(أولاً) أجب عن السؤال الآتى :

① (أ) أوجد : (أولاً) $\int$ (حتا ٣ س − حا س) ء س

(ثانيًا) $\int$ (س $\sqrt{\frac{٤}{س} - \frac{٥}{س^{٢}}}$) ء س

(ب) للدالة د حيث د (س) = $س^{٣} - ٦ س^{٢} + ١$ أوجد :

أولاً : فترات التزايد وفترات التناقص على ح .

ثانيًا : القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة فى الفترة [١ ، ٥]

(ثانيًا) أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

② (أ) إذا كانت : د (س) =
$$\begin{cases} ٧ - \text{حتا } ٦ \text{ س} & \text{س} < ٠ \\ \dfrac{٤ \text{ س} + \text{طا } ٣ \text{ س}}{٥ \text{ س} + ٢ \text{ حا س}} & ٠ < \text{س} < \dfrac{ط}{٦} \end{cases}$$

فابحث وجود $\lim\limits_{س \leftarrow ٠}$ د (س)

(ب) أوجد معادلة العمودى على المنحنى : $س^{٢} ص^{٢} + ٣ س - ٥ ص + ١ = ٠$

عند النقطة (١ ، ١)

③ (أ) للدالة د حيث د (س) = $س^{٣} + ٣ س^{٢}$ أوجد :

(أولاً) القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية .

(ثانيًا) فترات التحدب إلى أعلى وفترات التحدب إلى أسفل ونقطة الانقلاب

(إن وجدت) لمنحنى الدالة .

(ب) إذا كان مجموع طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة وارتفاعها يساوى

٣٠ سم فأوجد بدلالة ط أكبر حجم ممكن للأسطوانة .

٤ (أ) إذا كانت : ص = ٢ حتا (٣ س + ١) فأثبت أن : $\frac{ى^{٢} ص}{ى س^{٢}}$ + ٩ ص = ٠

(ب) من نقطة الأصل (و) في مستوى إحداثي متعامد تحركت نقطة أ في اتجاه ٣٠° شمال الشرق بسرعة مقدارها ٤ متر / دقيقة ، وبعد دقيقة تحركت نقطة ب من نفس نقطة (و) على المستقيم $\overleftrightarrow{و ب}$ الذي معادلته : س + $\sqrt{٣}$ ص = ٠ بسرعة مقدارها ٦ متر / دقيقة وفي الاتجاه الذي يجعل ($\angle$ ب و أ) حادة . أوجد معدل تغير المسافة بين النقطتين أ ، ب بعد مضي دقيقتين من تحرك النقطة ب .

٥ (أ) إذا كانت : المشتقة الأولى للدالة د تساوي س^{١٧} $\left(\frac{١}{س} + \frac{١}{س^{٢}} \right)^{٨}$

فأوجد قيمة : د (٠) – د (– ١)

(ب) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٦ \text{ س} + ١١ & ، \quad |س| \leq ١ \\ \text{س}^{٢} + ٤ & ، \quad |س| > ١ \end{cases}$

فابحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = – ١

① [أ] (أولًا) $\int$ (حتا ٣ س − حا س) ى س

$= \frac{١}{٣}$ حا ٣ س + حتا س + ث

(ثانيًا) $\int \left(\frac{٤ \text{ س}^{٢}}{\text{س}} - \frac{٥ \text{ س}^{٢}}{\text{س}^{٢}} \right)^{\frac{١}{٢}}$ ى س

$= \int (٤ \text{ س} - ٥)^{\frac{١}{٢}}$ ى س

$= ٢ \times \frac{(٤ \text{ س} - ٥)^{\frac{٣}{٢}}}{٣ \times ٤} +$ ث

$= \frac{١}{٦} (٤ \text{ س} - ٥)^{\frac{٣}{٢}} +$ ث

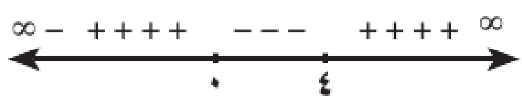
[ب] (أولًا) ∵ د (س) = س^{٣} − ٦ س^{٢} + ١

∴ د َ (س) = ٣ س^{٢} − ١٢ س

بوضع د َ (س) = ٠

∴ ٣ س (س − ٤) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٤



∵ د َ (س) > ٠ في ح − [٠ ، ٤]

∴ الدالة متزايدة

∵ د َ (س) < ٠ في] ٠ ، ٤ [

∴ الدالة متناقصة

(ثانيًا) ∵ د (١) = − ٤ ، د (٤) = − ٣١ ،

د (٥) = − ٢٤

القيمة العظمى المطلقة للدالة = − ٤

القيمة الصغرى المطلقة للدالة = − ٣١

(٢) [أ] $\text{د}(٠^-) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} (٧ - \text{حتا } ٦ \text{ س}) = ٦$

$$\text{د}(٠^+) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \frac{٤ + \frac{\text{طا } ٣ \text{ س}}{\text{س}}}{٥ + ٢\,\frac{\text{حا س}}{\text{س}}} = \frac{٧}{٧} = ١$$

$\because \text{د}(٠^-) \neq \text{د}(٠^+)$

$\therefore$ لا توجد نهاية عند س = ٠

[ب] النقطة (١ ، ١) تحقق معادلة المنحنى

$\because \text{س}^٢ \text{ص}^٢ + ٣\text{ س} - ٥ \text{ ص} + ١ = ٠$

$\therefore \text{س}^٢ \times ٢ \text{ ص} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + \text{ص}^٢ \times ٢ \text{ س}$

$+ ٣ - ٥ \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ١$

بالتعويض عن س = ١ ، ص = ١

$\therefore ٢ \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} + ٥ - ٥ \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠$

$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{٥}{٣}$ (ميل المماس)

$\therefore$ ميل العمودى هى $= -\frac{٣}{٥}$

معادلة العمودى هى :

$\text{ص} - ١ = \frac{-٣}{٥} (\text{س} - ١)$

أى : $٣ \text{ س} + ٥ \text{ ص} - ٨ = ٠$

(٣) [أ] (أولًا) ∵ د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢}

∴ د´ (س) = ٣ س^{٢} + ٦ س

بوضع د´ (س) = ٠

∴ ٣ س (س + ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = − ٢

د (٠) = ٠ ، د (− ٢) = − ٨ + ١٢

= ٤

النقط هي (٠ ، ٠) ، (− ٢ ، ٤)

د˝ (س) = ٦ س + ٦ = ٦ (س + ١)

∵ د˝ (٠) = ٦ > ٠

توجد قيمة صغرى محلية عند النقطة

(٠ ، ٠) ، د˝ (− ٢) = − ٦ < ٠

∴ توجد قيمة عظمى محلية عند النقطة (− ٢ ، ٤)

(ثانيًا) المنحنى محدب لأعلى في

] − ∞ ، − ١ [،

المنحنى محدب لأسفل في

] − ١ ، ∞ [

بوضع : د˝ (س) = ٠ ∴ س = − ١

د (− ١) = (− ١)^{٣} + ٣ × (− ١)^{٢}

= − ١ + ٣ = ٢

(− ١ ، ٢) نقطة انقلاب

[ب] ∵ نق + ع = ٣٠ ∴ ع = ٣٠ − نق

∵ حجم الأسطوانة = ط نق^{٢} ع

∴ ع = ط نق^{٢} (٣٠ − نق)

∴ ع´ = ط (٦٠ نق − ٣ نق^{٢})

بوضع ع´ = ٠ ∴ ٣ نق (٢٠ − نق) = ٠

∴ نق = ٠ مرفوض أو نق = ٢٠ سم

ع˝ = ط (٦٠ − ٦ نق)

= ٦ ط (١٠ − نق)

عندما : نق = ٢٠ سم ، فإن : ع˝ < ٠

يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن عندما نق = ٢٠ سم

∴ ع = ط × ٤٠٠ × ١٠

= ٤٠٠٠ ط سم^{٣}

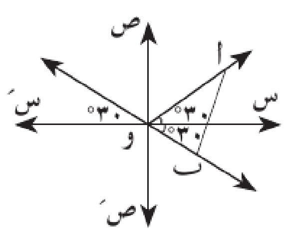
(٤) [أ] ∵ ص = ٢ حتا (٣ س + ١) ...... (١)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = − ٦ حا (٣ س + ١) ،

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = − ١٨ حتا (٣ س + ١) ...... (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ + ٩ ص = ٠

[ب] ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{و ب}}$ = طا ١٥٠° = − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$



ولكي تكون (∠ أ و ب) حادة يجب أن تتحرك ب في اتجاه ٣٠° جنوب الشرق وبالتالي يكون ق (∠ أ و ب) = ٦٠°

بعد ن دقيقة من بداية تحرك ب يكون :

و ب = ٦ ن ، و أ = ٤ (ن + ١)

∵ $(\text{أ ب})^{٢} = (\text{و ب})^{٢} + (\text{و أ})^{٢}$ − ٢ و ب × و أ حتا ٦٠°

∴ ف^{٢} = ٣٦ ن^{٢} + ١٦ (ن + ١)^{٢} − ١٢ ن × ٤ (ن + ١) × $\frac{١}{٢}$

∴ ف^{٢} = ٢٨ ن^{٢} + ٨ ن + ١٦ .... (١)

عندما ن = ٢

∴ ف^{٢} = ١١٢ + ١٦ + ١٦ = ١٤٤

∴ ف = ١٢ مترًا

∴ ف^{٢} = ٢٨ ن^{٢} + ٨ ن + ١٦

∴ ٢ ف $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٥٦ ن + ٨

عندما ن = ٢ ، ف = ١٢

∴ ١٢ $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٥٦ + ٤

∴ $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٥ متر/ق

٥ [أ] $\because \text{ص} = \text{س}^{١٧}\,(\text{س}^{-١} + \text{س}^{-٢})^{٨}\ \text{ى س}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) =$

$\int \text{س}^{١٧} \times \text{س}^{-١٦}\,(\text{س} + ١)^{٨}\ \text{ى س}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \int \text{س}\,(\text{س} + ١)^{٨}\ \text{ى س}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) =$

$\int (\text{س} + ١ - ١)(\text{س} + ١)^{٨}\ \text{ى س}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) =$

$\int [(\text{س} + ١)^{٩} - (\text{س} + ١)^{٨}]\ \text{ى س}$

$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{١}{١٠}(\text{س} + ١)^{١٠}$

$- \frac{١}{٩}(\text{س} + ١)^{٩} + \text{ث}$

$\therefore \text{د}(٠) - \text{د}(-١) = (\frac{١}{١٠} - \frac{١}{٩} + \text{ث} - \text{ث})$

$= \frac{٩ - ١٠}{٩٠} = - \frac{١}{٩٠}$

[ب] $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤ & \text{عندما س} < -١ \\ ٦\text{س} + ١١ & \text{عندما } -١ \le \text{س} \le ١ \\ \text{س}^{٢} + ٤ & \text{عندما س} > ١ \end{cases}$

$\because \text{د}(-١)^{-} = \text{د}(-١)^{+} = \text{د}(-١) = ٥$

$\therefore$ الدالة متصلة عند س = − ١

بحث قابلية الاشتقاق

$\text{د}'(-١)^{-} = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{\text{د}(-١ + \text{هـ}) - \text{د}(-١)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{(-١ + \text{هـ})^{٢} + ٤ - ٥}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{\text{هـ}(\text{هـ} - ٢)}{\text{هـ}} = -٢$

$\text{د}'(-١)^{+} = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{د}(-١ + \text{هـ}) - \text{د}(-١)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{٦(-١ + \text{هـ}) + ١١ - ٥}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{٦\text{هـ}}{\text{هـ}} = ٦$

$\because \text{د}'(-١)^{-} \ne \text{د}'(-١)^{+}$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = − ١