المحاضرة الخامسة

نظريات النهاية وحساب النهايات

العناصر الأساسية في المحاضرة:

1- النظريات الأساسية لحساب النهايات

2- نظرية الحصر وبرهان النهاية الهامة $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

3- نهاية دالة $f(x)$ عندما تؤول x إلي $\pm\infty$ وكذلك إذا كانت نهاية الدالة $\pm\infty$.

4- نهاية دالة من طرف واحد .

بند ٢ : نظريات النهاية :

قد عرفنا في **بند١** مايقصد بالنهاية وإيجاد النهايات مباشرة من التعريف كما في البند السابق أمر صعب لجميع الدوال ماعدا الدوال البسيطة . وفي هذا البند سنعطى بعض النظريات الهامة والتي تمكننا من تجنب استخدام التعريف الأولى للنهاية .

نفرض أن f,g دالتين معرفتان على مجموعة G من $\mathbb{R}$ ، a نقطة نهاية للمجموعة G.

نظرية (٢. ٢. ١): إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=b\ ;\ \lim_{x\to a} g(x)=c$ ، فإن

$$\lim_{x\to a} f(x)\pm g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=b\pm c$$

نظرية (٢. ٢. ٢): إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)=b$ ، فإن الدالة f تكون محدودة في جوار ما للنقطة a.

أي أنه يوجد $\delta>0$ ويوجد عدد حقيقي موجب k بحيث يكون $|f(x)|\le k$ في الجوار $]a-\delta,a+\delta[\cap G$ للنقطة a .

نظرية (٢. ٢. ٣): إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=0$ وكانت g دالة محدودة في جوار مثقوب للنقطة a فإن $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$.(جوار مثقوب للنقطة a أي علي الشاكلة $]a-\delta,a+\delta[-\{a\}$ حيث $\delta>0$)

نظرية (٢. ٢. ٤): إذا كان $\lim_{x\to a} g(x)=c\ ;\ \lim_{x\to a} f(x)=b$ ، فإن $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=bc$.

مما سبق يمكن بسهولة بعد تعميم نظريتي الجمع والضرب للنهايات إثبات أنه إذا كانت $p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ كثيرة حدود من درجة n ، حيث n عدد صحيح غير سالب ، فإن $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$. (تحقق من ذلك؟)

نظرية (٢. ٢. ٥): إذا كان $\lim_{x \to a} g(x) = c \neq 0$ ، فإن $\lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{c}$.

نتيجة (٢. ٢. ٦):

إذا كان $\lim_{x \to a} g(x) = c \neq 0$; $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ، فمن النظريتين (٢. ٢ . ٤) ، (٢. ٢ . ٥) ينتج أن:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{b}{c} .$$

مثال (٢. ٢. ٧): احسب النهاية $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ ؟

الحل:

لاحظ أن الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين هما $\sin\left(\frac{1}{x}\right) , x$ وكما نعلم أن $\lim_{x \to 0} x = 0$ وأن الدالة $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ دالة محدودة وذلك لأن $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$. إذاً لدينا حاصل ضرب دالتين إحداهما محدودة والأخرى تؤول إلى الصفر . إذاً من نظرية(٢. ٢ . ٣) ينتج أن $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

مثال (٢. ٢. ٨): أوجد $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2x + 5}{x + 1}$.

الحل:

نعتبر الدالتان $g(x) = x + 1 , f(x) = 3x^2 + 2x + 5$، وحيث أن

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} (x + 1) = 1 \neq 0$$

وكذلك $\lim_{x \to 0} 3x^2 + 2x + 5 = 5$.

إذاً من نتيجة(٢. ٢ . ٦) يكون

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 2x + 5}{x + 1} = \frac{5}{1} = 5$$

نظرية (٢. ٢. ٩) : (نظرية الحصر)

بفرض أن f, g, h ثلاث دوال معرفة على مجموعة G وتحقق :

$$(I)\ f(x) \le g(x) \le h(x)\ ;\ \forall x \in G \qquad (II)\ \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$$

فإن $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

البرهان:

من الفرض (II) نجد أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_2 > 0\ ,\ \delta_1 > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\forall x \in G : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - b| < \varepsilon$$

باختيار $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ، ينتج أن

$$\forall x \in G : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \ \text{ and } \ |h(x) - b| < \varepsilon \qquad \ldots \quad (2.3)$$

ومن الفرض (I) ينتج أن

$$f(x) - b \le g(x) - b \le h(x) - b \qquad \ldots \quad (2.4)$$

من العلاقات $(2.3), (2.4)$ ينتج أن $|g(x) - b| < \varepsilon$

وهذا يعني أن لكل $\varepsilon > 0$ أمكن إيجاد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$$

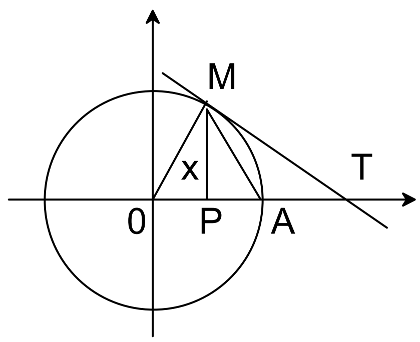
أي أن $\lim_{x\to a} g(x) = b$.

نتيجة (٢. ٢. ١٠): $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

البرهان:

نفرض أن $0 < x < \pi/2$ (وبالمثل يمكن دراسة الحالة $-\pi/2 < x < 0$). نعتبر دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوى 1 ونبرهن المتباينة الآتية

$$\sin x < x < \tan x \qquad \ldots \quad (2.5)$$



لاحظ من الرسم أن :

مساحة المثلث TMO < مساحة القطاع AMO < مساحة المثلث AMO

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x$$

بضرب جميع الأطراف فى 2 تنتج العلاقة (2.5) مباشرة .

وحيث أنه فى الربع الأول $0 < x < \pi/2$ تكون $\sin x > 0$ فبقسمة أطراف المتباينة (2.5) على $\sin x$ ، ينتج أن

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

وبالتالى

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \qquad \ldots \qquad (2.6)$$

ولكن من المتطابقة المثلثية $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$ ومن المتباينة (2.5) يكون $\sin(x/2) < x/2$ وينتج أن

$$\cos x > 1 - (x^2/2) \quad \ldots \quad (2.7)$$

من العلاقتين (2.6)، (2.7) ينتج أن

$$1 > \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \ldots \qquad (2.8)$$

وحيث أن الدوال فى جميع أطراف المتباينة (2.8) دوال زوجية فينتج أن المتباينة (2.8) صحيحة إذا كانت $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

وحيث أن $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 0}(1 - \frac{x^2}{2}) = 1$

فبتطبيق نظرية الحصر على العلاقة (2.8) ينتج أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

نتيجة (٢. ٢. ١١): $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$

البرهان:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\frac{\sin x}{x})} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1 .$$

مثال (٢. ٢. ١٢): أثبت أن $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

الحل:

بفرض أن $x \neq 0$ نجد أن

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} x = 1.0 = 0$$

مثال (٢. ٢. ١٣): أثبت أن $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$.

الحل: من المعلوم من حساب المثلثات أن $\sin x - \sin a = 2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$. ضع $y = \frac{x-a}{2}$ فيكون $(x \to a \Leftrightarrow y \to 0)$. إذاً

$$\lim_{x\to a} (\sin x - \sin a) = \lim_{y\to 0} 2\cos(y+a)\sin y$$

$$= \lim_{y\to 0} 2\cos(y+a).\frac{\sin y}{y}.y \quad = \lim_{y\to 0} 2\cos(y+a).y . \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 0 \times 1 = 0$$

دالة محدودة × دالة تؤول إلى الصفر   تؤول إلى 1

وهذا يعني أن $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$.

مثال (٢. ٢. ١٤): أثبت أن $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$.

الحل:

نفس طريقة مثال (٢. ٢ . ١٣) مع استخدام المتطابقة

$$\cos x - \cos a = -2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)$$

ويترك تمرين للقارىء .

مثال (٢. ٢. ١٥): أثبت أن $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} . \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

مثال (٢. ٢. ١٦): أوجد $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} . \frac{3x}{\sin 3x} . \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{5}{3} \times 1 \times 1 = \frac{5}{3}$$

مثال (٢. ٢. ١٧): أثبت أن $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\ .\ x\ \sin\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1\times 0 = 0$$

دالة محدودة × دالة تؤول إلى الصفر

مثال (٢. ٢. ١٨): أوجد $\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}\ ,\ a\neq 0$.

الحل: (تمرين)

مثال (٢. ٢. ١٩): أوجد $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+3\right)\sin x$.

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+3\right)\sin x = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+3\sin x\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+3\lim_{x\to 0}\sin x$$

$$= 1+3\times 0 = 1$$

مثال (٢. ٢. ٢٠): أوجد $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$.

الحل: من المعلوم أن $\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$. إذاً

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\ .\ \sin\frac{x}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\ .\ \lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2} = 1\times 0 = 0$$

مثال (٢. ٢. ٢١): أثبت أن $\lim_{x\to 2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-2} = \frac{\pi}{4}$.

الحل: بوضع $y = \frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{2}$ نجد أن $x\to 2$ تكافىء $y\to 0$ (أكمل الحل)

مثال (٢. ٢. ٢٢): أوجد $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}\ ;\ m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0, m\neq 0$.

الحل:

لاحظ أن نهاية البسط تساوى صفرا ونهاية المقام تساوى صفرا . نأخذ التعويض $y = x-\pi$

فيكون $(y\to 0)\Leftrightarrow(x\to\pi)$. أكمل الحل وتحقق من أن :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx} = (-1)^{m-n}\frac{m}{n}$$

الآن نفرض أن G فترة لانهائية من $\mathbb{R}$ وأن الدالة f معرفة على المجموعة G وكانت ∞ ($-\infty$) نقطة طرفية للمجموعة G.

تعريف (٢. ٢. ٢٤): يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى العدد b عندما تؤول x إلى ∞ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $k > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G : x > k \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ونكتب في هذه الحالة $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$

وبالمثل إذا كانت $-\infty$ نقطة طرفية للمجموعة G يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى العدد b عندما تؤول x إلى $-\infty$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $k > 0$ بحيث أن:

$$\forall x \in G : x < -k \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

ونكتب في هذه الحالة $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

ملاحظة (٢. ٢. ٢٥): يمكن إثبات نظرية وحدانية النهاية وجميع النظريات عن نهاية مجموع وناتج طرح وحاصل ضرب وخارج قسمة دالتين في ضوء تعريف (٢. ٢. ٢٤) .

مثال (٢. ٢. ٢٦): أثبت أن $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

الحل: من أجل هذا نفرض أن $\varepsilon > 0$ والمطلوب هو إيجاد عدد $k > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : x > k \Rightarrow |f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

لاحظ أنه باختيار $k = 1/\varepsilon$ ينتج المطلوب وذلك لأن

$$x > k = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon.$$

مثال (٢. ٢. ٢٧): أثبت أن $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

الحل:

من أجل هذا نفرض أن $\varepsilon > 0$ والمطلوب هو إيجاد عدد $k > 0$ بحيث أن

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : x < -k \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon$$

نلاحظ أنه باختيار $k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ينتج المطلوب مباشرة .

وعامة يمكن إثبات أن $\forall \alpha > 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$.

مثال (٢. ٢. ٢٨): أثبت أن $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-3} = 1$.

الحل :

المطلوب إثبات أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $k(\varepsilon) > 0$ بحيث أن :

$$\forall x > \sqrt{3} : x > k \Rightarrow |f(x) - 1| = \left| \frac{x^2}{x^2-3} - 1 \right| < \varepsilon$$

لاحظ أن $\left|\frac{3}{x^2-3}\right| = \left|\frac{x^2-x^2+3}{x^2-3}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2-3} - 1\right|$ ، ويكون هذا المقدار أقل من ε إذا تحقق أن $\frac{1}{3}|x^2-3| > \frac{1}{\varepsilon}$ ، وحيث أن $x > \sqrt{3}$ نجد أن ذلك يتحقق إذا كان $x^2 > \frac{3}{\varepsilon} + 3$ ، أي أن $x > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} + 3}$

وبالتالي نختار $k = \sqrt{\frac{3}{\varepsilon} + 3}$ ليتحقق المطلوب.

تعريف (٢. ٢. ٢٩): يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى ∞ عندما تؤول x إلى العدد a إذا كان لكل عدد $k > 0$ مهما كان كبيراً يمكن إيجاد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$\forall x \in G : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > k$$

وفي هذه الحالة سنكتب $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

ويقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى $-\infty$ عندما تؤول x إلى العدد a إذا كان لكل عدد $k > 0$ مهما كان كبيراً يمكن إيجاد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$\forall x \in G : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$$

وفي هذه الحالة سنكتب $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

تعريف (٢. ٢. ٣٠): يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى ∞ عندما تؤول x إلى ∞ إذا كان لكل عدد $k > 0$ مهما كان كبيراً يمكن إيجاد عدد $L > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G : x > L \Rightarrow f(x) > k$$

ونكتب في هذه الحالة $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

مثال (٢. ٢. ٣١): أثبت أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$.

الحل : المطلوب إثبات أنه لكل عدد موجب $k > 0$ يوجد عدد $\delta(k) > 0$ بحيث يكون :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x|} > k$$

واضح أنه باختيار $\delta = \frac{1}{k}$ يتحقق المطلوب لأنه لكل $x \in \mathbb{R}^*$ نجد أن:

$$|x| < \delta = \frac{1}{k} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > k \Rightarrow \frac{1}{|x|} > k$$

وهو المطلوب.

لاحظ أنه عامة يمكن إثبات أن $\forall \alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|^{\alpha}} = \infty$.

مثال (٢. ٢. ٣٢): أثبت باستخدام التعريف أن $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - x^2\right) = -\infty$

الحل : المطلوب إثبات أن لكل عدد $k > 0$ يوجد عدد $L(k) > 0$ بحيث أن :

$$\forall x > 0 : x > L \Rightarrow \left(1 - x^2\right) < -k$$

لاحظ أن $\left(1 - x^2\right) < -k$ يتحقق عندما $x^2 > 1 + k$ ، وحيث أن $x > 0$ نجد أن $x > \sqrt{1+k}$

وبالتالي نختار $L = \sqrt{1+k}$ ليتحقق المطلوب لأن :

$$x > L = \sqrt{1+k} \Rightarrow x^2 > 1 + k \Rightarrow 1 - x^2 < -k$$

مثال (٢. ٢. ٣٣): أوجد $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$.

الحل: حيث أن الدالة $\frac{1}{x}$ تؤول إلى الصفر عندما تؤول x إلى ∞ والدالة $\sin x$ دالة محدودة لجميع قيم x الحقيقية إذاً $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} . \sin x = 0$.

مثال (٢. ٢. ٣٤): أثبت أن $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$.

الحل: تمرين

مثال (٢. ٢. ٣٥): أوجد $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} \tan \frac{2}{x}$.

الحل: ضع $y = \frac{1}{x}$ ولاحظ أن $(y \to 0) \Leftrightarrow (x \to \infty)$ ويكون

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} \tan \frac{2}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y \tan 2y}{y^2}$$

إذاً

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} \tan \frac{2}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \frac{\sin 2y}{2y} \frac{2}{\cos 2y} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

مثال (٢. ٢. ٣٦): أوجد $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^3 - x^2 + 2}$.

الحل: حيث أن البسط والمقام كثيرتى حدود ، x تؤول إلى ∞ . بالقسمة على x بأكبر أس فى المقام بسطا ومقاما ينتج أن

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x + 1}{x^3 - x^2 + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال (٢. ٢. ٣٧): أوجد $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+1)^5 (x-5)^{20}}{(3x+6)^{25}}$.

الحل: حيث أن البسط والمقام كثيرتى حدود ، x تؤول إلى ∞ . فبالقسمة على x بأكبر أس فى المقام (بسطا ومقاما) أى بالقسمة على x^{25} ، وأخذ النهاية نجد أن :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+1)^5 (x-5)^{20}}{(3x+6)^{25}} = \frac{2^5}{3^{25}}$$

تحقق من ذلك؟.

النهاية من طرف واحد :

نفرض أن الدالة f معرفة على المجموعة G الجزئية من $\mathbb{R}$ وأن a نقطة نهاية للمجموعة G ، وندرس نهاية الدالة f من طرف واحد عند النقطة a.

تعريف (٢. ٢. ٣٨): يقال إن العدد b هو النهاية اليمنى للدالة f عند النقطة a إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أن :

$$\forall\ x \in G :\ 0 < x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

معنى هذا أن قيم x التى على يمين النقطة a هى التى تؤثر فى النهاية وفى هذه الحالة يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى العدد b عندما تؤول x إلى a من جهة اليمين ونكتب للتعبير عن ذلك $\lim_{x \to a+} f(x) = b$.

تعريف (٢. ٢. ٣٩): يقال إن العدد b هو النهاية اليسرى للدالة f عند النقطة a إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall\ x \in G :\ 0 < a - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

ومعنى هذا أن قيم x التي على يسار النقطة a هي التي تؤثر في النهاية وفي هذه الحالة يقال إن الدالة $f(x)$ تؤول إلى العدد b عندما تؤول x إلى a من جهة اليسار ونكتب للتعبير عن ذلك $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$.

ملاحظة (٢. ٢. ٤٠): من السهل استنتاج أنه إذا كانت الدالة $f(x)$ تؤول إلى العدد b عندما تؤول x إلى a فإن هذا يكافيء $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ ، وبالتالي إذا تساوت النهاية اليمنى مع النهاية اليسرى للدالة f عند النقطة a فإن نهاية الدالة تكون موجودة أما خلاف ذلك فالنهاية تكون غير موجودة عند النقطة a.

مثال (٢. ٢. ٤١): هل النهاية $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ موجودة ؟

الحل: نحسب النهاية اليمنى والنهاية اليسرى عند النقطة 0 :

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0-} -1 = -1$$

واضح أن النهاية اليمنى لاتساوى النهاية اليسرى للدالة عند النقطة 0 وبالتالى النهاية غير موجودة عند النقطة 0.

مثال (٢. ٢. ٤٢): أوجد النهاية اليمنى والنهاية اليسرى لدالة الصحيح $f(x) = [x]$ عند النقطة $a = n$ (حيث n عدد صحيح) .

الحل: من تعريف دالة الصحيح $[x] = \begin{cases} n-1 \; ; \; n-1 \le x < n \\ n \; ; \; n \le x < n+1 \end{cases}$ ويكون إذاً

$$\lim_{x \to n-} [x] = \lim_{x \to n-} (n-1) = n-1 \; ; \quad \lim_{x \to n+} [x] = \lim_{x \to n+} n = n$$

وينتج من ذلك أن $\lim\limits_{x \to n} [x]$ غير موجودة .

==

==

==