(أولاً) أجب عن السؤال الآتى :

(١) (أ) أوجد : (أولاً) $\int$ (٣ س − ٢)^{٥} ء س

(ثانيًا) $\int$ (حا س + حتا س)^{٢} ء س

(ب) أوجد القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للدالة د حيث :

د (س) = ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٨ في [٠ ، ٢] .

(ثانيًا) أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

(٢) (أ) إذا كانت : د (س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\text{حا}\,(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)} & ،\ \text{س} < ٤ \\ \text{طا}\,\dfrac{\text{ط}}{١٦}\,\text{س} & ،\ \text{س} > ٤ \end{cases}$$

فأوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to ٤}$ د (س) .

(ب) أثبت أنه يمكن رسم مماسين من النقطة (٠ ، − ٤) للمنحنى ص = س^{٢} ، وأوجد معادلة كل منهما .

(٣) (أ) إذا كانت : د (س) =
$$\begin{cases} \text{أ}\,\text{س}^{٢} & ،\ \text{س} < ٢ \\ ٤\,\text{س} - \text{ب} & ،\ \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ، فأوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب

(ب) عند أى نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = د (س) كان ميل العمودى عليه يساوى $\dfrac{-١}{٢\,\text{س} + ١}$ ، أوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأنه يمر بنقطة الأصل .

(٤) (أ) أوجد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية ونقط الانقلاب (إن وجدت)

للدالة : ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٩ س + ٢

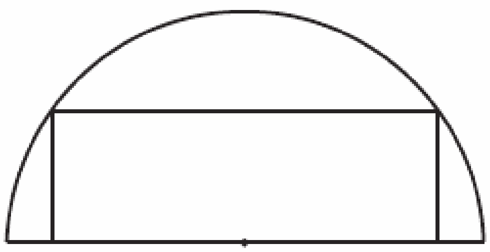
(ب) مثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين مساحته (م) سم^{٢} ، فإذا كان :

$\frac{ء م}{ء ن}$ = ٣٢ سم^{٢} / ث فى اللحظة التى كان طول أى من الساقين ٨ سم .

أوجد عند هذه اللحظة معدل التغير الزمنى لمحيط المثلث (ع) .

(٥) (أ) إذا كانت : ص^{٢} = س ، فأثبت أن : س $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}}$ + ص ($\frac{ء ص}{ء س}$)^{٢} = ٠

(ب) فى الشكل المقابل :



مستطيل مرسوم داخل نصف سطح دائرة طول نصف قطرها ٤ سم .

أوجد : بعدى هذا المستطيل عندما تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن .

<u>الاجابة</u>

(١) [أ] (أولًا) ∫ (٣ س − ٢)^{٥} ء س

= $\frac{١}{١٨}$ (٣ س − ٢)^{٦} + ث

(ثانيًا) ∫ (حا س + حتا س)^{٢}

= ١ + ٢ حا س حتا س

= ١ + حا ٢ س

∴ ∫ (حا س + حتا س)^{٢} ء س

= ∫ (١ + حا ٢ س) ء س

= س − $\frac{١}{٢}$ حتا ٢ س + ث

[ب] ∵ د (س) = ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٨

∴ د َ (س) = ٦ س^{٢} − ٦ س

بوضع د َ (س) = ٠

∴ ٦ س (س − ١) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ١

د (٠) = ٨ ، د (١) = ٧ ، د (٢) = ١٢

∴ القيمة العظمى المطلقة = ١٢

∴ القيمة الصغرى المطلقة = ٧

(٢) [أ] $\text{د}(٤)^{-} = \underset{\text{س} \to ٤^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)} = ١$

$\text{د}(٤)^{+} = \underset{\text{س} \to ٤^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ط}}{١٦} \text{س} = \text{طا } ٤٥^{\circ} = ١$

$\because \text{د}(٤^{-}) = \text{د}(٤)^{+}$

$\therefore \underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \text{د}(\text{س}) = ١$

[ب] بفرض أن نقطة التماس هى (أ ، ب)

$\therefore$ النقطة (أ ، ب) تحقق معادلة المنحنى

$\therefore \text{ب} = \text{أ}^{٢}$ ...... (١)

$\text{ميل المماس} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

$\therefore \text{ميل المماس} = \frac{\text{ب} + ٤}{\text{أ} - ٠} = \frac{\text{ب} + ٤}{\text{أ}}$ .... (٢)

$\because \text{ص} = \text{س}^{٢} \quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ \text{ س}$

$\because$ نقطة التماس هى (أ ، ب)

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢ \text{ أ}$ ...... (٣)

من (٢) ، (٣)

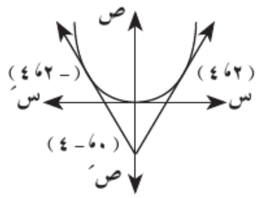
$\therefore \frac{\text{ب} + ٤}{\text{أ}} = ٢ \text{ أ} \quad \therefore \text{ب} = ٢ \text{ أ}^{٢} - ٤$ ... (٤)

بحل المعادلتين (١) ، (٤)

$\therefore ٢ \text{ أ}^{٢} - ٤ = \text{أ}^{٢} \quad \therefore \text{أ}^{٢} = ٤$

$\therefore \text{أ} = \pm ٢$

$\therefore$ نقط التماس هى : (٢ ، ٤) ، (−٢ ، ٤)



* عند س = ٢ $\therefore$ ميل المماس = ٤

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة (٢ ، ٤)

$\therefore \text{ص} - ٤ = ٤ (\text{س} - ٢)$

$\therefore ٤ \text{ س} - \text{ص} - ٤ = ٠$

عندما س = − ٢ $\therefore$ ميل المماس = − ٤

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة (−٢ ، ٤)

$\therefore \text{ص} - ٤ = - ٤ (\text{س} + ٢)$

$\therefore ٤ \text{ س} + \text{ص} + ٤ = ٠$

٣ [أ] ∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د $(٢)^-$ = د $(٢)^+$

∴ ٤ أ = ٨ − ب ١

$$د^{\prime}(س) = \begin{cases} ٢ \text{ أ س} ، & س < ٢ \\ ٤ ، & س \geq ٢ \end{cases}$$

∵ د′ $(٢)^-$ = د′ $(٢)^+$

∴ ٤ أ = ٤ ∴ $\boxed{أ = ٢}$

من ١ ٤ = ٨ − ب ∴ $\boxed{ب = ٤}$

[ب] ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٢ \text{ س} + ١}$

∴ ميل المماس = ٢ س + ١

∵ ص = $\int$ (٢ س + ١) ء س

∴ ص = $س^٢$ + س + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٠) ∴ $\boxed{ث = ٠}$

∴ معادلة المنحنى هى : ص = $س^٢$ + س

④ [أ] $\because ص = \frac{١}{٣} س^{٣} - ٩ س + ٢$

$\therefore ص' = س^{٢} - ٩$

بوضع $ص' = ٠$

$\therefore س = ٣$ أو $س = -٣$

$د(٣) = -١٦$ ، $د(-٣) = ٢٠$

$ص'' = ٢ س$

$د''(٣) = ٦ > ٠$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند النقطة $(٣ ، -١٦)$

$د''(-٣) = -٦ < ٠$

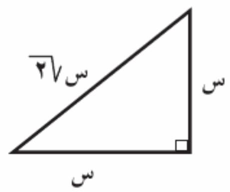
$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند النقطة $(-٣ ، ٢٠)$

لإيجاد نقط الانقلاب نضع $د''(س) = ٠$

$\therefore س = ٠$

$\therefore$ توجد نقطة انقلاب عند النقطة $(٠ ، ٢)$

[ب]



نفرض أن : طول كل من ساقى المثلث = س

$\therefore$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} س^{٢}$

$\because م = \frac{١}{٢} س^{٢}$

$\therefore \frac{دم}{دن} = س \frac{دس}{دن}$ ...... (١)

$\because \frac{دم}{دن} = ٣٢$ سم^{٢}/ث

عندما س = ٨ سم

من (١) $\because ٣٢ = ٨ \times \frac{دس}{دن}$

$\therefore \frac{دس}{دن} = ٤$ سم/ث

$\because ع = ٢ س + س \sqrt{٢}$

$\therefore \frac{دع}{دن} = ٢ \frac{دس}{دن} + \sqrt{٢} \times \frac{دس}{دن}$

$\therefore \frac{دع}{دن} = ٢ \times ٤ + ٤ \sqrt{٢}$

$= ٤ (٢ + \sqrt{٢})$ سم/ث

٥ [أ] ∵ $ص^{٢} = س$ ... (١)

∴ $٢ ص \frac{دص}{دس} = ١$

∴ $٢ ص \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ \left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} = ٠$

بضرب طرفى المعادلة × ص

∴ $٢ ص^{٢} \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ ص \left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} = ٠$ .. (٢)

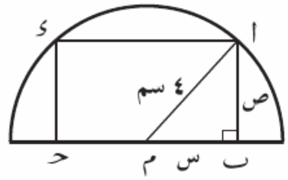
من (١) ، (٢)

∴ $٢ س \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ ص \left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} = ٠$

(بقسمة طرفى المعادلة على ٢)

∴ $س \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} + ٢ ص \left(\frac{دص}{دس}\right)^{٢} = ٠$

[ب]



بفرض أن بعدى المستطيل هما ٢ س ، ص

مساحة المستطيل = ٢ س ص .... (١)

∵ $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

∴ $ص = \sqrt{١٦ - س^{٢}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $م = ٢ س \sqrt{١٦ - س^{٢}}$

∵ $م' = \frac{٢ س \times -٢ س}{٢\sqrt{١٦ - س^{٢}}} + ٢ \sqrt{١٦ - س^{٢}}$

بوضع م' = ٠

∴ $\frac{-س^{٢}}{\sqrt{١٦ - س^{٢}}} + \sqrt{١٦ - س^{٢}} = ٠$

∴ $س^{٢} = ١٦ - س^{٢}$

∴ $٢ س^{٢} = ١٦$ ∴ $س = ٢\sqrt{٢}$ سم

∴ مساحة المستطيل تكون أكبر ما يمكن إذا

كانت $س = ٢\sqrt{٢}$ سم

من (١) $ص = ٢\sqrt{٢}$ سم

∴ بعدا المستطيل هما :

$٤\sqrt{٢}$ سم ، $٢\sqrt{٢}$ سم