المحاضرة الثالثة

العناصر الأساسية في المحاضرة:

دراسة سريعة لبعض الدوال الهامة مثل :

١- **دالة القوي التي علي الصورة** $y = x^n$ حيث n عدد صحيح .

٢- **الدوال المثلثية وخصائصها.**

٣- **الدوال المثلثية العكسية.**

٤- **الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية.**

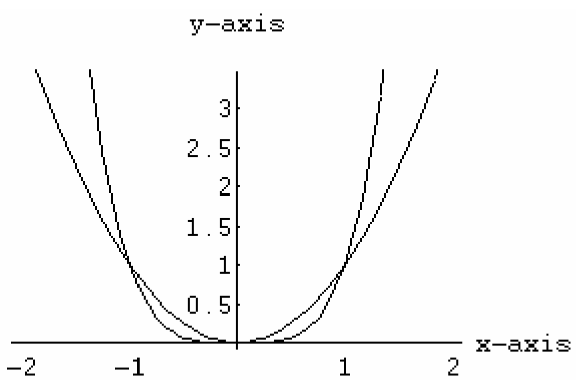
٥- **دالة ديرشليد أو ما تسمي بدالة الصحيح.**

بند ٦: بعض الدوال الهامة Some Important Functions :

(١) دالة القوى Power Function :

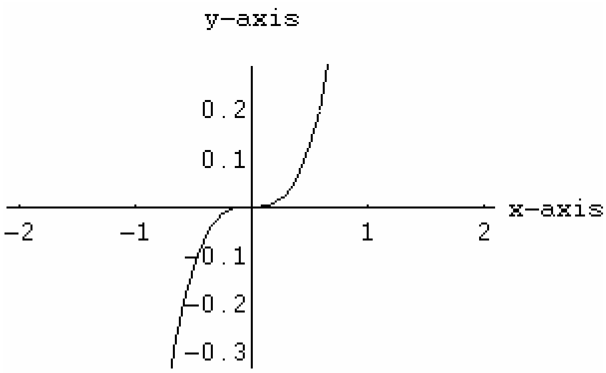
هذه الدالة تأخذ الصورة $y = x^r$ حيث r عدد قياسي. إذا كانت r عدد طبيعي فإن هذه الدالة تكون معرفة لجميع قيم x الحقيقية. وإذا كانت $r = 2n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ فإن $2n$ تكون عدد زوجي موجب وتكون الدالة زوجية ومنحنى الدالة يكون متماثلا حول محور الصادات. أما إذا كانت $r = 2n+1$ حيث $n \in \mathbb{N}$ فإن $2n+1$ تصبح عدد فردى موجب وتكون الدالة فردية ويكون منحنى الدالة متماثلا حول نقطة الأصل. وفى كلتا الحالتين السابقتين يلاحظ أنه بزيادة r يقترب منحنى الدالة من محور الصادات.

الدالة $y = x^{2n}$ (حيث n عدد طبيعي) دالة زوجية كما سبق وأن ذكرنا ومداها هو الفترة $[0,\infty[$ وبالتالي فهي محدودة من أسفل وغير محدودة من أعلى، وهذه الدالة بالإضافة إلى ذلك تزايدية فعلا على الفترة $[0,\infty[$ وتناقصية على الفترة $]-\infty,0]$.



$$f(x) = x^2 \;\; ; \;\; g(x) = x^4$$

بينما الدالة $y = x^{2n+1}$ (حيث n عدد طبيعي) دالة فردية وهي تزايدية فعلاً على $\mathbb{R}$ ولكنها ليست محدودة لأن مداها هو $\mathbb{R}$.



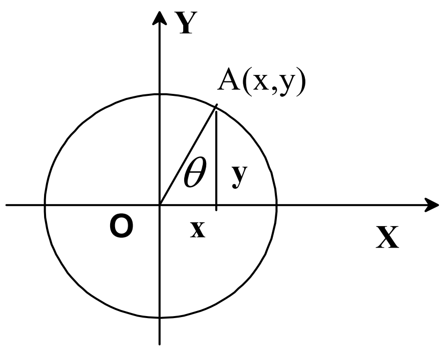
$$y = g(x) = x^3$$

(٢) الدوال المثلثية: (Trigonometric functions)

سبق للطالب في المراحل الدراسية السابقة تعريف النسب المثلثية وهي

$y = \sin x$	حا س	،	$y = \cos x$	جتا س	
$y = \tan x$	ظا س	،	$y = \cot x$	ظتا س	
$y = \sec x$	قا س	،	$y = \csc x$	قتا س	

فبفرض أن O هي نقطة الأصل لنظام إحداثيات كارتيزية فيه محورى الاحداثيات $\overrightarrow{OX}$,$\overrightarrow{OY}$ ورسمنا دائرة مركزها O ونصف قطرها الوحدة كما هو موضح بالشكل:



فإن لأى زاوية θ يمكن أن نجد نقطة $A(x,y)$ على الدائرة بحيث يصنع الشعاع $\overrightarrow{OA}$ زاوية θ مع المحور $\overrightarrow{OX}$ ، وتقاس الزاويا الموجبة في إتجاه ضد عقارب الساعة من $\overrightarrow{OX}$ والسالبة فتقاس في اتجاه دوران عقارب الساعة من $\overrightarrow{OX}$. وإذا كانت الزاوية أكبر من 2π فإن هذا يعنى أننا سنصنع أكثر من دورة واحدة أثناء الدوران من الإتجاه $\overrightarrow{OX}$ إلى الإتجاه $\overrightarrow{OA}$.

إذا كانت (x,y) هى إحداثيات النقطة A فإننا نعرف

$$\sin\theta = y,\ \cos\theta = x$$

ويلاحظ أنه إذا كانت $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن كل من $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ موجبتين وكذلك جميع النسب المثلثية الأخرى

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \;,\; \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \;,\; \cot\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \;,\; \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

وعندما تقع θ بين $\frac{\pi}{2}$ ، π فإن x تكون سالبة ، y موجبة ، وبالتالى كل من $\sin\theta$ ، $\csc\theta$ تكون موجبة وجميع النسب الأخرى تكون سالبة. أما فى الربع الثالث فتكون $\tan\theta$ ، $\cot\theta$ موجبة وجميع النسب الأخرى سالبة. وفى الربع الأخير $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ فإن $\cos\theta$ ، $\sec\theta$ تكون موجبة وجميع القيم الأخرى سالبة .

ولرسم دالة الجيب $\sin\theta$ نلاحظ أنه عندما $\theta = 0$ فإن $\sin\theta = 0$ ثم تبدأ قيمة $\sin\theta$ فى الإزدياد كلما زادت θ فى الفترة $[0\,,\frac{\pi}{2}]$ وتصل عند $\frac{\pi}{2}$ لأقصى قيمة لها وهى 1 ثم تبدأ قيمة $\sin\theta$ فى التناقص فى الفترة $[\frac{\pi}{2}\,,\pi]$ كلما زادت قيمة θ فى هذه الفترة حتى تصل مرة ثانية إلى القيمة 0 عند $\theta = \pi$ وتستمر فى التناقص فى الفترة $[\pi\,,\frac{3\pi}{2}]$ حتى تصل أقل قيمة لها وهى -1 عند $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ثم تعود للإزدياد فى الفترة $[\frac{3\pi}{2}\,,2\pi]$ لتصل إلى قيمتها 0 عند $\theta = 2\pi$.

هذه الدورة الأساسية لسلوك الدالة تكرر نفسها بعد ذلك فالرسم البيانى للدالة $\sin\theta$ فى الفترة $[2\pi\,,4\pi]$ هو صورة طبق الأصل لرسم الدالة فى الفترة $[0\,,2\pi]$ وذلك لأن

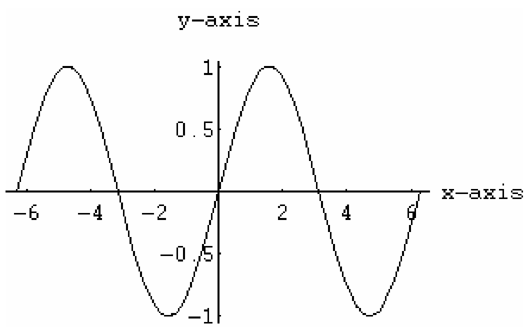
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta\,,\;\forall\theta\in\mathbb{R}$$

من تعريف دالة الجيب.

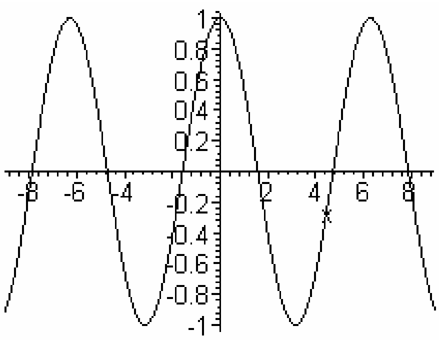
ونقول فى هذه الحالة أن الدالة $\sin\theta$ دالة دورية ودورها 2π . وعلى وجه العموم يمكن ملاحظة أن

$$\sin(\theta + 2\pi k) = \sin\theta\,,\;\forall\theta\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$$

كما يلاحظ أن نطاق هذه الدالة هو $\mathbb{R}$ ومداها هو الفترة $[-1\,,1]$ والدالة على $\mathbb{R}$ دالة فردية أى أن $\sin(-\theta) = -\sin\theta\,,\;\forall\theta\in\mathbb{R}$ (أنظر تعريف $\sin\theta$) ويمكن رسمها كما هو موضح أدناه.



$y = \sin x$



$y = \cos x$

ويمكن مناقشة الدالة $y = \cos\theta$ بنفس الأسلوب ويكون رسمها كما هو موضح أعلاه ، ويلاحظ أن $y = \cos\theta$ دالة دورية أيضا ودورها 2π.

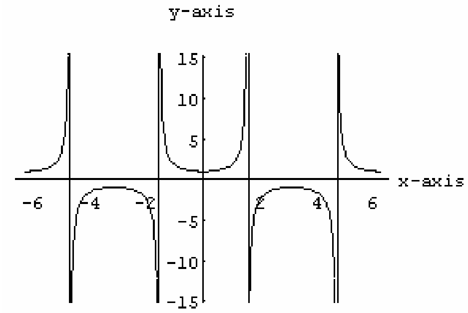
ويمكن إستنتاج القيم الخاصة الآتية :

$$\sin n\pi = 0 \;\;,\;\; \cos(\tfrac{2n+1}{2}\pi) = 0 \;,\; \cos n\pi = (-1)^n \;,\; \forall n\in\mathbb{Z}$$

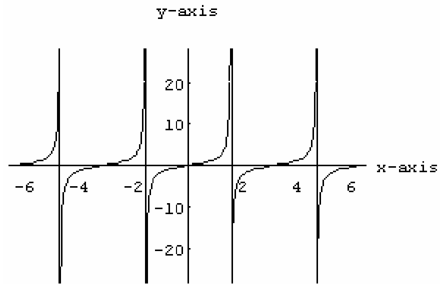
ومن تعريف النسب المثلثية الأخرى

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\quad ,\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\ ,\ \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

يمكن استنتاج رسم $\tan\theta,\ \sec\theta$ كما هو موضح أدناه ، وبالمثل يمكن رسم $\cot\theta, \csc\theta$.



$y = \sec x$



$y = \tan x$

لاحظ أن الدوال $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ محدودة بينما الدوال $\tan\theta$ ، $\cot\theta$ ، $\sec\theta$ ، $\csc\theta$ ليست دوال محدودة .

الآن بالرجوع إلى تعريف كل من الدالتين لـــ $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ نلاحظ أن النقطة $A(x\ ,\ y)$ تقع على دائرة الوحدة إذن تحقق معادلتها $x^2 + y^2 = 1$ ، أى أن

$$(1)\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

ومن هذه المتطابقة ينتج الآتى

$$(2)\ \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \quad , \qquad (3)\ \cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

كذلك يمكن إستنتاج أن:

$$(4)\ \cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2 \quad ,$$

$$(5)\ \sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \pm \cos\theta_1 \sin\theta_2$$

$$(6)\ \tan(\theta_1 \pm \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 \pm \tan\theta_2}{1 \mp \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

وبوضع $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ فى حالة الجمع وذلك فى المتطابقات (4) ، (5) ، (6) ينتج أن:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta\ ,\quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

ومن الصيغ (4) ، (5) ، (6) يمكن إستنتاج أيضا أن

$$\cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin\theta\ ,\qquad \sin(\theta + \tfrac{\pi}{2}) = \cos\theta$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta\ ,\qquad \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$$

ومن الصيغ (1) ، (4) يمكن استنتاج أن :

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \qquad ; \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

ويمكننا أيضاً الحصول علي المتطابقات المثلثية التالية :

$$\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) = \frac{1}{2}\{\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) = \frac{1}{2}\{\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) = \frac{1}{2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)-\cos(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2 = 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \quad , \quad \sin\theta_1-\sin\theta_2 = 2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2 = 2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \quad , \quad \cos\theta_1-\cos\theta_2 = -2\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

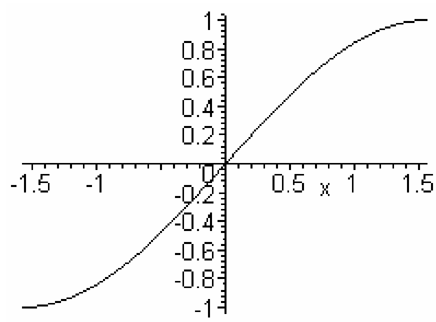
وكذلك يمكن استنتاج القيم الخاصة الآتية :

$$\sin(n\pi)=0 \quad ; \quad \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad ; \quad \cos(n\pi)=(-1)^n \ , \ \forall n\in\mathbb{Z}$$

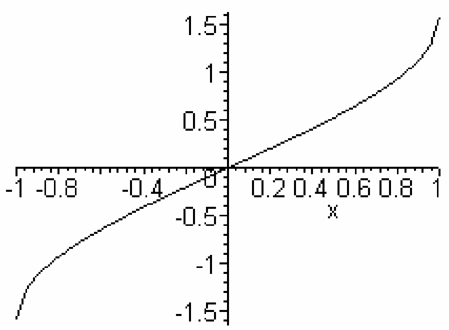
الدوال العكسية للدوال المثلثية :

١ – أوجد الدالة العكسية للدالة $y=\sin x$ على الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

الحل:



$y=\sin x$



$y=\sin^{-1}x$

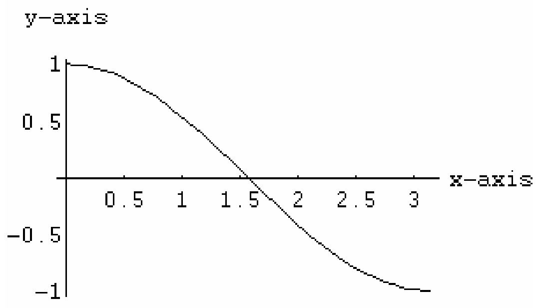
واضح من رسم دالة الجيب $y=\sin x$ أنها دالة تزايدية فعلا على الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ وغامرة للفترة $[-1,1]$ ، وبالتالي فهي تناظر أحادي ويكون لها دالة عكسية هي :

$$f^{-1}:[-1,1]\rightarrow[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

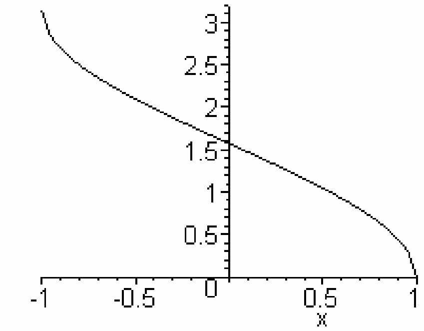
ونرمز للدالة العكسية لدالة الجيب بالرمز $y=\arcsin x$ وقد تكتب $y=\sin^{-1}x$ ورسمها كما هو موضح أعلاه.

٢ – أوجد الدالة العكسية للدالة $y=\cos x$ على الفترة $[0,\pi]$.

الحل :



$y = \cos x$



$y = \cos^{-1} x$

لاحظ من رسم الدالة $y=\cos x$ على الفترة $[0,\pi]$ أنها دالة تناقصية فعلا وغامرة للفترة $[-1,1]$ ، وبالتالى فهى تناظر أحادى ويكون إذن لها دالة عكسية نرمز لها بالرمز:

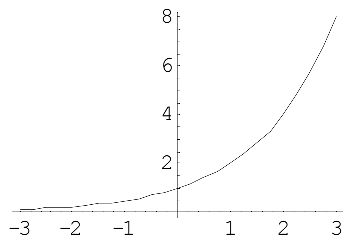
$$y = \arccos x ; x \in [-1,1]$$

ويرمز لها أيضاً بالرمز $y = \cos^{-1} x$ ورسمها كما هو موضح أعلاه.

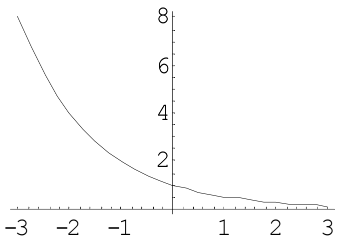
بالمثل يمكن دراسة الدوال العكسية للدوال المثلثية الأخرى وتترك تمرين للطالب.

(٣) الدالة الأسية :

الدالة الأسية تأخذ الصورة $y = a^x$ حيث a ثابت موجب ولا يساوى الواحد. هذه الدالة معرفة لجميع قيم x الحقيقية وبالتالى فنطاقها هو $\mathbb{R}$. والدالة تزايدية عندما يكون $a > 1$ وتناقصية عندما يكون $0 < a < 1$ كما هو موضح علي الرسم لبعض الاختيارات للثابت a والدالة موجبة دائماً ومداها هو المجموعة $]0,\infty[$ وبالتالي الدالة $a^x : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ تكون تناظر أحادي ولها دالة عكسية وهي ما تسمي بالدالة اللوغاريتمية.

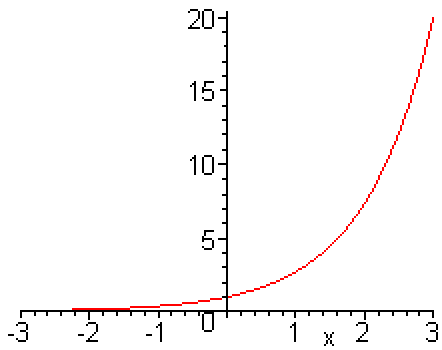


$f(x) = 2^x$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

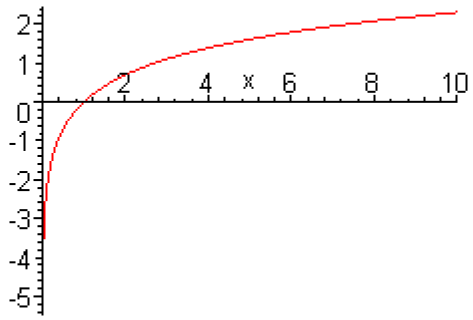
وأشهر الأنواع من هذه الدوال الدالة الأسية الطبيعية e^x حيث $e \cong 2.718$ وهو ما يسمي بعدد أويلر وسوف يتم دراسة خواصها بشيء من التفصيل في مقرر ر ١٣٢ . ومنحنى الدالة الأسية الطبيعية $y = e^x$ رسمه كالآتي :



$y = e^x$

(٤) الدالة اللوغاريتمية :

الدالة اللوغاريتمية تأخذ الصورة $y = \log_a x$ حيث a ثابت موجب ولا يساوى الواحد و تسمي بالأساس . هذه الدالة كما ذكرنا في (٣) هي الدالة العكسية للدالة الأسية $y = a^x$ وهي معرفة لجميع قيم $x > 0$ وأيضا سوف يتم دراسة خواصها بشيء من التفصيل في مقرر ر ١٣٢ ، وعندما تكون $a = e \cong 2.718$ فنسمي الدالة اللوغاريتمية بدالة اللوغاريتم الطبيعي ويرمز لها بالرمز $\ln x$ ومنحني الدالة اللوغاريتمية الطبيعية $y = \log_e x = \ln x$ يكون كما هو موضح أدناه :



$$y = \log_e x = \ln x$$

والدالة اللوغاريتمية لها بعض الخصائص الشهيرة التالية لجميع قيم $x, y, a, b \in \mathbb{R}^{>0}$ حيث $a \neq 1, b \neq 1$:

(1) $\log_a 1 = 0 \quad , \quad \log_a a = 1$ (2) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

(3) $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (4) $\log(x)^\alpha = \alpha \log x \, , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(5) $\log_a (x) = \log_b x \, . \log_a b$

وحيث أن الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية كلاهما عكسية للأخري فنجد أن

(1) $\log_a \left(a^x\right) = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $a^{\log_a x} = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^{>0}$

وكحالة خاصة يكون

(3) $\ln\left(e^x\right) = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(4) $e^{\ln x} = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^{>0}$

(٥) دالة ديرشليد أو الدالة السلمية (دالة الصحيح): (Step function)

نرمز لهذه الدالة بالرمز $f(x) = [x]$ وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى x أى أن $f(x) = n$ لكل x حيث $n \leq x < n+1$ وذلك لكل عدد صحيح n. ويلاحظ أن نطاق هذه الدالة هو $\mathbb{R}$ ومداها هو مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ، وعلي سبيل الأمثلة نجد أن

$$[1.7] = 1, [-1.7] = -2, [e] = 2, \; [-e] = -3 \, , [1.3] = 1 \, , [-2.9] = -3$$

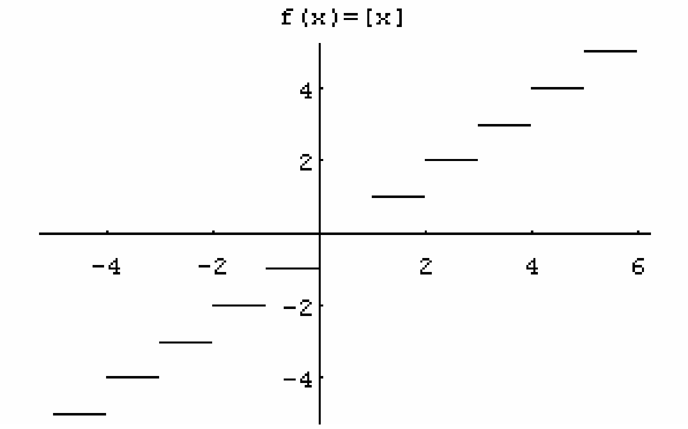
حيث العدد $e \cong 2.718$.

وإذا كانت $0 \le x < 1$ فإن $[x] = 0$ ، وإذا كانت $1 \le x < 2$ فإن $[x] = 1$، وإذا كانت $2 \le x < 3$ فإن $[x] = 2$ ، وهكذا ...

وإذا كانت $-1 \le x < 0$ فإن $[x] = -1$ ، وإذا كانت $-2 \le x < -1$ فإن $[x] = -2$ ، وهكذا ...

وعليه يمكن كتابة دالة ديرشليد على النحو التالى:

$$[x] = \begin{cases} n; & n \le x < n+1 \\ n-1; & n-1 \le x < n \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{Z} \text{ حيث})$$



==

==

==