العزوم

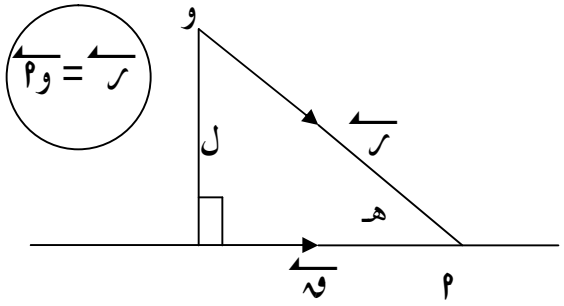
عزم قوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة لنقطة و

هو مقدرة القوة $\overleftarrow{ق}$ على إحداث دوران لجسم ما حول هذه النقطة و

* اذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ تؤثر فى النقطة ا ، $\overleftarrow{ر}$ متجه موضع نقطة ا بالنسبة لنقطة و فإن عزم $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة و هو $\overleftarrow{ج_و}$ حيث

$\overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (\overleftarrow{ر}\ ق\ جا\ هـ)\ \overleftarrow{ى}$

حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على مستوى القوة $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$



$\| \overleftarrow{ج_و} \| = ر\ ق\ جا\ هـ = ق\ (ر\ جا\ هـ) = ق\ ل$ حيث ل طول العمود من و على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$

$$\therefore ل = \frac{\| \overleftarrow{ج_و} \|}{ق} = \frac{\text{معيار العزم}}{\text{معيار القوة}}$$

مثال ١ :

اذا كانت $\overleftarrow{ق} = ٣\overleftarrow{س} - ٤\overleftarrow{ص}$ ، و تؤثر فى النقطة ا (٢، ٣) فاوجد طول العمود النازل من النقطة ب = (-٦ ، ٧) على خط عمل $\overleftarrow{ق}$

الحل

$\overleftarrow{ج_ب} = \overleftarrow{با} \times \overleftarrow{ق} = (ا - ب) \times \overleftarrow{ق} = (٨ ، -٤) \times (٣ ، -٤) = [-٣٢ + ١٢]\ \overleftarrow{ع}$

$= -٢٠\ \overleftarrow{ع}$

$\therefore \| \overleftarrow{ج_ب} \| = ٢٠$ ، $\therefore \| \overleftarrow{ق} \| = [\ ٩ + ١٦\ ]^{\frac{١}{٢}} = ٥$

$$ل = \frac{٢٠}{٥} = ٤ \text{ وحدة طول}$$

غازى عبدالله

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

نظرية

مجموع عزوم مجموعة من القوى المستوية و المتلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة يساوى عم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

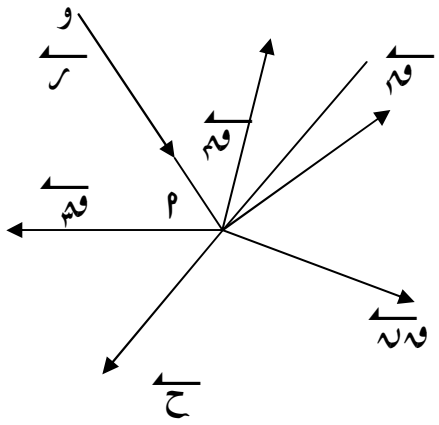
الإثبات

بفرض $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ ، ..... ، $\overleftarrow{ق_ن}$ عدة قوى متلاقية فى نقطة م ، و نقطة فى الفراغ ، $\overleftarrow{ح}$ محصلة هذه القوى

$$\overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_3} + ... + \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_ن}$$

$$= \overleftarrow{ر} \times (\overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3} + ... + \overleftarrow{ق_ن})$$

$$= \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح}$$



ملاحظات هامة:

١ - اذا كان $\overleftarrow{ج_و} = صفر$ فإن $\overleftarrow{ع} = صفر$

العدد (صفر) يسمى القياس الجبرى للعزوم

بينما $||\overleftarrow{ج_و}|| = ٣$

٢ - اذا كان خط عمل $\overleftarrow{ق}$ ينصف م ب فإن $\overleftarrow{ج_م} = صفر$ $\overleftarrow{ج_ب}$ والعكس صحيح

٣ - اذا كان خط عمل $\overleftarrow{ق}$] م ب فإن $\overleftarrow{ج_م} = \overleftarrow{ج_ب}$ والعكس صحيح

٤ - اذا كان $\overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{٠}$ فإن خط عمل القوة يمر بنقطة و

٥ - لإيجاد معادلة خط عمل القوة $\overleftarrow{ق} = م \overleftarrow{س} + ب \overleftarrow{ص}$

أولاً: نوجد ميل خط عمل القوة م وهو يساوى $\frac{ب}{م}$ ثانيا : نوجد نقطة على خط عمل القوة (س١ ، ص١)

ثالثا : المعادلة هى ص ــ ص١ = م (س ــ س١)

٦ - اذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$ تعمل فى $\overleftarrow{م ب}$ أو $\overleftarrow{ق}$] م ب فإن $\overleftarrow{ق} = ك \overleftarrow{م ب}$ حيث ك ثابت

$$||\overleftarrow{ق}|| = ك ||\overleftarrow{م ب}||$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال٢ : اذا كانت القوى $\overleftarrow{ق_1} = \overleftarrow{س} + 2\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = -3\overleftarrow{س} + 2\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3} = 3\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (٢ ، ــ ٣) فاثبت أن خط عمل المحصلة ينصف ب د| حيث ب = (٧ ، ــ ٢) ، د =(١ ، ٨)

الحل

$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3} = \overleftarrow{س} + 3\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ج_ب} = \overleftarrow{ب أ} \times \overleftarrow{ح} = (أ - ب) \times \overleftarrow{ح} = (-٥ ، -١) \times (١ ، ٣) = [-١٥ + ١] \overleftarrow{ع}$

$= -١٤ \overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_د} = \overleftarrow{د أ} \times \overleftarrow{ح} = (١ ، -١١) \times (١ ، ٣) = [٣ + ١١] \overleftarrow{ع} = ١٤ \overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_ب} = -\overleftarrow{ج_د}$ ∴ خط عمل المحصلة ينصف ب د|

مثال٣ : اذا كانت $\overleftarrow{ق_1} = 2\overleftarrow{س} + م\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = 6\overleftarrow{س} + 4\overleftarrow{ص}$ قوتان مجموع عزميهما حول نقطة الأصل يساوى ١٢ $\overleftarrow{ع}$ ، ومجموع عزميهما حول نقطة أ= (٢ ، ٠) يساوى ــ ٢٨ $\overleftarrow{ع}$ ٠ أوجد قيمة م

الحل

$\overleftarrow{ح} = 8\overleftarrow{س} + (م + 4)\overleftarrow{ص}$ ،ونفرض أن $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة ب = (س ، ص) ، و =(٠ ، ٠)

$\overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{وب} \times \overleftarrow{ح} = (س ، ص) \times (8 ، م + 4) = [س م + 4س - 8ص] \overleftarrow{ع}$

∴ $[س م + 4س - 8ص] \overleftarrow{ع} = ١٢ \overleftarrow{ع}$

∴ س م + ٤ س ــ ٨ ص = ١٢ (١)

$\overleftarrow{ج_أ} = \overleftarrow{أ ب} \times \overleftarrow{ح} = (س - ٢ ، ص) \times (8 ، م + 4) = [س م + 4س - 2م - 8 - 8ص] \overleftarrow{ع}$

∴ $[س م + 4س - 8ص - 2م - 8] \overleftarrow{ع} = -٢٨ \overleftarrow{ع}$

∴ س م + ٤س ــ ٨ ص ــ ٢م ــ ٨ = ــ ٢٨

∴ ٢م ــ س م ــ ٤س+ ٨ ص = ٢٠ (٢)

بجمع ١ ، ٢

∴ ٢ م = ٣٢ ∴ م = ١٦

مثال٤ : اكتب القوة $\overleftarrow{ق}$ على الصورة $أ\overleftarrow{س} + ب\overleftarrow{ص}$ اذا علم أن $|| \overleftarrow{ق} || = ١٠ [٢|$ ، تؤثر فى الإتجاه من النقطة أ= (٥ ، ٥) إلى النقطة ب =(٦ ، ٤) ثم عين القياس الجبرى لعزمها حول نقطة الأصل

الحل

∴ $\overleftarrow{ق}] \overleftarrow{أ ب}$ ∴ $\overleftarrow{ق} = ك \overleftarrow{أ ب}$ ، ك > ٠

$\overleftarrow{ق} = ك (١ ، -١) = ك\overleftarrow{س} - ك\overleftarrow{ص}$

∴ $||\overleftarrow{ق}|| = ك [|١| + |١|] = ك [٢|$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

١٠ [٢ | = ك [٢ | ∴ ك = ١٠

$\overleftarrow{ق}$ = ١٠ $\overleftarrow{س}$ ــ ١٠ $\overleftarrow{ص}$

ثانياً: ج $\overleftarrow{و}$ = و $\overleftarrow{ف}$ × $\overleftarrow{ق}$ = (٥، ٥) × (١٠ ، ــ ١٠) = ــ ١٠٠ $\overleftarrow{ع}$

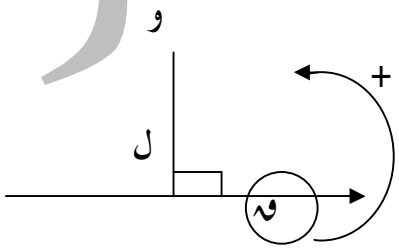
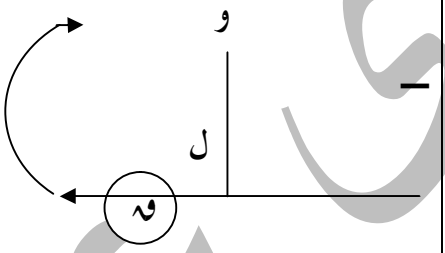
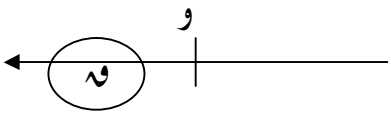
∴ القياس الجبرى للعزم = ــ ١٠٠

عزوم القوى المستوية

ايجادالقياس الجبرى لعزم قوة باستخدام مقدارها وبعدها عن نقطة العزم

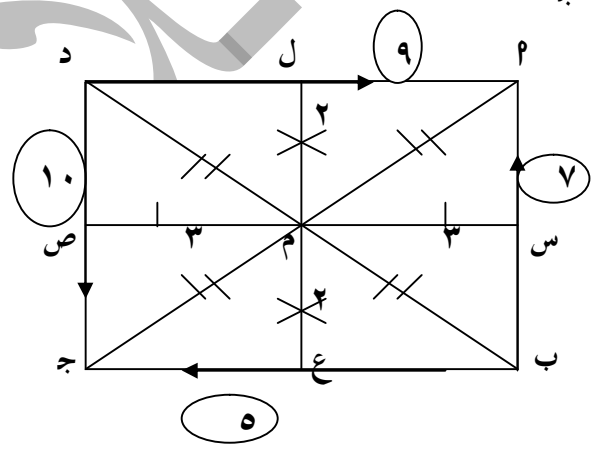
اذا كان مقدار القوة = ق ، طول العمود النازل من نقطة العزم على خط عملها = ل فإن

القياس الجبرى للعزم = ــ ق ل كما فى الأشكال الآتية

اذا كان اتجاه دوران القوة حول و ضد اتجاه حركة عقارب الساعة	اذا كان اتجاه دوران القوة حول و مع اتجاه حركة عقارب الساعة	اذا كانت و تقع على خط عمل القوة
		
ج و = ق ل	ج و = ــ ق ل	ج و = ٠

مثال٥ : ا ب ج د مستطيل فيه ا ب = ٤ سم ، ب ج = ٦سم ٠ أثرت قوى مقاديرها ٧ ، ٥ ، ١٠ ، ٩ نيوتن فى الإتجاهات $\overleftarrow{ب ا}$ ، $\overleftarrow{ب ج}$ ، $\overleftarrow{د ج}$ ، $\overleftarrow{د ا}$ ٠ أوجد المجموع الجبرى لعزوم القوى بالنسبة إلى

أولاً: مركز المستطيل ثانياً: نقطة ج



من هندسة الشكل نجد أن

م ا = م ب = م ج = م د (من خواص المستطيل)

م س $\perp$ ا ب ∴ س منتصف ا ب

بالمثل ص ، ع ، ل منتصفات ج د ، ب ج ، ا د

م س = م ص = $\frac{1}{2}$ ب ج = ٣سم

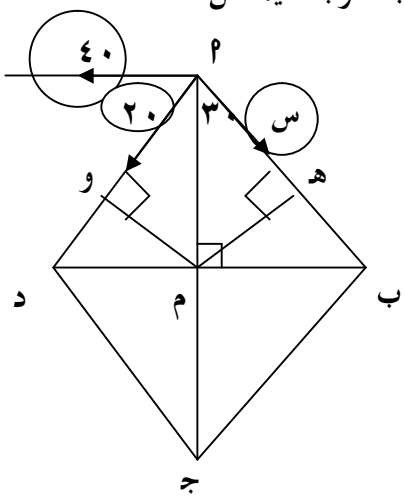
، ع = م ل = $\frac{1}{2}$ ا ب = ٢سم

أولاً: ج م = ٧ ×٣ ــ ٩ × ٢ ــ ٥ × ٢ + ١٠ × ٣ = ٢٣ نيوتن ٠ سم

ثانياً: ج ج = ٧×٦ ــ ٩× ٤ = ٦ نيوتن ٠سم

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال٦ : أ ب جـ د معين فيه ق (< جـ) = ٦٠° ، أثرت فى النقطة أ القوى ٤٠ ، ٢٠ ، س نيوتن فى الإتجاهات $\overleftarrow{ب د}$ ، $\overleftarrow{أ د}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ على الترتيب فإذا كانت المحصلة تعمل فى $\overleftarrow{أ جـ}$ فاوجد قيمة س



الحل

نفرض طول ضلع المعين = ل

من خواص المعين :

ق(< أ) = ق (< جـ) = ٦٠°

، ق (< ب أ م) = ق (< جـ أ م) = ٣٠°

$أم = أ ب جتا ٣٠° = \frac{ل \sqrt{3}}{2}$

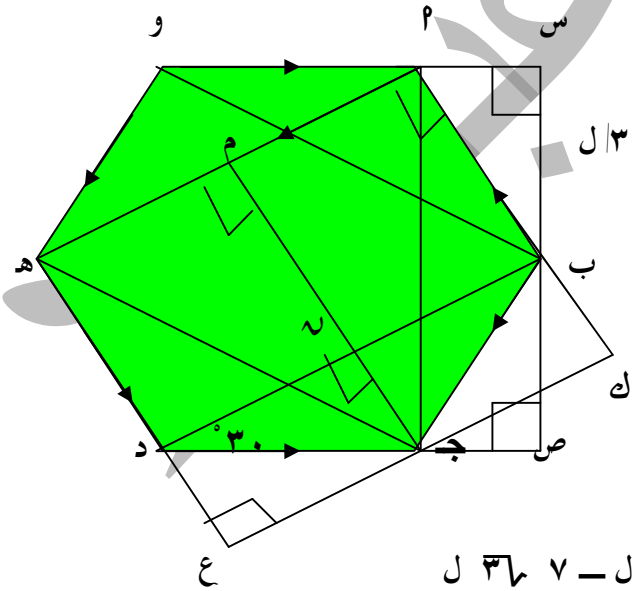
$م هـ = م و = أم جا ٣٠ = \frac{ل \sqrt{3}}{4}$

∵ المحصلة تعمل فى $\overleftarrow{أ جـ}$ ∴ ج م = ٠ ∴ $٤٠ \times \frac{ل \sqrt{3}}{2} + ٢٠ \times \frac{ل \sqrt{3}}{4} - س \times \frac{ل \sqrt{3}}{4} = ٠$

∴ س = ١٠٠ نيوتن

مثال ٧: أ ب جـ د هـ و مسدس منتظم ، أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٢ ، ٧ ، ق نيوتن فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{د جـ}$ ، $\overleftarrow{هـ د}$ ، $\overleftarrow{و هـ}$ ، $\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ على الترتيب ، فاذا كان ج ب = ج جـ فاوجد قيمة ق

الحل



نفرض أن طول ضلع المسدس = ٢ل

ب س = ب ص = جـ ع = جـ ك = $\frac{ل \sqrt{3}}{2}$ ٢ل = [√٣ ل

ب د = ب و = جـ أ = جـ هـ = √٣ × ٢ل = ٢ √٣ ل

جـ م = جـ ن + ن م = ½ جـ د + د هـ

= ل + ٢ل = ٣ل

∵ ج ب = ج جـ

٥ √٣ ل + ٦ × ٢ √٣ ل + ٢ × ٢ [٣ ل + ق × ٢ل − ٧ √٣ ل

= ٣ × √٣ ل + ٦ × √٣ ل + ٢ × ٢ √٣ ل + ق × ٣ل − ٧ × ٢ √٣ ل

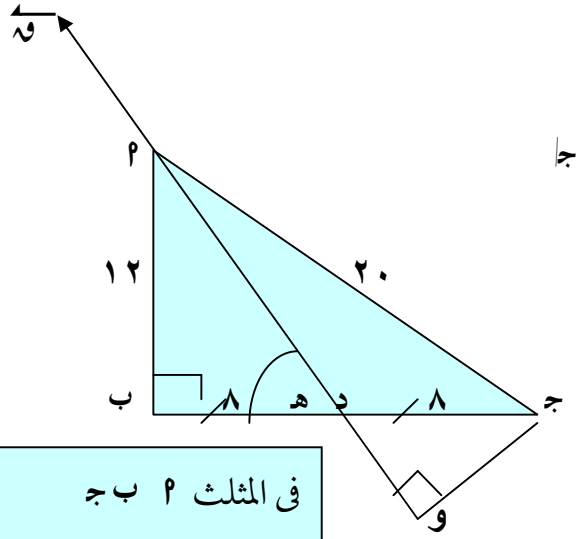
بالاختصار نجد أن ق = ١٥ √٣ نيوتن

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

مثال ٨

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ١٢ سم ، أ جـ = = ٢٠سم ٠ اثرت القوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المثلث ، كان ج$_م$ = ٠ ، ج جـ = ـــ ج ب = ٤٨ [١٣] **أوجد** مقدار القوة وخط عملها

الحل



∵ ج$_م$ = ٠ ∴ خط عمل المحصلة يمر بنقطة أ

∵ ج جـ = ـــ ج ب ∴ خط عمل المحصلة ينصف ب جـ

فى المثلث أ هـ د

∵ أ د = [٦٤ + ١٤٤] = [٢٠٨] = ٤ [١٣]

جـ و = جـ د جا هـ = ٨ × $\frac{١٢}{٤ [١٣]}$

= $\frac{٢٤}{[١٣]}$

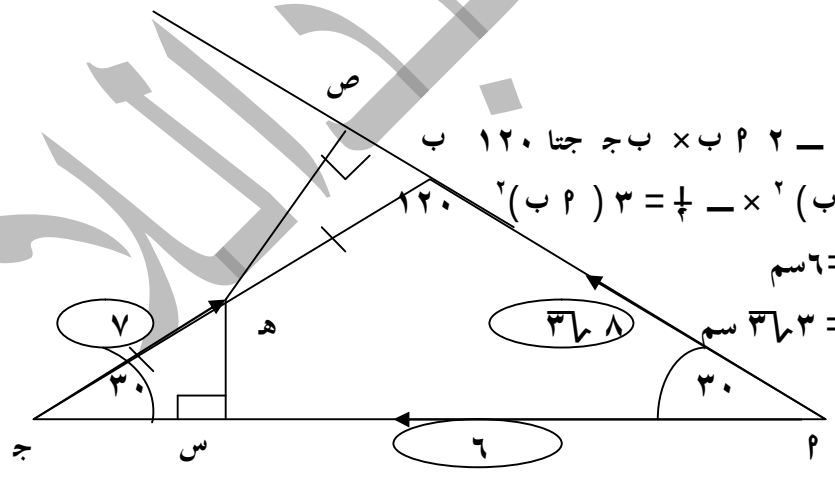
∵ ج ب = ٤٨ [١٣] (+) ∴ ق × $\frac{٢٤}{[١٣]}$ ٤٨ [١٣]

∴ ق = ٢٦ نيوتن وتعمل فى د أ

فى المثلث أ ب جـ
ب جـ = [٤٠٠ ـــ ١٤٤]
= ١٦
جـ د = د ب = ٨سم
ق (جـ دو) = ق (أ دب) = هـ

مثال ٩: أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه ق (< ب) = ١٢٠° ، أ جـ = ١٢ $\sqrt{٣}$ سم ٠ أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٧ ، ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ على الترتيب ٠ أوجد مجموع عزوم القوى حول منتصف ب جـ

الحل



(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ ـــ ٢ أ ب × ب جـ جتا ١٢٠ ب

(أ ب)^٢ = ٢ (أ ب) ^{٢} × ـــ $\frac{١}{٢}$ = ٣ × ١٤٤

أ ب = ١٢سم ∴ ب هـ = جـ هـ = ٦سم

هـ س = ٦ جا (ص ب هـ) = ٦ جا ٦٠ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

هـ ص = ٦ جا ٣٠ = ٣سم

جـ هـ = ٨ $\sqrt{٣}$ × ٣ ـــ ٦ × ٣ $\sqrt{٣}$ = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن ٠ سم

ملحوظة أ ب = ب جـ

ق (أ) = ق (جـ) = $\frac{١٨٠ ـــ ١٢٠}{٢}$ = ٣٠°

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

تمارين منوعة

١ - اذا كانت $\overleftarrow{ق_{١}}$ = س$\overleftarrow{س}$ + ٢ص$\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ = ٢س$\overleftarrow{س}$ ــ م ص$\overleftarrow{ص}$ تؤثران فى النقطتين أ(٢ ، ١) ، ب (١، ٢) **على الترتيب** ٠ أوجد قيمة م بحيث ينعدم مجموع عزميهما بالنسبة حول نقطة الأصل [م = ــ١]

٢ -**تؤثر القوة** $\overleftarrow{ق}$ = م س$\overleftarrow{س}$ + ن ص$\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ(٤ ، ٢) حيث م ، ن ثابتين ٠ فاذا كان عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ــ ١٥ ع$\overleftarrow{ع}$ ، وعزمها بالنسبة للنقطة ب (٠، ٥) يساوى ١٥ ع$\overleftarrow{ع}$ فاوجد قيمتى م ، ن الجواب [م = ٦ ، ن = ــ $\frac{٣}{٢}$]

٣- **القوتان** $\overleftarrow{ق_{١}}$ = ٥س$\overleftarrow{س}$ + ص$\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ = ٢ص$\overleftarrow{ص}$ ــ س$\overleftarrow{س}$ تؤثران فى النقطة أ (٢، ٥) ٠ أوجد متجه عزم محصلة القوتين بالنسبة للنقطة ب (١، ١) ثم اوجد طول العمود المرسوم من ب على خط عمل المحصلة الجواب [ــ ١٣ ع$\overleftarrow{ع}$ ، ٦ , ٢ وحدة طول]

٤- **اذا كانت** $\overleftarrow{ق}$ = ل س$\overleftarrow{س}$ + م ص$\overleftarrow{ص}$ والقياس الجبرى لعزمها حول النقط و(٠، ٠) ، أ(٣ ، ٠) ، ب (ــ ١ ، ٩) يساوى ــ ٨ ، ــ ١٧ ، ١٣ على الترتيب فاوجد قيمة ل ، م وكذلك معادلة خط عمل $\overleftarrow{ق}$ [٢ ، ٣ ، ٣س ــ ٢ص + ٨ =٠]

٥ - **اذا كانت** $\overleftarrow{ق}$ = ٣س$\overleftarrow{س}$ ــ ٤ ص$\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة أ= (٠، ٢) فاثبت أن خط عمل $\overleftarrow{ق}$
أولاً: يوازى $\overleftrightarrow{ب ج}$ حيث ب= (١، ــ ٣) ، ج = (ــ ٢ ، ١)
ثانياً: يمر بنقطة د = (٣ ، ــ ٢)

٦-أ ب ج د معين طول ضلعه ٨سم ، ق(أ̂) = ٦٠° ٠ تؤثر قوى مقاديرها٦ ، $٣\sqrt{}$ ، ٢ ، $٣\sqrt{}$ ،٥ **نيوتن فى** د$\overleftarrow{ج}$ ، د$\overleftarrow{ب}$ ، ج$\overleftarrow{أ}$ على الترتيب ٠ أوجد معيار عوم القوى حول كلٍ من أ ، ب **(٩٦ ، ٥٢)**

٧- أ ب ج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠سم ٠ أثرت قوى مقاديرها ٢٠، ٣٠، ٤٠ نيوتن فى أ$\overleftarrow{ب}$ ، ب$\overleftarrow{ج}$ ، أ$\overleftarrow{ج}$ ٠ أوجد المجموع الجبرى لعزوم القوى حول
١ - منتصف ب ج ٢ - مركز المثلث

٨ــأ ب ج د شبه منحرف فيه أ د] ب ج [، أ ب = ١٢سم ، ب ج = ٨يسم ، أ د= ٩سم ٠ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٦٠ ، ك ، ٣٠ نيوتن فى أ$\overleftarrow{ب}$ ، ب$\overleftarrow{ج}$ ، ج$\overleftarrow{د}$ ، د$\overleftarrow{أ}$ على الترتيب ٠ أوجد قيمة ق ، ك اذا علم أن ج م = ج ج

٩- أ ب ج د هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠سم ٠ أثرت القوى ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ نيوتن فى أ$\overleftarrow{ب}$ ، أ$\overleftarrow{و}$ ، د$\overleftarrow{هـ}$ ، د$\overleftarrow{ج}$ ، هـ$\overleftarrow{و}$ ، ب$\overleftarrow{هـ}$ ٠ أوجد القياس الجبرى لعزوم القوى حول مركز المسدس

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com