م + ٢ب ⇐ (١)

∵ نقطة التماس تحقق معادلة المنحنى ∴ م^{٢} - ب^{٢} = ١٦ ⇐ (٢)

من(١) ، (٢) ∴ م + ب =٨ ⇐ (٣) من (٣) ∴ م = ٨ – ب بالتعويض فى (٢)

∴ (٨- ب)^{٢} -ب^{٢} = ١٦ ∴ ٦٤ -١٦ب + ب^{٢} -ب^{٢} =١٦ ∴ ب =٣ ∴ م = ٥

∴ يوجد نقطة التماس م(٥، ٣) ∴ معادلة المماس هى $\frac{ص+٢}{س-٢} = \frac{٥}{٣}$ ∴ ٣ص = ٥س -١٦

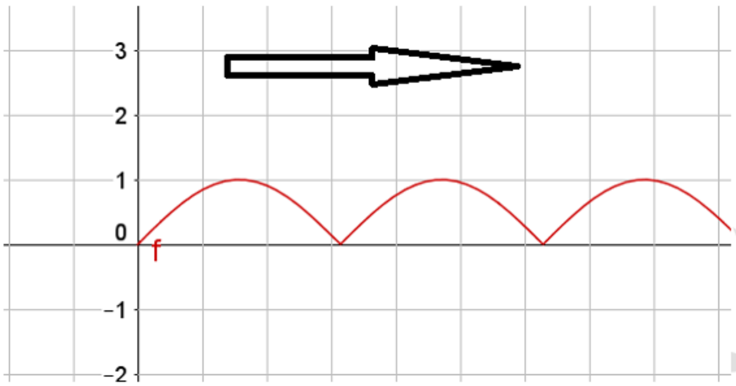
السؤال السابع والستون

أوجد $\int_{٠}^{١٠\pi} |\text{جاس}| \, .\text{ءس}$

=================================== الحل ========================

$= ١٠ \int_{٠}^{\pi} \text{جاس ءس} = ١٠ \left[-\text{جتاس}\right]_{٠}^{\pi}$

$= ٢٠$



السؤال الثامن والستون

اختر : إذا كانت د(س) = $\text{هـ}^{\text{لوهـ}(\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١)}$ فإن د̀ (٠)= ....

(أ) - ٤　　(ب) - ٢　　(جـ) صفر　　(د) ٢

=================================== الحل ========================

تذكر أن $\text{هـ}^{\text{لوهـ س}} = \text{س}$

د(س) = $\text{هـ}^{\text{لوهـ}(\text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١)} = \text{س}^٣ - ٢\text{س} + ١$

د̀ (س) = $٣\text{س}^٢ - ٢$

د̀ (٠) = ٣ × ٠ − ٢ = -٢

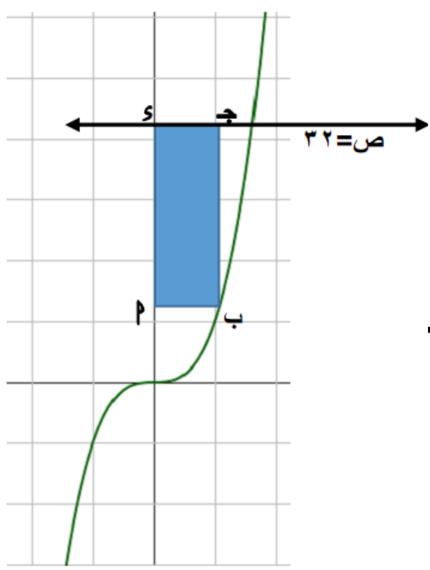
السؤال التاسع والستون

$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{\text{س} + ٥}{\text{س} + ٣}\right)^{\text{س}} = ...$

(أ) هـ　　(ب) $\text{هـ}^٢$　　(جـ) $\frac{١}{\text{هـ}}$　　(د) $\frac{٢}{\text{هـ}}$

=================================== الحل ========================

السؤال السبعون



في الشكل د(س) = س^{٣}

أوجد أكبر مساحة للمستطيل أب جـ ء

الحل ______________________

بفرض ب(س ، ص) تحقق معادلة المنحنى

∴ عرض المستطيل = س ، طوله = ٣٢ – ص = ٣٢ – س^{٣}

∴ م = س(٣٢ – س^{٣}) = ٣٢س – س^{٤} ∴ $\frac{دم}{دس}$ = ٣٢ – ٤س^{٣}

، $\frac{دم}{دس}$ = -١٢ س^{٢} بوضع $\frac{دم}{دس}$ = ٠ ∴ س = ٢ عظمى

∴ أكبر مساحة = ٣٢×٢ – ٢^{٤} = ١٦ وحدة مربعة

السؤال الحادي والسبعون

إذا كانت ص = ٤س حاس حتاس حتا٢س أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

================================ الحل ========================

تذكر قبل الحل أن = حا٢س =٢حاس حتاس

ص = ٤س حاس حتا س حتا ٤س = ٢س × ٢حاس حتا س حتا٤س = ٢س حا٢س حتا٢س

ص= س حا٤س

$\frac{ءص}{ءس}$ = س × ٤حتا٤س + حا٤س

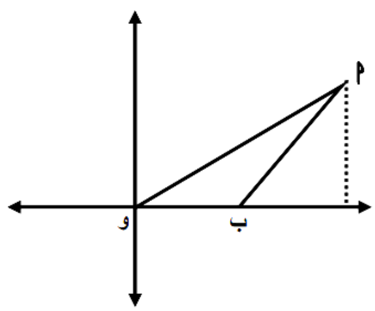
السؤال الثاني والسبعون

اذا كان $\text{ص} = \text{لو}_\text{هـ} \text{س}$ فإن $\frac{\text{ء}^{١٠}\text{ص}}{\text{ءس}^{١٠}} =$ ....

(أ) $\frac{-\lfloor ٩}{\text{س}^{١٠}}$ (ب) $\frac{-\lfloor ١٠}{\text{س}^{٩}}$ (ج) $\frac{\lfloor ٩}{\text{س}^{١٠}}$ (د) $\frac{\lfloor ١٠}{\text{س}^{٩}}$

السؤال الثالث والسبعون

م ب جـ مثلث رؤوسه النقط (٠ ، ٠) ، (٥ ، ٠) ، (٨ ، ٣) أوجد باستخدام التكامل حجم الجسم الناشئ من دوران سطح هذا المثلث دورة واحدة كاملة حول محور السينات



الحل

بفرض و(٠ ، ٠) ، ب(٥ ، ٠) ، م(٨ ، ٣)

نوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ هى $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٥} = \frac{٣ - ٠}{٨ - ٥}$ $\therefore$ ص = س - ٥

، نوجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{م و}}$ هى $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ٠} = \frac{٣ - ٠}{٨ - ٠}$ $\therefore$ ص = $\frac{٣}{٨}$ س

$\therefore \text{ح} = \pi \int_{٠}^{٨} \frac{٩}{٦٤}\text{س}^٢ \text{ءس} - \pi \int_{٥}^{٨} (\text{س} - ٥)^٢ \text{ءس} = ٢٤\pi - \frac{٩}{٢}\pi = ١٩,٥\ \pi$ وحدة مكعبة

السؤال الرابع والسبعون

أوجد: $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س} - \sqrt[٣]{\text{س}}}$

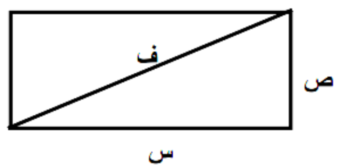
================================ الحل ================================

بفرض $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$ $\therefore \text{ص}^٣ = \text{س}$ $\therefore ٣\text{ص}^٢ \text{ءص} = \text{ءس}$

$\therefore \int \frac{\text{ءس}}{\text{س} - \sqrt[٣]{\text{س}}} = \int \frac{٣\text{ص}^٢ \text{ءص}}{\text{ص}^٣ - \text{ص}} = \int \frac{٣\text{ص} \text{ءص}}{\text{ص}^٢ - ١} = \frac{٣}{٢}\int \frac{٢\text{ص} \text{ءص}}{\text{ص}^٢ - ١} = \frac{٣}{٢} \text{لو}_\text{هـ} |\text{ص}^٢ - ١| + \text{ث}$

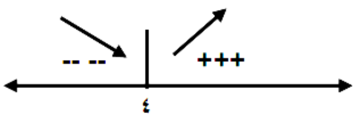
السؤال الخامس والسبعون

مستطيل مساحته ١٦ سم^{٢} أوجد بعديه عندما يكون طول قطره أصغر ما يمكن



س ص = ١٦ ∴ ص = $\frac{١٦}{س}$ ∵ س^{٢} + ص^{٢} = ف^{٢}

∴ ف^{٢} = س^{٢} + ١٦س$^{-٢}$ ∴ ٢ف $\frac{ءف}{ءس}$ = ٢س - ٣٢س$^{-٣}$



بوضع $\frac{ءف}{ءس}$ = ٠ ∴ س = ٤ ، ص=٤

∴ بعدى المستطيل ٤ سم ، ٤سم يكون عندها القطر اصغر ما يمكن

السؤال الخامس والسبعون

$\int_{٠}^{٤} \frac{١}{س - ٢}\, ءس$ = ... (٢ ، لـو$_{هـ}$ ٢ ، لـو$_{هـ}$ |س − ٢| + ث ، غير ذلك)

================================ الحل ==========================

نلاحظ ان الدالة غير متصلة عند س=٢ ∈ [٠ ، ٤] وشرط لايجاد التكامل أن تكون الدالة متصلة

∴ الاختيار الصواب غير ذلك

السؤال السادس والسبعون

أوجد نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $(٢ + س)^{\frac{١}{س}}$

================================ الحل ==========================

ليست على الصورة المعتادة ولايمكن وضعها عليها لذلك نبحث النهاية اليمنى واليسرى

نهـا$_{س \leftarrow ٠^{+}}$ $(٢ + س)^{\frac{١}{س}}$ = $(٢ + ٠)^{\frac{١}{٠^{+}}}$ = ٢^{∞} = ∞ ، نهـا$_{س \leftarrow ٠^{-}}$ $(٢ + س)^{\frac{١}{س}}$ = $(٢ + ٠)^{\frac{١}{٠^{-}}}$ = $٢^{-\infty}$ = ٠

∴ د(٠^{+}) ≠ د(٠^{-}) ∴ النهاية غير موجودة

السؤال السابع والسبعون

أوجد $\int \frac{\text{هـ}^{٢س} + ١}{\text{هـ}^{-س} + ١} \, ءس$

================================ الحل ================================

بفرض ص = هـ^{س} ∴ ءص = هـ^{س} ءس

$$\int \frac{\text{هـ}^{٢س}+١}{\text{هـ}^{س}+١} \times \text{هـ}^{س} ءس = \int \frac{ص^{٢}+١}{ص+١} \times ءص = \int \frac{ص^{٢}-١+٢}{ص+١} \times ءص$$

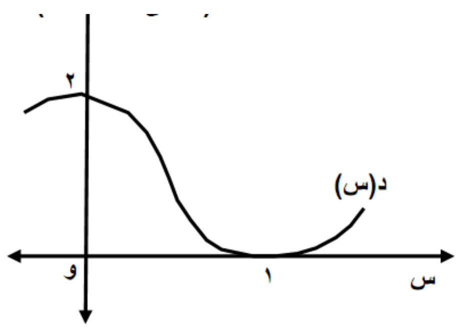
$$= \int \frac{ص^{٢}-١}{ص+١} \times ءص + \int \frac{٢}{ص+١} \times ءص = \int (ص-١) ءص + \int \frac{٢}{ص+١} \times ءص$$

$$= \frac{١}{٢} ص^{٢} - ص + ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} |ص+١| + ث = \frac{١}{٢} \text{هـ}^{٢س} - \text{هـ}^{س} + ٢ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{هـ}^{س}+١| + ث$$

السؤال الثامن والسبعون

فى الشكل المقابل

أوجد $\int_{٠}^{١} [د(س)]^{٢} \, د'(س) \, ءس$



$$= \left[\frac{١}{٣}[د(س)]^{٣}\right]_{٠}^{١} = \frac{١}{٣}\left[[د(١)]^{٣} - [د(٠)]^{٣}\right] = \frac{١}{٣}\left[[د(١)]^{٣} - [د(٠)]^{٣}\right] = -\frac{٨}{٣}$$

السؤال التاسع والسبعون

إذا كان د(٢س) = س^{٢} + س فأوجد د$'$(١)

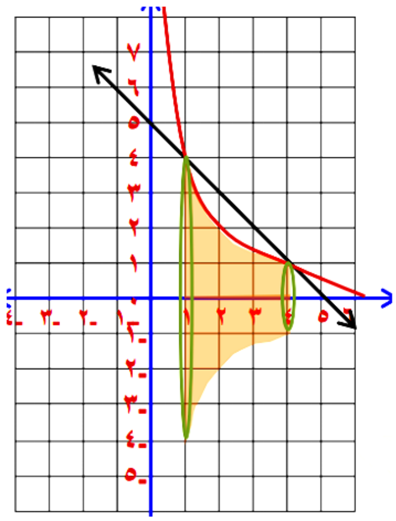
الحل

$$د'(٢س) \times ٢ = ٢س + ١ \longrightarrow د'(٢س) = \frac{٢س + ١}{٢} \longrightarrow د'(١) = \frac{١ + ١}{٢} = ١$$

السؤال الثمانون

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيين ص= $\frac{٤}{س}$ ، ص=٥ ــ س

دورة كاملة حول محور السينات



الحل

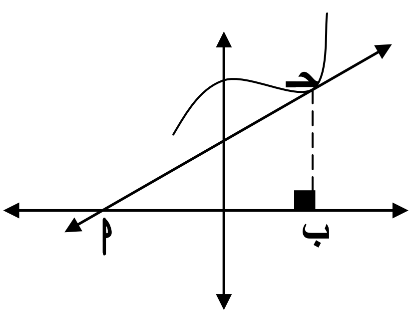
بحل المعادلتين ∴ $\frac{٤}{س}$ = ٥-س ∴ س^{٢} -٥س + ٤ =٠

∴ س = ٤ أ، ١

$$\therefore ح = \pi \int_{١}^{٤} \left[(٥ - س)^{٢} - \left(\frac{٤}{س}\right)^{٢} \right] ءس$$

$$= \pi \int_{١}^{٤} \left[٢٥ - ١٠س + س^{٢} - ١٦س^{-٢} \right] ءس = ٩\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

السؤال الحادي والثمانون



فى الشكل المقابل : إذا كان المستقيم ل مماساً للدالة د عند النقطة حـ

يقطع محمور السينات فى النقطة أ (-٤ ، ٠) وكانت ب(٤ ، ٠)

وكان د(٤) + د َ (٤) = ٩ فأوجد مساحة Δ أ ب حـ

الحل

د(٤) = ب حـ 　　　، د َ (٤) = ميل المماس = طا (ب أ حـ) = $\frac{ب حـ}{أ ب}$ = $\frac{ب حـ}{٨}$

د(٤) + د َ (٤) = ٩

ب حـ + $\frac{ب حـ}{٨}$ = ٩ 　　　$\frac{٩ب حـ}{٨}$ = ٩ 　　　ب حـ = ٨

مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٨ = ٣٢

السؤال الثاني والثمانون

أوجد معادلتي المماسين للمنحنى ص= س^{٣} – ٣س + ٥ والعمودين على المستقيم س + ٩ص = ١

================================ الحل ========================

ميل المماس $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^{٢} – ٣ ، ميل المستقيم المعطى = - $\frac{١}{٩}$

ميل المماس = ٩

٣س^{٢} – ٣ = ٩ ٣س^{٢} = ١٢ س^{٢} = ٤ س = $\pm$ ٢

نقطتا التماس هما (-٢ ، ٣) & (٢ ، ٧)

معادلتا المماسين هما ص – ٩س + ١١ = ٠ ، ص – ٩س – ٢١ = ٠

السؤال الثالث والثمانون

إذا كان المماس للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠ يصنع مثلثاً متساوي الساقين مع محوري الاحداثيات في الربع الأول فأوجد معادلة هذا المماس

================================ الحل ========================