(أولاً) أجب عن السؤال الآتى :

(١) (ا) أوجد : (أولاً) $\int (٣س + ٤) \sqrt{٣س + ٤}$ د س

(ثانيًا) $\int \left(قا^{٢} \frac{س}{٢} - جا ٣س \right)$ د س

(ب) عين فترات التحدب إلى أعلى وإلى أسفل لمنحنى الدالة د حيث :

د (س) = ٢ $س^{٣}$ − ٦ $س^{٢}$ + ٧ ، وكذلك نقط الانقلاب (إن وجدت) .

(ثانيًا) أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

(٢) (ا) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & \text{عندما } س \geq ٢ \\ ٣ - أ س & \text{عندما } س < ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ ، فأوجد قيمة الثابت أ .

ثم ابحث قابلية هذه الدالة للاشتقاق عند س = ٢

(ب) أوجد معادلة العمودى على المنحنى الذى معادلته :

ص = س حتا ٢ س + حا س عند نقطة الأصل .

(٣) (ا) عين فترات التزايد والتناقص للدالة د حيث : د (س) = $س^{٣}$ − ٣ $س^{٢}$ ، ثم أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د .

(ب) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى الذى معادلته :

$س^{٢} + ص^{٢}$ + ٢ س − ٤ ص = ٢٧

عين موضع هذه النقطة فى اللحظة التى يكون عندها معدل تغير إحداثيها السينى بالنسبة للزمن مساويًا لمعدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة للزمن .

(٤) (أ) إذا كانت د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{حا } ٣ \text{ س}}{\text{س}} & ، \text{ س} < ٠ \\ ٣ + \text{حتا س} & ، \text{ س} > ٠ \end{cases}$

فابحث : نهـــــــا د (س) .
س ← ٠

(ب) متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ومجموع أطوال أحرفه ٢٤٠ سم ، أوجد أبعاد متوازى المستطيلات عندما يكون حجمه أكبر ما يمكن .

(٥) (أ) أوجد معادلة المنحنى الذى ميل المماس له عند أى نقطة عليه يساوى $\frac{١ - ٢ \text{ س}}{٢ \text{ ص} + ٢}$ إذا علم أنه يمر بالنقطة (١ ، ٣) .

(ب) إذا كان : $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = ٢ \text{ س} - ٣$ ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س}^{٢} + ١$ ،

فأوجد : $\frac{\text{ء}^{٢} \text{ع}}{\text{ء ص}^{٢}}$ عند س = ١

الاجابة

(١) [أ] (أولًا) $\int (٣س + ٤)^{\frac{٣}{٢}} \, د س$

$= \frac{٢}{١٥} (٣س + ٤)^{\frac{٥}{٢}} + ث$

(ثانيًا) $\int (قا^{٢} \frac{س}{٢} - حا ٣س) \, د س$

$= ٢ طا \frac{س}{٢} + \frac{١}{٣} حتا ٣س + ث$

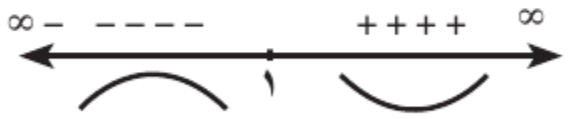
[ب] ∵ $د(س) = ٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ٧$

∴ $د'(س) = ٦س^{٢} - ١٢س$

$د''(س) = ١٢س - ١٢$

بوضع $د''(س) = ٠$ ∴ $س = ١$

∴ توجد نقطة انقلاب عند النقطة (١ ، ٣)



∵ $د''(س) < ٠$ في $]-\infty ، ١[$

∴ المنحنى محدب إلى أعلى

∵ $د''(س) > ٠$ في $]١ ، \infty[$

∴ المنحنى محدب إلى أسفل

(٢) [أ] ∵ الدالة متصلة عند س = ٢

∴ د (٢$^-$) = د (٢$^+$) = د (٢)

∴ ٥ = ٣ − ٢ أ ∴ $\boxed{\text{أ} = -١}$

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ١ & \text{عندما س} \geq ٢ \\ ٣ + \text{س} & \text{عندما س} < ٢ \end{cases}$$

* بحث الاشتقاق

$$\text{د}'(٢^-) = \text{نهـــا}_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـــا}_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{(٢ + \text{هـ})^٢ + ١ - ٥}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـــا}_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{هـ}(٤ + \text{هـ})}{\text{هـ}} = ٤$$

$$\text{د}'(٢)^+ = \text{نهـــا}_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـــا}_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{٣ + (٢ + \text{هـ}) - ٥}{\text{هـ}} = ١$$

∵ د′ (٢$^-$) ≠ د′ (٢)$^+$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

[ب] ∵ ص = س حتا ٢ س + حا س

∴ ص′ = − ٢ س حا ٢ س + حتا س + حتا س

∴ ص′ = − ٢ س حا ٢ س + ٢ حتا س

∴ ميل المماس عند نقطة الأصل

ص′ = ٢ حتا ٠° = ٢

∴ ميل العمودى = $-\frac{١}{٢}$

معادلة العمودى هى :

ص − ٠ = $-\frac{١}{٢}$ (س − ٠)

س + ٢ ص = ٠

③ [أ] ∵ د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢}

∴ د′ (س) = ٣ س^{٢} − ٦ س

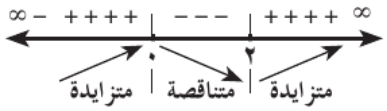
بوضع د′ (س) = ٠

∴ ٣ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٢

د (٠) = ٠ ، د (٢) = ٨ − ١٢ = − ٤

∴ النقط هى (٠ ، ٠) ، (٢ ، − ٤)



الدالة متزايدة فى ع − [٠ ، ٢]

ومتناقصة فى] ٠ ، ٢ [

د′′ (س) = ٦ س − ٦

∵ د′′ (٠) = − ١ < ٠

∴ (٠ ، ٠) قيمة عظمى محلية

∵ د′′ (٢) = ٦ > ٠

∴ (٢ ، − ٤) قيمة صغرى محلية

[ب] ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ٤ ص = ٢٧ .. ①

∴ ٢ س × $\frac{د س}{د ن}$ + ٢ ص $\frac{د ص}{د ن}$

+ ٢ $\frac{د س}{د ن}$ − ٤ $\frac{د ص}{د ن}$ = ٠

∵ $\frac{د س}{د ن}$ = $\frac{د ص}{د ن}$

∴ ٢ $\frac{د س}{د ن}$ (س + ص − ١) = ٠

∴ ص = ١ − س ..... ②

من ① ، ② ∴ س^{٢} + (١ − س)^{٢} + ٢ س − ٤ (١ − س) = ٢٧

∴ ٢ س^{٢} + ٤ س − ٣ = ٢٧

∴ س^{٢} + ٢ س − ١٥ = ٠

∴ (س + ٥) (س − ٣) = ٠

∴ س = − ٥ أو س = ٣

عندما س = − ٥ من ② ص = ٦

عندما س = ٣ من ② ص = − ٢

∴ النقط هى : (− ٥ ، ٦) ، (٣ ، − ٢)

(٤) [أ] ∵ د (٠)$^{-}$ = نهـــا $\frac{\text{حا ٣ س}}{\text{س}}$ = ٣ ٦
س ← ٠$^{-}$

د (٠)$^{+}$ = نهـــا (٣ + حتا س) = ٤
س ← ٠$^{+}$

∵ د (٠)$^{-}$ ≠ د (٠)$^{+}$

∴ نهـــا د (س) ليس لها وجود
س ← ٠

[ب] ∵ نفرض أن طول ضلع القاعدة = س

وأن ارتفاع متوازى المستطيلات = ع

∵ مجموع أطوال أحرفه = ٢٤٠

∴ ٨ س + ٤ ع = ٢٤٠

∴ ع = ٦٠ − ٢ س ..... (١)

∵ حجم متوازى المستطيلات = س^{٢} ع

∴ ع = س^{٢} (٦٠ − ٢ س)

∴ ع = ٦٠ س^{٢} − ٢ س^{٣}

∴ ع$'$ = ١٢٠ س − ٦ س^{٢}

بوضع ع$'$ = ٠ ∴ ٦ س (٢٠ − س) = ٠

∴ س = ٠ مرفوض أما س = ٢٠

∵ ع$''$ = ١٢٠ − ١٢ س

* عندما س = ٢٠

∴ ع$''$ = ١٢٠ − ٢٤٠ = − ١٢٠ < ٠

∴ الحجم يكون أكبر ما يمكن عندما س = ٢٠

من (١) ع = ٦٠ − ٤٠ = ٢٠

∴ الأبعاد هى: ٢٠ سم ، ٢٠ سم ، ٢٠ سم

⑤ [أ] ∵ $\frac{د ص}{د س} = \frac{١ - ٢ س}{٢ ص + ٣}$

∴ ∫ (٢ ص + ٣) د ص = ∫ (١ − ٢س) د س

∴ ص^{٢} + ٣ ص = س − س^{٢} + ث

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٣)

∴ فهى تحقق معادلته

∴ ٩ + ٩ = ١ − ١ + ث ∴ **ث = ١٨**

∴ معادلة المنحنى هى :

س^{٢} + ص^{٢} − س + ٣ ص − ١٨ = صفر

[ب] ∵ $\frac{د ع}{د س} \times \frac{د س}{د ص} = \frac{٢ س - ٣}{س^{٢} + ١}$

∴ $\frac{د ع}{د ص} = \frac{٢ س - ٣}{س^{٢} + ١}$

∴ $\frac{د^{٢} ع}{د ص^{٢}} = \frac{(س^{٢} + ١) \times ٢ - (٢ س - ٣) \times ٢ س}{(س^{٢} + ١)^{٢}} \times \frac{د س}{د ص}$

∴ $\frac{د^{٢} ع}{د ص^{٢}} = \frac{٢ (س^{٢} + ١) - ٢ س (٢ س - ٣)}{(س^{٢} + ١)^{٣}}$

∴ عندما س = ١

∴ $\frac{د^{٢} ع}{د ص^{٢}} = \frac{٢ \times ٢ - ١ \times ٢}{٨} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$