(أولاً) أجب عن السؤال الآتى :

(١) (أ) أوجد : (أولاً) $\int$ ١٢ (٢ س − ١)^{٥} ء س

(ثانيًا) $\int$ (٤ حتا ٤ س − ٦ حا ٣ س) ء س

(ب) إذا كانت د دالة حيث د (س) = ٢ س^{٣} − ٩ س^{٢} − ٢٤ س ، فعين فترات التزايد وفترات التناقص على ع ، ثم أوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة لدالة فى الفترة [− ٣ ، ٥] .

(ثانيًا) أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

(٢) (أ) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢ & \text{، س} \geq ١ \\ ٢\text{ س} + ١ & \text{، س} < ١ \end{cases}$

فابحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = ١

(ب) وعاء فارغ سعته ١٤٠٠ سم^{٣} يصب فيه الماء بمعدل (٢ ن + ٥٠) سم^{٣}/ ث حيث ن الزمن ، أوجد الزمن اللازم لامتلاء الوعاء .

(٣) (أ) إذا كانت د دالة حيث د (س) = س^{٣} − ٣ س + ٥ ، فعين فترات التحدب إلى أعلى وفترات التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لمنحنى الدالة .

(ب) سقط حجر فى ماء ساكن ، فتكونت موجة دائرية يتزايد نصف قطرها بمعدل ٢,١ سم/ ث . فإذا كان معدل الزيادة فى مساحة سطح الموجة فى نهاية ن ثانية من البداية يساوى ٢٧٧,٢ سم^{٢} / ث ، فأوجد قيمة ن .

④ (أ) إذا كان : $س^٢ + ٩ ص^٢ = ٦ س ص + ٤$ حيث $س \neq ٣ ص$ ،

فأوجد قيمة : $\frac{ءص}{ءس}$

(ب) مجموع ثلاثة أعداد موجبة هو ٣٦ وأكبر هذه الأعداد ضعف أصغرها . أوجد الأعداد الثلاثة بحيث يكون حاصل ضربها أكبر ما يمكن .

⑤ (أ) إذا كانت : $د(س) = \begin{cases} \frac{٥ س + حا س}{حا ٣ س} & ، س \neq ٠ \\ ك & ، س = ٠ \end{cases}$

فأوجد قيمة الثابت ك التي تجعل الدالة د متصلة عند س = صفرًا .

(ب) إذا كان المماس للمنحنى : $ص = س^٤ - ٢ س^٢ - س$ عند النقطة أ = (- ١ ، ٠) يمس المنحنى عند نقطة أخرى ب ، فأوجد معادلة العمودى على المنحنى ب .

① [أ] (أولًا) $\int$ ١٢ (٢ س – ١)^{٥} ؤ س

= (٢ س – ١)^{٦} + ث

(ثانيًا) $\int$ (٤ حتا ٤ س – ٦ حا ٣ س) ؤ س

= حا ٤ س + ٢ حتا ٣ س + ث

[ب] ∵ د (س) = ٢ س^{٣} – ٩ س^{٢} – ٢٤ س

∴ دَ (س) = ٦ س^{٢} – ١٨ س – ٢٤

بوضع دَ (س) = ٠

∴ ٦ (س^{٢} – ٣ س – ٤) = ٠

∴ (س – ٤) (س + ١) = ٠

∴ س = ٤ أو س = – ١

فى الفترة] – ١ ، ٤ [:

∵ دَ (س) < ٠ ∴ الدالة متناقصة

وفى كل من الفترة] – ∞ ، – ١ [،

الفترة] ٤ ، ∞ [

∵ دَ (س) > ٠ ∴ الدالة متزايدة

أى الدالة متزايدة فى ح – [– ١ ، ٤]

د (– ٣) = – ٦٣ ، د (– ١) = ١٣ ،

د (٤) = – ١١٢ ، د (١) = – ٩٥

∴ القيمة العظمى المطلقة للدالة = ١٣

والقيمة الصغرى المطلقة للدالة = – ١١٢

(٢) [أ] د (١) = ٣ د $(1)^{-}$ = ٣ ، د $(1)^{+}$ = ٣

∵ د (1^{-}) = د (1^{+}) = د (١) = ٣

∴ الدالة متصلة عند س = ١

$$\text{د}'(1)^{-} = \lim_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{\text{د}(1+\text{هـ}) - \text{د}(1)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{(1+\text{هـ})^{2} + 2 - 3}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^{-}} \frac{\text{هـ}(2+\text{هـ})}{\text{هـ}} = 2$$

$$\text{د}'(1^{+}) = \lim_{\text{هـ} \to 0^{+}} \frac{\text{د}(1+\text{هـ}) - \text{د}(1)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^{+}} \frac{2(1+\text{هـ}) + 1 - 3}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^{+}} \frac{2\text{هـ}}{\text{هـ}} = 2$$

∵ د$'$ $(1)^{-}$ = د$'$ $(1)^{+}$ = د$'$ (١)

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

[ب] ∵ $\frac{\text{ءح}}{\text{ءن}} = 2\text{ن} + 50$

∴ $\text{ح} = \int (2\text{ن} + 50)\, \text{ءن}$

∴ $\text{ح} = \text{ن}^{2} + 50\text{ن} + \text{ث}$

∵ ح = ٠ عندما ن = ٠   ∴ ث = ٠

∴ $\text{ح} = \text{ن}^{2} + 50\text{ن}$ وعندما ح = ١٤٠٠

∴ $\text{ن}^{2} + 50\text{ن} - 1400 = 0$

∴ $(\text{ن} - 20)(\text{ن} + 70) = 0$

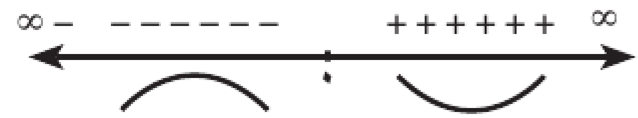
∴ ن = ٢٠ ثانية

∴ الزمن اللازم لامتلاء الوعاء = ٢٠ ثانية

③ [أ] د´ (س) = ٣ س^{٢} − ٣ ، د˝ (س) = ٦ س

بوضع د˝ (س) = ٠ ∴ س = ٠

∴ توجد نقطة انقلاب للدالة عند النقطة (٠ ، د (٠)) أى عند النقطة (٠ ، ٥)



∵ د´´ (س) < ٠ عندما س < ٠

∴ منحنى الدالة محدب لأعلى فى الفترة] −∞ ، ٠ [

∵ د´´ (س) > ٠ عندما س > ٠

∴ منحنى الدالة محدب لأسفل فى الفترة] ٠ ، ∞ [

[ب] ∵ م = ط نق^{٢}

∴ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٢ ط نق × $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

∵ $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$ = ٢,١ سم/ث ،

$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}}$ = ٢٧٧,٢ سم^{٢}/ث

∴ ٢٧٧,٢ = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ نق × ٢,١

∴ نق = ٢١ سم

∴ ن = نق ÷ $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}}$

∴ ن = ٢١ ÷ ٢,١ = ١٠ ثوان

④ [أ] $\because$ $س^2 - ٦ س ص + ٩ ص^2 = ٤$

$\therefore$ $(س - ٣ ص)^2 = ٤$

$\therefore$ $٢ (س - ٣ ص) (١ - ٣ \frac{ءص}{ءس}) = ٠$

بقسمة طرفى المعادلة على ٢ (س −٣ ص)

$\therefore$ $١ - ٣ \frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣}$

[ب] نفرض أن العدد الأصغر = س

$\therefore$ العدد الأكبر = ٢ س

$\therefore$ العدد الأوسط = ٣٦ − ٣ س

بفرض أن حاصل ضرب هذه الأعداد = ص

$\therefore$ ص = س × ٢ س (٣٦ − ٣ س)

$\therefore$ $ص = ٦ (١٢ س^2 - س^3)$

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = ٦ (٢٤ س - ٣ س^2)$

$\therefore$ $\frac{ءص}{ءس} = ١٨ س (٨ - س)$

عند القيمة العظمى $\frac{ءص}{ءس} = ٠$

$\therefore$ س = ٠ مرفوض أو س = ٨

$\therefore$ $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = ١٨ (٨ - ٢ س)$

$د''(٨) = ١٨ \times - ٨ < ٠$

$\therefore$ يكون حاصل ضرب هذه الأعداد أكبر ما يمكن عندما س = ٨

$\therefore$ الأعداد هي : ٨ ، ١٢ ، ١٦

(٥) [أ] ∵ الدالة متصلة

∴ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٥ س + حا س}{حا ٣ س} = ك$

∴ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{٥ + \frac{حا س}{س}}{\frac{حا ٣ س}{س}} = ك$

∴ $\frac{٥ + ١}{٣} = ك$ ∴ $\boxed{ك = ٢}$

[ب] ∵ ص = س^{٤} − ٢ س^{٢} − س ...... (١)

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤ س^{٣} - ٤ س - ١$

عندما س = − ١

∴ $\frac{ءص}{ءس} = - ١$

∴ معادلة المماس هى

ص − ٠ = − ١ (س + ١) ...... (٢)

∴ س + ص + ١ = ٠

بالتعويض من (٢) فى (١)

∴ − س − ١ = س^{٤} − ٢ س^{٢} − س

∴ س^{٤} − ٢ س^{٢} + ١ = ٠

∴ (س^{٢} − ١)^{٢} = ٠

∴ س = ١ أ، س = − ١

عندما س = ١ ∴ ص = − ٢

∴ ب = (١ ، − ٢)

∵ ميل المماس = − ١

∴ ميل العمودى = ١

∴ معادلة العمودى عند نقطة ب هى

ص + ٢ = س − ١

∴ س − ص − ٣ = ٠