المحاضرة الأولي

الدوال Functions

العناصر الأساسية في المحاضرة:

١- مفهوم الدالة وأمثلة.

٢- تعريف النطاق الطبيعي للدالة .

٣- بعض الخواص الهامة للدوال:

(أ) الزوجية والفردية وتماثل منحنى الدالة حول أحد محوري الإحداثيات أو حول نقطة الأصل.

(ب) اطراد الدوال.

بند ١ : مفاهيم أساسية: (Basic Concepts)

تعريف(١. ١. ١): الدالة هى علاقة من مجموعة ما X إلى مجموعة أخري Y بحيث أن كل عنصر فى X يرتبط بعنصر وحيد فى Y .

ونكتب $f : X \to Y$ لتعني أن f دالة من X إلى Y ، كما نكتب $y = f(x)$ (أو $(x,y) \in f$) لتعني أن العنصر y الذى ينتمى إلى المجموعة Y هو صورة العنصر x الذى ينتمى إلى المجموعة X تحت تأثير الدالة f ، ويقال إن المتغير y دالة فى المتغير x وتسمي xبالمتغير المستقل ، y بالمتغير التابع.

وبالتالي فإن f تكون دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y إذا حققت أنه لكل $x \in X \ ; \ y, z \in Y$ ، بحيث $(x, y) \in f$ ، $(x, z) \in f$ ، فإن $y = z$.

المجموعة X تسمى نطاق تعريف الدالة f أو اختصارا نطاق أو مجال (domain) الدالة f ويرمز له بالرمز D_f ، والمجموعة Y تسمى بالنطاق المصاحب أو المجال المقابل (co-domain) للدالة f . عناصر المجموعة Y والمرتبطة بعناصر من المجموعة X تحت تأثير الدالة f تسمى مدى (range) الدالة ، ويرمز لهذه المجموعة بالرمز $f(X)$ أو R_f ، أى أن :

$$R_f = \{f(x) : x \in X\}$$

أمثلة (١. ١. ٢):

١ – نفرض أن h علاقة معرفة من المجموعة $X = \{-1,1,2,3\}$ إلى المجموعة $Y = \{1,4,9\}$ بحيث أن

$$h(-1) = h(1) = 1,\ h(2) = 4,\ h(3) = 9$$

إذن العلاقة h تمثل دالة ونلاحظ أن $h(x) = x^2$ لجميع قيم x التي تقع في نطاق تعريف الدالة وهي المجموعة $X = \{-1,1,2,3\}$ ، ونطاقها المصاحب هو مداها ، أي أن $Y = R_h = \{1,\ 4,\ 9\}$.

٢ – نفرض أن $f: \mathbb{R} \to [0,\infty[$ معرفة كما يلي:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

إذن f تمثل دالة وهذه الدالة تسمى دالة القيمة المطلقة أو دالة المقياس (absolute value function) للعدد x، ومدى هذه الدالة هي الفترة $[0,\infty[$.

٣ – نفرض الدالة $h(x) = \sqrt{x}$ حيث أن $\sqrt{x}$ معرفة فقط لجميع قيم $x \geq 0$. واضح أن نطاق هذه الدالة هو $[0,\infty[$ ونجد أن مداها هو أيضا $[0,\infty[$.

مما سبق يتضح أن الدالة هى عباره عن علاقة بين متغيرين تحت شروط خاصة فعندما نكتب $y = f(x)$ نعنى أن العنصر x الموجود فى النطاق مرتبط بالعنصر y الموجود فى النطاق المصاحب.

فى جميع الأمثلة السابقة كانت العلاقة دائماُ بين متغيرين متغير مستقل ومتغير تابع، فى هذه الحالة تسمى الدالة دالة المتغير الواحد (one variable function).

نهتم فى هذا المقرر بشكل أساسى بالدوال ذات المتغير الواحد والتى نطاقها ونطاقها المصاحب مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وتسمى هذه الدوال بالدوال الحقيقية ذات المتغير الحقيقى الواحد.

إذا لم يذكر نطاق الدالة f فإننا نعتبر نطاقها هو أقصى مجموعة جزئية ممكنة من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ والتى عناصرها x تجعل قيم الدالة $f(x)$ حقيقية ويسمي **بالنطاق الطبيعي** للدالة f .

فيما يلى سوف نعطى بعض الأمثلة المتنوعة لتحديد النطاق والمدى لبعض الدوال.

أمثلة (١. ١. ٣):

١ – أوجد نطاق ومدى الدالة المعرفة بالقاعدة $g(x) = \sqrt{1-x^2}$؟.

الحل: لكى تكون الدالة $g(x)$ دالةُ حقيقية يجب أن يكون كل من نطاقها ومداها مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، وبالتالي يجب أن يكون المقدار تحت الجذر التربيعى غير سالب، أى أن $1-x^2 \geq 0$ ، وهذا يكافئ أن $x^2 \leq 1$ ، وبالتالي $|x|^2 \leq 1$ ، وعليه فإن $|x| \leq 1$. إذاً $-1 \leq x \leq 1$ ويكون نطاق الدالة g هو $D_g = [-1,1]$. الآن لتحديد مدى الدالة نلاحظ أن:

$$x \in D_g \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -x^2 \geq -1$$

بإضافـــــة العدد واحد لأطراف المتباينـــــة نحصل على $1 \geq 1-x^2 \geq 0$ ، وبأخذ الجذر التربيعى للأطراف نجـــد أن $1 \geq g(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$ ويكون إذاً مدىالدالة هو $R_g = [0,1]$.

٢ – حدد نطاق ومدى الدالة $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$؟

الحل: واضح أن الدالة عباره عن خارج قسمة كثيرتى حدود ويلاحظ أنه لجميع قيم x الحقيقية فإن المقام لا ينعدم ، وبالتالى فإن الدالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية. أى أن نطاق الدالة هو $D_h = \mathbb{R}$. والآن لتحديد مدى الدالة نلاحظ أن:

$$x \in D_h = \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

إذاً مدى الدالة هو الفترة $R_h =]0,1]$.

٣ – حدد مدى الدالة $f(x) = x^4 - 1$ إذا كان نطاقها هو الفترة $]-2,2[$؟.

الحل: واضح أن $x \in D_f =]-2,2[$ إذا وفقط إذا كان $0 \leq |x| < 2$ وهذا يكافىء أن $0 \leq |x|^4 = x^4 < 16$. بطرح العدد 1 من جميع الأطراف نحصل على $-1 \leq f(x) = x^4 - 1 < 15$. إذاً مدى الدالة f هو الفترة $R_f = [-1,15[$.

بند ٢: خواص هامة للدوال : Importent Properties for functions

(I) الدوال الزوجية والفردية: (odd and even functions)

تعريف (١. ٢. ١): منحنى الدالة f (Graph of the Function) هو مجموعة أزواج الأعداد المرتبة $(x, f(x))$ لجميع العناصر x التى تقع فى نطاق الدالة f .

تعريف (١. ٢. ٢): يقال إن المجموعة الجزئية A من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مجموعة متماثلة (Symmetric) حول نقطة الأصل إذا تحقق أن: $\forall x:\ x \in A \Rightarrow -x \in A$.

مثال (١. ٢. ٣): المجموعة $A = [-5,5]$ متماثلة حول نقطة الأصل ، بينما المجموعة $B = [-1,2]$ ليست متماثلة حول نقطة الأصل.

تعريف (١. ٢. ٤): يقال إن الدالة $f: A \to B$ دالة زوجية (even function) إذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق: $f(-x) = f(x);\ \forall x \in A$. ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلا حول محور الصادات.

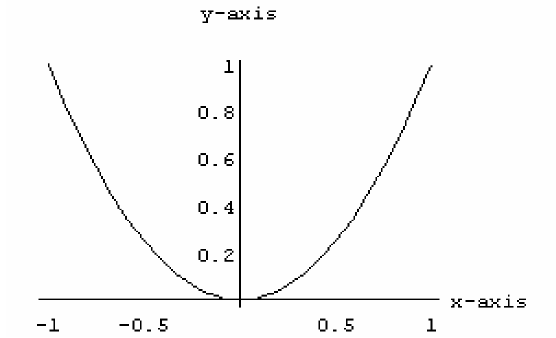
ويقال إن الدالة $f: A \to B$ داله فردية (odd function) إذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق $f(-x) = -f(x);\ \forall x \in A$. وعليه فإن منحنى الدالة الفردية يكون متماثلا حول نقطة الأصل.

أمثله (١ . ٢ . ٥):

١ – الدالة $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ نطاقها الطبيعي هو $\mathbb{R}-\{-1\}$ وهو نطاق غير متماثل حول نقطة الأصل، وعليه فإن الدالة لا زوجية ولا فردية.

٢ – الدالة $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ والمعرفة بالقانون $f(x) = x^2$ دالة زوجية وذلك لأن نطاقها $[-1,1]$ متماثل حول نقطة الأصل وتحقق:

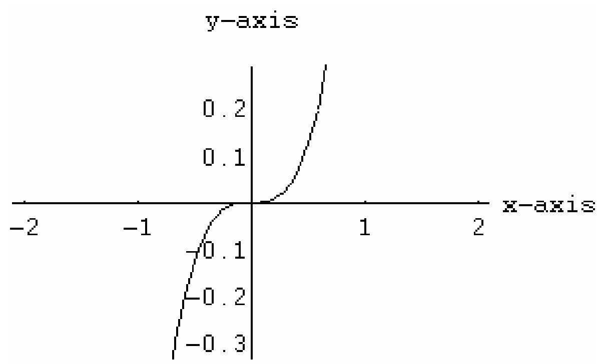
$$f(-x)=(-x)^2 = x^2 = f(x);\ \forall\ x\in[-1,1]$$



$$y = f(x) = x^2$$

٣ – الدالة $g(x) = x^3$ دالة فردية لأن نطاقها هو $\mathbb{R}$ وهو متماثل حول نقطة الأصل وتحقق:

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x); \forall x\in\mathbb{R}$$



$$y = g(x) = x^3$$

٤ – إبحث ما إذا كانت الدالة $h(x) = |x|^3$ دالة زوجية أو فردية أم خلاف ذلك؟

الحل:

نطاق هذه الدالة الطبيعي هو $\mathbb{R}$، وهو متماثل حول نقطة الأصل ويلاحظ أن

$$h(-x) = |-x|^3 = |x|^3 = h(x)$$

إذن الدالة h زوجية.

٥ – من أمثله الدوال الزوجية أيضاً الدوال:

$(i)\ \ g(x) = x^{2n}\ \ ;\ \ \forall n\in\mathbb{Z}$

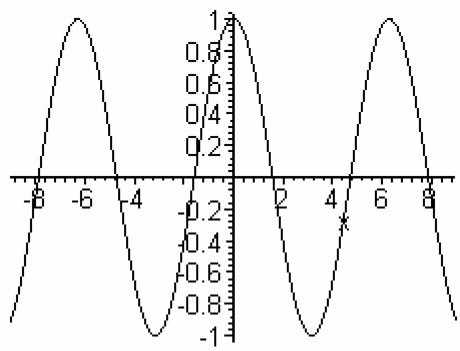
والمعرفة على النطاق $\mathbb{R}$ فيما عدا عندما تكون n سالبه فتكون معرفة على النطاق $\mathbb{R}-\{0\}$. النطاق متماثل حول نقطة الأصل، والدالة تحقق: $g(-x)=(-x)^{2n}=x^{2n}=g(x)$.

$(ii)\ f(x)=\cos x$ جتاس

حيث نطاقها الطبيعي هو $\mathbb{R}$ وهو متماثل حول نقطة الأصل، وتحقق:

$$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$$

أنظر الرسم أدناه



$y=\cos x$

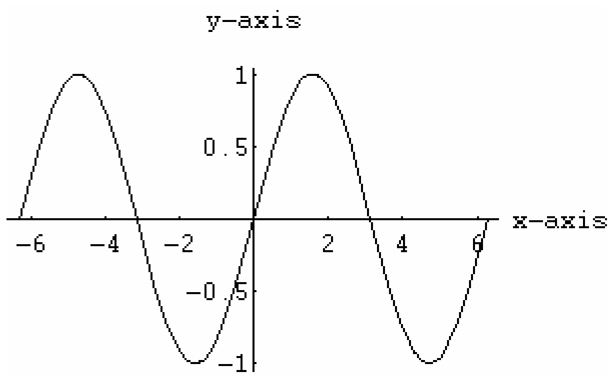
٦ – من أمثلة الدوال الفردية الدوال:

$(i)\ y=f(x)=\sin x$ جا س

حيث نطاقها الطبيعي هو $\mathbb{R}$ وهو متماثل حول نقطة الأصل، وتحقق:

$$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$$

أنظر رسم دالة الجيب أدناه



$y=\sin x$

$(ii)\ g(x)=x^{2n+1};\ \forall n\in\mathbb{Z}, x\neq 0$

والمعرفة على النطاق $\mathbb{R}$ فيما عدا عندما تكون n سالبه فتكون معرفة على النطاق $\mathbb{R}-\{0\}$. النطاق متماثل حول نقطة الأصل، والدالة تحقق:

$$g(-x)=(-x)^{2n+1}=-x^{2n+1}=-g(x)$$

(II) إطّراد الدوال Monotonicity of Functions:

تعريف (١. ٢. ٦):

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها تزايدية (increasing) إذا حققت أن:

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

ويقال للدالة $f: A \to B$ أنها تناقصية (decreasing) إذا حققت أن:

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

ويقال للدالة $f: A \to B$ أنها غير تزايدية (non increasing) إذا حققت أن:

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

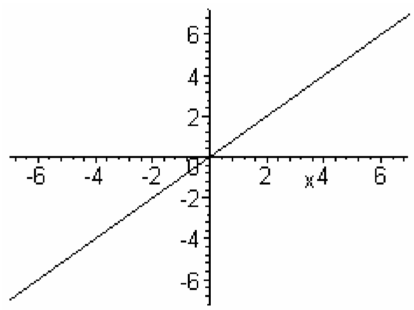
ويقال للدالة $f: A \to B$ أنها غير تناقصية (non decreasing) إذا حققت أن:

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

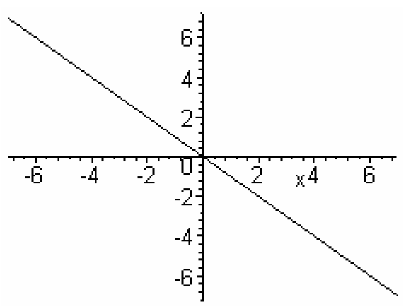
أمثله (١. ٢ .٧):

١ – الدالة $f(x) = x$ دالة تزايديه على النطاق $\mathbb{R}$ ، لأن

$$\forall x_1, x_2 \in A: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



$f(x) = x$



$f(x) = -x$

٢ – الدالة $g(x) = -x$ دالة تناقصية على النطاق $\mathbb{R}$ ، لأن

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

٣ – الدالة $h(x) = x^2$ تزايدية على الفترة $[0, \infty[$ وتناقصية على الفترة $]-\infty, 0[$.

وذلك لأن :

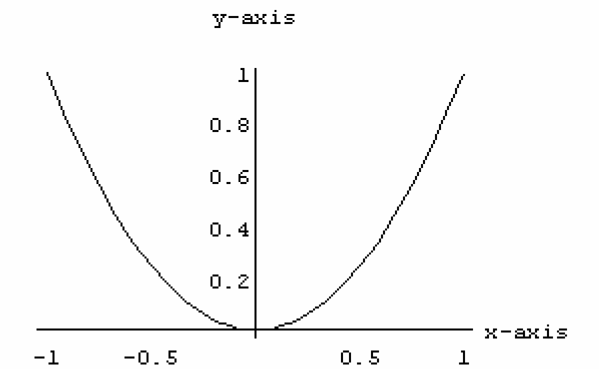
$$\forall x_1, x_2 \in [0, \infty[: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow h(x_1) < h(x_2)$$

فهي تزايدية في هذه الفترة .

وحيث أن :

$$\forall x_1, x_2 \in [-\infty, 0[: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$$

فهى تناقصية في هذه الفترة. أنظر الرسم أدناه



$$y = f(x) = x^2$$