تمارين عامة علي المحاضرة الثالثة والباب الأول

١ – بين أى من العلاقات التالية تُعرِف دالة من مجموعة A إلى مجموعة B مع تحديد النطاق A فى كل حالة:

$(i)\quad (f(x))^2 = x+2 \qquad (ii)\quad f(x)=(x-1)^2 \qquad (iii)\quad (f(x))^2 - x^2 + 1 = 0$

٢ – حدد النطاق والمدى لكل من الدوال التالية:

$(i)\quad y = \sqrt{4-x^2} \qquad (ii)\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

$(iii)\ y = \dfrac{1}{x-1} \qquad (iv)\ y = \sqrt{x} + 3$

$(v)\quad y = (x+1)^2 \qquad (vi)\quad y = 9 + \sqrt{1+x^2}$

$(vii)\quad y = [2x] \qquad (viii)\quad y = \sqrt{1+x^2}$

$(ix)\quad y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2+9}} \qquad (x)\quad y = \begin{cases} x & ;\ x \geq 0 \\ -x^2 & ;\ x \leq 0 \end{cases}$

٣ – إذا كانت $f_1(x)\ ,\ f_2(x)$ دالتان زوجيتان على نفس المجموعة A وكانت $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ فأثبت أن الـــدوال الآتية دوال زوجية:

$(i)\quad \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) \qquad (ii)\quad f_1(x) f_2(x)$

$(iii)\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\ ;\ f_2(x) \neq 0, \forall x \in A$

٤ – إذا كانت f دالة زوجية ، g دالة فردية على نفس المجموعة ، فماذا تعرف عن الدوال الآتية من حيث الزوجية والفردية:

$$f+g\ ,\ f\,g\ ,\ \frac{f}{g} \qquad \text{(حيث } g(x) \neq 0 \text{ فى حالة القسمة)}$$

٥ – إبحث زوجية وفردية كل من الدوال الآتية:

$(i)\ f(x) = \dfrac{1}{x}\ , \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad (ii)\ f(x) = x^n\ , \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$(iii)\ f(x) = |x|^3, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (iv)\ f(x) = \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$

٦– بين أى من الدوال فى تمرين (٢) زوجية أو فردية؟

٧ – أثبت أن الدالة $g(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ دالة فردية لأى دالة f نطاقها متماثل حول نقطة الأصل بينما الدالة $h(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ تكون دالة زوجية لأى دالة f نطاقها متماثل حول نقطة الأصل. ماذا تستنتج عن زوجية أو فردية الدوال $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ ، $h(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

٨ – وضح أى من الدوال الآتية محدودة وأيها غير محدودة؟ فى حالة ما إذا كانت الدالة محدودة أوجد لها حداً علوياً وحداً سفلياً ، وكذلك القيمة العظمى والقيمة الصغرى إن وجدت:

$(i)\ f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in[1,\infty[$ $(ii)\ f(x)=x^2, x\in\ ]-1,3]$

$(iii)\ f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$ $(iv)\ f(x)=x^3+1, x\in[0,1]$

$(v)\ f(x)=\sin x, x\in\mathbb{R}$ $(vi)\ f(x)=\cos 3x, x\in\mathbb{R}$

$(vii)\ y=e^x\ , x\in\mathbb{R}$ $(viii)\ y=\ln x\ , x\in\mathbb{R}^{>0}$

٩ – إذا كانت $g(x)=1-x^2$, $f(x)=2x-1$. أوجد fog , gof ونطاق كل منهما.

١٠ – ابحث اطّراد الدوال الآتية:

$(i)\ f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in\ ]0,2]$ $(ii)\ f(x)=\sin 2x, x\in[-\pi,\pi]$

$(iii)\ f(x)=x^2,\ x\in\ ]-1,1[$ $(iv)\ f(x)=(2x)^3, x\in\mathbb{R}$

$(v)\ y=\ln x\ , x\in\mathbb{R}^{>0}$

١١ – إذا كانت $g(x)=\sqrt{4-x^2}$; $f(x)=4x^2-9$:

(i) حدد نطاق ومدى كل من f,g .

(ii) حدد ما إذا كانت الدوال f,g دوال زوجية أو فردية أم خلاف ذلك.

(iii) أوجد fog , gof ونطاق كل منهما؟

(iv) هل الدالة g محدودة أم لا؟ وضح ذلك؟

(v) هل الدالة g واحد لواحد؟ وضح ذلك؟

(vi) أبحث اطّراد كل من الدالتين f,g على نطاقها؟

(vii) هل الدوال fog , gof دوال محدودة؟ وضح ذلك؟

(ix) أوجد القيمتين العظمى والصغرى لكل من الدالتين f,g إن وجدتا.

(x) أوجد $\inf f$, $\sup f$.

12 – إذا كانت $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، أوجد fog , gof ونطاق كل منهما.

١٣ – أثبت أن الدوال الآتية محدودة على مجموعة الأعداد الحقيقية

$(i)\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $(ii)\quad f(x) = \dfrac{1-x^2}{4+x^2}$

$(iii)\quad f(x) = \dfrac{1-2\sin x}{1+\cos^2 x}$, $(iv)\quad f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^4}$

١٤– إذا علمت أن $\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ |\sin x| \le |x|$ ، فاثبت أن الدالة $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2+\cos^2 x}$ محدودة علي $\mathbb{R}$.

==========