المحاضرة الثانية

العناصر الأساسية في المحاضرة:

١- الدوال المحدودة والدوال غير المحدودة من خلال الحدود السفلية والعلوية لمدى الدالة.

٢- تعريف تحصيل (تركيب دالتين) وكيفية الحصول على النطاق لدالة التحصيل.

٣- الدوال التي تتمتع بخاصية الواحد لواحد وخاصية الغمر ومن ثم التناظر الأحادي

٤- تعريف الدالة العكسية وكيفية الحصول عليها.

بند ٣: الدوال المحدودة وغير المحدودة: (bounded and unbounded functions)

تعريف (١. ٣. ١):

يقال إن العدد الحقيقي L حداً علوياً للدالة $f:A\to B$ إذا كان $f(x)\le L, \forall\, x\in A$ ، ويقال إن العدد الحقيقي ℓ حداً سفلياً للدالة f إذا كان $f(x)\ge \ell, \forall\, x\in A$. إذا كان للدالة حداً علوياً فإننا نقول أن الدالة محدودة من أعلى ، وإذا كان للدالة حداً سفلياً فإننا نقول أن الدالة محدودة من أسفل. الدالة f تكون محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل، أي أن الدالة f تكون محدودة إذا وجد عددين حقيقين ℓ, L بحيث أن:

$$\ell \le f(x) \le L \;\; ; \;\; \forall\, x\in A$$

أو بصورة مكافئة :

$$.\, \ell \le y \le \mathrm{L} \quad ; \quad \forall\, y\in R_f$$

تعريف (١. ٣. ٢):

يقال إن العدد الحقيقي L_o أصغر حد علوى للدالة $f:A\to B$ إذا كان L_o حداً علوياً للدالة f ويحقق أنه لكل حد علوي L للدالة f يكون $L_o\le L$ ، ويقال إن ℓ_o أكبر حد سفلى للدالة f إذا كان ℓ_o حداً سفلياً للدالة f ويحقق أنه لكل حد سفلي ℓ للدالة f يكون $\ell_o\ge \ell$ ونكتب للتعبير عن ذلك :

$$L_O = \sup f \;\; ; \;\; \ell_O = \inf f$$

تعريف (١ .٣ .٣):

يقال إن العدد الحقيقي M قيمة عظمى (maximum) للدالة $f : A \to B$ إذا كان M حداً علوياً للدالة f وأن $M \in R_f$. ويقال إن العدد الحقيقي m قيمة صغرى (minimum) للدالة f إذا كان m حداً سفلياً للدالة f وأن $m \in R_f$ ونكتب للتعبير عن ذلك : $M = \max f \;\; ; \;\; m = \min f$

أمثلة (١ .٣ .٤):

١ – نفرض الدالة $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ والمعرفة بالقانون $f(x) = \dfrac{1}{x}$. لتحديد مدى هذه الدالة نلاحظ أنه إذا كان $x > 0$ فإن $\dfrac{1}{x} > 0$ ، أي أن $f(x) > 0$ ، وإذا كان $x < 0$ فإن $\dfrac{1}{x} < 0$ ، أي أن $f(x) < 0$ ، وبالتالي فإن مدى الدالة هو المجموعة $R_f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ ويمكن ملاحظة أن هذه الدالة ليس لها حداً علوياً وليس لها حداً سفلياً، إذاً فهي غير محدودة والقيم $\max f \; ; \min f \; , \; L_O = \sup f \;\; ; \;\; \ell_O = \inf f$ ليس لها وجود.

٢ – إذا كانت $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$ ، فإنه لتحديد مدى هذه الدالة نجد أن النطاق المعطى هو $D_f =]-1, 1[$ ، وبسهولة يمكن استنتاج أن مدى الدالة هو الفترة $R_f = [0, 1[$. إذاً الدالة محدودة ونجد أن $\min f = 0$ ، بينما $\max f$ ليس له وجود وذلك لأن $1 \notin R_f$ ولكن $\inf f = 0 \;\; ; \;\; \sup f = 1$.

٣ – نفرض الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ أوجد:

(أ) نطاق ومدى الدالة f.

(ب) إدرس ما إذا كانت الدالة محدودة أم لا؟

(ج) $\inf f \; , \; \sup f \; , \; \min f \; , \; \max f$ إن وجدت؟

الحل:

(أ) حيث أن المقام لا ينعدم لأى عدد حقيقي x ، فإن نطاق هذه الدالة الطبيعي هو $D_f = \mathbb{R}$. وحيث أن $-\infty < x < \infty$ إذاً $0 \le x^2 < \infty$ ، ويكون إذن $1 \le x^2 + 1 < \infty$ ، وبالتالي

$$1 \ge f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} > 0$$

إذاً مدى الدالة هو $R_f =]0, 1]$.

(ب) حيث أن مدى الدالة محدود من أعلى بالعدد واحد ومحدود من أسفل بالصفر، إذاً فالدالة محدودة.

(ج) نجد أن $\max f = 1$ ، بينما $\min f$ ليس له وجود لأن $0 \notin R_f$ ، ولكن $\inf f = 0 \;\; ; \;\; \sup f = 1$.

٤ – نفرض أن الفتره $]0,2]$ هي نطاق الدالة $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2+2}$. بين ما إذا كانت الدالة محدودة أم لا؟ وأوجد $\inf f$, $\sup f$, $\min f$, $\max f$ إن وجدت؟

الحل:

بما أن $0<x\le 2$ ، إذاً $\frac{1}{3}\le\frac{1}{x+1}<1$. أيضا $\frac{1}{6}\le\frac{1}{x^2+2}<\frac{1}{2}$ ، وعليه فإن $\frac{1}{2}\le f(x)<\frac{3}{2}$. إذاً مدى الدالة هو $R_f=[\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$ وبالتالي فإن الدالة f محدودة لأن مداها محدود على النطاق $]0,2]$ ونجد أن $\min f=\frac{1}{2}$ ، ولكن $\max f$ ليس له وجود ، بينما $\inf f=1/2$; $\sup f=3/2$.

بند ٤: تركيب (أو تحصيل) الدوال: (Composition of Functions)

تعريف (١. ٤. ١):

نفرض الدالتين $g:B\to C$; $f:A\to B$ حيث A,B,C مجموعات جزئية من $\mathbb{R}$. نُعرف الدالة المركبة من الدالتين f,g والتي يرمز لها بالرمز gof على النحو التالي:

$$(gof)(x)=g(f(x))\,;\,\forall x\in A$$

$$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$$
$$x\xrightarrow{gof}g(f(x))$$

في هذه الحالة يتضح أن نطاق الدالة المركبة gof هو المجموعة A ونطاقها المصاحب هو C.

وعلى وجه العموم إذا كان $g:C\to D$; $f:A\to B$. فإن نطاق الدالة المركبة gof يتكون فقط من العناصر $x\in A$ بحيث أن $f(x)\in C$ ، أي أن:

$$D_{gof}=\{x\in A:f(x)\in D_g\}$$

ونطاق الدالة fog يعطى من العلاقة:

$$D_{fog}=\{x\in C:g(x)\in D_f\}$$

ملاحظة (١. ٤. ٢):

إذا كان $R_f\subseteq D_g$ فإن نطاق الدالة gof هو نفسه نطاق f. وإذا كان $R_g\subseteq D_f$ فإن نطاق الدالة fog هو نفسه نطاق g . أي أنه:

إذا كان $R_f\subseteq D_g$ فإن $D_{gof}=D_f$ ، وإذا كان $R_g\subseteq D_f$ فإن $D_{fog}=D_g$.

أمثلة (١. ٤. ٣):

١ - إذا كان $f(x)=2x-3\ ;\ g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$، فأوجد الدالتين التركيبيتين (fog)، (gof). ثم أوجد نطاق كل منهما.

الحل: من التعريف نجد أن

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \frac{1}{(2x-3)^2+1};$$
$$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \left(\frac{2}{x^2+1}\right) - 3 = -\frac{3x^2+1}{x^2+1}$$

واضح أن نطاق الدالة f هو $\mathbb{R}$ ومداها هو أيضا $\mathbb{R}$، بينما نطاق الدالة g هو $\mathbb{R}$ ومداها هو المجموعة $]0,1]$. وحيث أن $R_f = \mathbb{R} = D_g$، إذاً بإستخدام ملاحظة (١. ٤. ٢) نحصل على $D_{gof} = D_f = \mathbb{R}$. وحيث أن $R_g =]0,1] \subseteq D_f = \mathbb{R}$. إذاً $D_{fog} = D_g = \mathbb{R}$.

٢ - نفرض الدالة $f:[1,\infty[\to \mathbb{R}$ والمعرفة بالقانون $f(x) = \sqrt{x-1}$، ونفرض الدالة $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ والمعرفة بالقانون $g(x) = 2x^2+3$. أوجد gof و fog ونطاق كل منهما؟

الحل: من التعريف نجد أن

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = 2(\sqrt{x-1})^2+3 = 2x+1$$
$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x^2+3) = \sqrt{2x^2+3-1} = \sqrt{2(x^2+1)}$$

ونجد أن $D_f = [1,\infty[\ ,\ R_f = [0,\infty[$ ، $D_g = \mathbb{R}\ ,\ R_g = [3,\infty[$ ، وحيث أن $R_f = [0,\infty[\subseteq D_g = \mathbb{R}$ ، إذاً $D_{gof} = D_f = [1,\infty[$. أيضا نلاحظ أن $R_g = [3,\infty[\subseteq D_f = [1,\infty[$ ، إذاً $D_{fog} = D_g = \mathbb{R}$.

ملاحظات (١. ٤. ٤):

١ - فى المثال السابق إذا كانت $f:[5,\infty[\to\mathbb{R}$ فإن نطاق الدالة fog نحصل عليه من التعريف $D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$ ، وعليه فإن $g(x)\in D_f$ إذا كان $2x^2+3\in[5,\infty[$. أى أن $2x^2+3\geq 5$ وهذا يعنى أن $x^2\geq 1$، وبالتالى فإن $x\geq 1$ أو $x\leq -1$. إذاً نطاق الدالة هو $D_{fog} =]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$.

٢ - فى المثال السابق أيضاً وجدنا أن:

$$(gof)(x) = 2x+1 \quad ; \quad (fog)(x) = \sqrt{2(x^2+1)}$$

وعليه فإن $(fog)(1) = 2\ ;\ (gof)(1) = 3$. نستنتج من ذلك أن تركيب الدوال ليس إبدالى. أى أنه على وجه العموم $(gof) \neq (fog)$.

أمثلة (١ .٤ .٥):

١ – إذا كان $g(x)=\sqrt{1-x^2}$; $f(x)=2x-3$. أوجد كل من (gof) و (fog) ونطاق ومدى كل منهما؟

الحل:

$(gof)(x)=g(f(x))=g(2x-3)=\sqrt{1-(2x-3)^2}=\sqrt{12x-4x^2-8}=2\sqrt{3x-x^2-2}$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{1-x^2})=2\sqrt{1-x^2}-3$

ونجد أن $D_f=\mathbb{R}, R_f=\mathbb{R}; D_g=[-1,1], R_g=[0,1]$. ونجد أن $R_g\subseteq D_f$ ، إذن $D_{fog}=D_g=[-1,1]$.

ولكن $R_f=\mathbb{R}\not\subset D_g=[-1,1]$ ، إذاً $D_{gof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}$ ، أي أن $x\in D_f=\mathbb{R}$ بحيث $2x-3\in[-1,1]$. وهذا يعني أن $-1\le 2x-3\le 1$ ، إذاً $1\le x\le 2$. إذاً نطاق الدالة gof هو $D_{gof}=[1,2]$

بما أن $D_{fog}=[-1,1]$. إذاً $-1\le x\le 1$ ، وهذا يكافئ أن $0\le x^2\le 1$ ، وبالتالي فإن $0\ge -x^2\ge -1$ ، وعليه فإن $0\ge 1-x^2\ge 0$. إذاً $2\ge 2\sqrt{1-x^2}\ge 0$ وبالتالي نحصل على $-1\ge (fog)(x)=2\sqrt{1-x^2}-3\ge -3$ ، إذاً $R_{fog}=[-3,-1]$. وحيث أن $D_{gof}=[1,2]$ ، إذاً $1\le x\le 2$. وهذا يكافئ أن $-1\le 2x-3\le 1$. إذاً $0\le (2x-3)^2\le 1$ ، أي أن $1\ge 1-(2x-3)^2\ge 0$ ، وبالتالي $1\ge 1-(2x-3)^2\ge 0$.

إذاً

$$1\ge\sqrt{1-(2x-3)^2}=2\sqrt{3x-x^2-2}\ge 0$$

أي أن
$$0\le (gof)(x)\le 1$$

إذاً $R_{gof}=[0,1]$.

٢ – نفرض الدالتين $g(x)=\sqrt{x-1}$; $f(x)=\sqrt{x^2-4}$. أوجد كلاً من (gof) و (fog) ونطاق تعريف كل منهما.

الحل:

$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x^2-4})=\sqrt{\sqrt{x^2-4}-1}$;

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-1})=\sqrt{(\sqrt{x-1})^2-4}=\sqrt{x-5}$

ونلاحظ أن

$$D_f=]-\infty,-2]\cup[2,\infty[\quad , \quad R_f=[0,\infty[\ ;\ D_g=[1,\infty[\quad , \quad R_g=[0,\infty[$$

وحيث أن $R_g=[0,\infty[\not\subset D_f$ إذاً $D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$ ، أي أن $x\in D_g=[1,\infty[$ بحيث

أن $\sqrt{x-1} \in D_f$. إذاً $x-1 \ge 4$ وعليه فإن $x \ge 5$. إذاً $D_{fog} = [5,\infty[$.

وحيث أن $R_f \not\subset D_g$ ، إذاً $D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$ ، وبالتالي

$$\sqrt{x^2-4} \ge 1 \Rightarrow x^2-4 \ge 1 \Rightarrow x^2 \ge 5 \Rightarrow |x| \ge \sqrt{5} \Rightarrow x \ge \sqrt{5} \;\; or \;\; x \le -\sqrt{5}$$

وعليه نحصل على $D_{gof} =]-\infty,-\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5},\infty[$.

بند ٥: الدالة العكسية: (The inverse function)

تعريف (١. ٥. ١): يقال إن الدالة $f: A \to B$ دالة أحادية أو واحد لواحد (1-1, injective) إذا تحقق:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A:\; x_1 \ne x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ne f(x_2)$$

وهذا يكافىء منطقياً:

$$\forall\, x_1, x_2 \in A:\; f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

تعريف (١. ٥. ٢): يقال إن الدالة $f: A \to B$ دالة فوقية أو غامرة (onto, surjective) إذا كان مداها يساوى النطاق المصاحب لها ، أى إذا تحقق: $R_f = B$. وهذا يعنى أنه لكل عنصر $y_1 \in B$ يوجد عنصر $x_1 \in A$ بحيث أن $f(x_1) = y_1$.

تعريف (١. ٥. ٣):

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها تناظراً أحادياً $(1-1\,\text{correspondence, bijective})$ إذا كانت أحادية وغامرة ، أى أن

تناظراً أحادياً $\Leftrightarrow$ أحادية + غامرة

$$bijective \Leftrightarrow injective + surjective$$

مثال (١. ٥. ٤): الدالة $f:]-1,1[\to \mathbb{R}$ والمعرفة بالقانون $f(x) = x^2$ ليست أحادية وذلك لأن:

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1^2 = x_2^2 \;\Rightarrow\; x_2 = x_1 \;\; or \;\; x_2 = -x_1$$

أى أن العنصرين المختلفين $x_1, -x_1$ لهما نفس الصورة فى المدى ، فعلى سبيل المثال $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ لهما نفس الصورة فى المدى وهى $\frac{1}{4}$. وعليه فالدالة ليست أحادية ، وهى ليست غامرة كذلك حيث أن $R_f = [0,1[$ ولكن النطاق المصاحب هو $\mathbb{R}$.

ملاحظات (١. ٥. ٥):

١ – على وجه العموم الدالة الزوجية لا تكون أحادية على نطاقها المتماثل.

٢ – إذا كانت الدالة $f: A \to B$ دالة تزايدية (أو تناقصية) على المجموعة A فإنها تكون أحادية.

أمثلة (١. ٥. ٦):

١ - نفرض الدالة $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ والمعرفة بالقانون $g(x)=x^2$. أُدرس ما إذا كانت الدالة تناظراً أحادياً أم لا؟

الحل: لاحظ أن

$$\forall\, x_1, x_2 \in [0,1] : g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_2 = x_1 \;\; or \;\; x_2 = -x_1$$

ولكن $x_2 = -x_1$ مرفوض لأن x_1, x_2 أعداد حقيقية تقع بين الصفر والواحد الصحيح وعليه فإن $x_1 = x_2$. إذاً الدالة أحادية.

الدالة ليست غامرة لأن مداها هو $R_g = [0,1]$ وهو لا يساوى النطاق المصاحب $\mathbb{R}$. وعليه فإن الدالة ليست تناظراً أحادياً.

٢ - إذا أعدنا تعريف الدالة السابقه لتصبح على النحو $f:[0,1]\to[0,1]$ ومعرفة كما يلي $f(x)=x^2$، فإن الدالة في هذه الحالة تكون تناظراً أحادياً.

٣ - إذا كانت الدالة $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ومعرفة بالقانون $h(x)=x^2$. فإن هذه الدالة ليست أحادية وهى أيضا ليست غامرة لأن مداها $[0,\infty[$ والنطاق المصاحب $\mathbb{R}$. بينما الدالة $k:\mathbb{R}\to[0,\infty[$ والمعرفة بالقاعدة $k(x)=x^2$ دالة غامرة ولكنها ليست أحادية، وعليه فإن كلاً من الدالتين h,k ليست تناظراً أحادياً.

تعريف (١. ٥. ٧) : يقال إن الدالتين $y=g(x)$, $y=f(x)$ كلاهما دالة عكسية للأخرى إذا كان :

$$(gof)(x) = x \;\; ; \;\; \forall x \in D_f \quad \& \quad (fog)(x) = x \;\; ; \;\; \forall x \in D_g$$

ويرمز للدالة العكسية للدالة $y=f(x)$ بالرمز $y=f^{-1}(x)$.

من هذا التعريف نستنتج أنه إذا كانت الدالة $f:A\to B$ تناظراً أحادياً فإن لها دالة عكسية هي $f^{-1}: B\to A$.

أمثلة (١. ٥. ٨):

١ - نفرض الدالة $f: A\to B$ حيث $A=\{-1,1\}$ ، $B=\{1\}$ ومعرفة كما يلي: $f(x)=x^2 \; , \; \forall x\in A$. هذه الدالة غامرة ولكنها ليست أحادية لأن $-1,1\in D_f$ ، $-1\neq 1$ ورغم ذلك $f(1)=f(-1)=1$، إذاً فهى ليست تناظراً أحادياً. ونلاحظ أن العلاقة العكسية ليست بدالة.

٢ - نفرض الدالة $g:A\to B$ حيث $A=\{1,2\}$ ، $B=\{0,1,4\}$ ومعرفة كما يلي: $g(x)=x^2 \; , \; \forall x\in A$. لاحظ أن هذه الدالة أحادية ولكنها ليست غامرة ، إذاً فهى ليست تناظراً أحادياً. ونلاحظ أن العلاقة العكسية ليست بدالة.

ملاحظة : إذا كانت $g:A\to B$ دالة واحد لواحد ولكنها ليست غامرة فنجد أن الدالة $g:A\to R_g$ دالة تناظر أحادي وبالتالي يكون لها دالة عكسية، ففي المثال (٢) السابق من أمثلة (١. ٥. ٨) إذا اعتبرنا الدالة $g:\{1,2\}\to\{1,4\}$ نجد أنها أصبحت تناظر أحادي ولها دالة عكسية.

كيفية الحصول على الدالة العكسية:

إذا كانت $y = f(x)$ تناظراً أحادياً ، نحاول الحصول منها على الدالة $x = g(y)$ ، أى أننا نجعل x كدالة فى y ، ثم نقوم بالتبديل بين y,x فنحصل على الدالة $y = g(x)$ وهى الدالة العكسية للدالة f.

مثال (١. ٥. ٩):

أثبت أن الدالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ والمعرفة بالقانون $f(x) = 3x^3+5$ تناظراً أحادياً وأوجد معكوسها.

الحل: لكى تكون الدالة تناظراً أحادياً يجب أن تكون أحادية وغامرة. والآن

$$\forall x_1,x_2 \in D_f = \mathbb{R}: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1^3+5 = 3x_2^3+5 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

إذاً الدالة أحادية. وحيث أن $D_f = \mathbb{R}$ ، إذاً

$$-\infty < x^3 < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad -\infty < 3x^3 < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad -\infty < 3x^3+5 < \infty$$

وينتج أن $R_f = \mathbb{R}$ ، إذاً الدالة غامرة. وعليه فالدالة تناظراً أحادياً.

لإيجاد معكوس الدالة نتبع ما يلى:

بما أن $y = 3x^3+5$ فإن $3x^3 = y-5$ ، أى أن $x^3 = \frac{1}{3}(y-5)$. إذاً $y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{x-5}$ هى الدالة العكسية المطلوبة للدالة $f(x) = 3x^3+5$.

ملاحظة (١. ٥. ٩): إذا كانت $f : A\to B$ دالة تناظراً أحادياً، فإن الدالة العكسية لها هى $f^{-1}: B\to A$ تكون تناظراً أحادياً أيضاً ويكون : $D_f = R_{f^{-1}}\ ,\ D_{f^{-1}} = R_f$

ونجد أن
$$(f^{-1} o f)(x) = x \ ; \quad \forall x\in A;$$
$$(f o f^{-1})(x) = x \ ; \quad \forall x\in B$$

تعريف (١. ٥. ١٠): يقال إن الدال $y=f(x)$ دالة دورية (periodic function) إذا وجد عدد حقيقى $\lambda \neq 0$ بحيث أن $f(x+\lambda) = f(x) \ ; \ \forall x\in D_f$. أصغر قيمة موجبة للعدد λ تحقق العلاقة السابقة تسمى دورة الدالة.

==

==

==