المحاضرة السادسة

الاتصال Continuity

العناصر الأساسية في المحاضرة:

1- تعريف اتصال دالة عند نقطة في نطاقها ومن ثم علي مجموعة وأمثلة.
2- نظريات الاتصال.
3- العلاقة بين اتصال دالة ومقياسها .
4- اتصال دالة علي فترة مغلقة.
5- اتصال دالة من طرف واحد.

بند ٣ : الاتصال : Continuity

تعريف (٢. ٣. ١):

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مفتوحة (أو اتحاد عدد من الفترات المفتوحة) G وكانت $a \in G$ ، فإنه يقال إن الدالة f متصلة عند النقطة a إذا كان لكل عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta(\varepsilon) > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

يُلاحظ من التعريف السابق وبعد دراستنا لتعريف النهاية أنه إذا كانت $a \in G$ فإن الدالة f تكون متصلة عند النقطة a إذا وإذا فقط كان $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

سنفرض فيما يلي أن النقطة $a \in G$ وأن G فترة مفتوحة (أو اتحاد عدد من الفترات المفتوحة). يُلاحظ إذن أنه لكى تكون الدالة f متصلة عند النقطة $a \in G$ يجب أن تحقق الشروط التالية :

١- الدالة f تكون معرفة عند النقطة a

٢- $\lim_{x \to a+} f(x)$ تكون موجودة

٣- $\lim_{x \to a-} f(x)$ تكون موجودة

٤- $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x)$ ، أى أن $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة

٥- نهاية الدالة عند النقطة a تساوى قيمة الدالة عند النقطة a ، أى أن

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

تعريف (٢. ٣. ٢): يقال إن الدالة f منفصلة عند النقطة a إذا كانت f غير متصلة عند النقطة a. ويقال إن الدالة f متصلة على مجموعة G إذا كانت f متصلة عند كل نقطة من نقاط G.

مثال (٢. ٣. ٣): إثبت أن الدالة الثابتة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة بالقانون $f(x) = b, \forall x \in \mathbb{R}$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل: يجب إثبات أنه لأى نقطة $a \in \mathbb{R}$ فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = b$. من أجل هذا لكل $\varepsilon > 0$ نأخذ $\delta = \varepsilon$ فنلاحظ أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x-a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |b - b| = 0 < \varepsilon$$

وهذا يبرهن أن $f(x)$ تؤول إلى $f(a)$ عندما تؤول x إلى a وهذا بدوره يبرهن أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (٢. ٣. ٤): إثبت أن الدالة $f(x) = x$ متصلة على $\mathbb{R}$..

الحل: يجب إثبات أنه لكل نقطة $a \in \mathbb{R}$ يكون $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = a$. من أجل هذا لكل $\varepsilon > 0$ نأخذ $\delta = \varepsilon$ فنلاحظ أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x-a| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$$

وهو المطلوب .

مثال (٢. ٣. ٥): إثبت أن الدالة $f(x) = \cos x$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل: لاحظ أن المطلوب هو إثبات أنه لكل $a \in \mathbb{R}$ يكون $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$. لبرهان ذلك نلاحظ أن

$$\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}$$

ضع $y = \dfrac{x-a}{2}$ فيكون $(x \to a) \Leftrightarrow (y \to 0)$ ، وبالتالى

$$\lim_{x \to a} (\cos x - \cos a) = \lim_{y \to 0} -2 \sin y \,.\, \sin(y+a)$$

$$= \lim_{y \to 0} (-2) \frac{\sin y}{y} \,.\, \underbrace{\lim_{y \to 0} y \sin(y+a)}_{\text{دالة محدودة} \times \text{دالة تؤول إلى الصفر}} = -2 \times 1 \times 0 = 0$$

وهذا يبرهن أن $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$.

مثال (٢. ٣. ٦): إثبت أن الدالة $f(x) = \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل:

نفس طريقة المثال السابق ويترك كتمرين للقارىء .

نفرض الآن أن $g\ ,\ f$ دالتان معرفتان على المجموعة G وكانت $a \in G$.

نظرية (٢. ٣. ٧): إذا كانت كلاً من $f\ ,\ g$ دالة متصلة عند النقطة a فإن كلاً من الدوال $fg, f-g, f+g, cf$ (حيث c مقدار ثابت) دالة متصلة عند النقطة a، وإذا كانت $g(a) \neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ تكون دالة متصلة عند النقطة a.

مثال (٢. ٣. ٨): ابحث اتصال الدالة $f(x) = x^2$ على $\mathbb{R}$.

الحل:

حيث أن الدالة $g(x) = x$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ مثال(٢. ٣ . ٤) فمن نظرية(٢. ٣ . ٧) نلاحظ أن $f(x) = g(x) \,.\, g(x)$ حاصل ضرب دالتين متصلتين وبالتالي فهى دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

ملاحظات (٢. ٣. ٩): ١ – يمكن باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضى لإثبات أن الدوال $f(x) = x^n$ حيث n عدد طبيعى ، دوال متصلة على $\mathbb{R}$. ٢ – إذا كانت $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ دالة كثيرة حدود من درجة n فإنه باستخدام نظـــرية (٢. ٣ . ٧) وملاحظة (١) نجد أنه لأى نقطة $a \in \mathbb{R}$ يكون : $$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$ أى أن الدالة $p(x)$ تكون متصلة عند أى نقطة $a \in \mathbb{R}$. وينتج من ذلك أن كثيرات الحدود من أى درجة تكون دوال متصلة على $\mathbb{R}$. ٣– إذا كانت $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $p(x)$ ، $Q(x)$ كثيرتى حدود ، فإن $f(x)$ تكون عبارة عن قسمة دالتين متصلتين فتكون دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ماعدا عند النقط x التى تجعل المقام $Q(x) = 0$.

أمثلة (٢. ٣. ١٠):

(١) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$.

الحل: من الملاحظة السابقة نجد أن الدالة عبارة عن قسمة كثيرتى حدود فى x فتكون دالة متصلة على $\mathbb{R}$ فيما عدا عندما $x = \pm 2$ وبالتالى تكون الدالة متصلة على المجموعة $\mathbb{R} - \{-2\ ,\ 2\}$.

(٢) ابحث اتصال الدالة $f(x) = \sec x$.

الحل : حيث أن $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ والدالة $\cos x$ متصلة علي $\mathbb{R}$ ، إذاً الدالة f متصلة علي $\mathbb{R}$ ما عدا أصفار المقام وهي المجموعة $\{x = n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$ وبالتالي الدالة f متصلة علي المجموعة $\mathbb{R} - \{x = n\pi + \frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$.

(٣) ابحث اتصال الدوال $\cot x$, $\tan x$, $\csc x$.

الحل : تمرين.

نظرية (٢. ٣. ١١): إذا كانت الدالة f معرفة على مجموعة G ومتصلة عند النقطة $a \in G$ فإن الدالة $|f|$ تكون متصلة أيضا عند النقطة a. (حيث $|f|(x) = |f(x)|$)

البرهان: حيث أن f متصلة عند النقطة a فمن التعريف ، لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall x \in G : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \ldots \quad (2.23)$$

ومن المعلوم أن

$$\big||f(x)| - |f(a)|\big| \le |f(x) - f(a)| \quad \ldots \quad (2.24)$$

من العلاقتين (2.23) ، (2.24) ينتج أن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن :

$$\forall \ x \in G \ : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ \big||f(x)| - |f(a)|\big| < \varepsilon$$

وهذا يبرهن أن $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$. أى أن الدالة $|f|$ متصلة عند النقطة a.

ملاحظة (٢. ٣. ١٢): عكس النظرية (٢. ٣ . ١١) ليس بالضرورة صحيحاً .

مثال (٢. ٣. ١٣): إعتبر الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \ge 0 \\ -1 & ; \ x < 0 \end{cases}$$

هذه الدالة غير متصلة عند النقطة 0 وذلك لأن $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة ، بينما الدالة $|f(x)| = 1 , \forall x \in \mathbb{R}$ متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة ثابتة) وبالتالى فهى متصلة عند النقطة 0 بالضرورة . وهذا يعني أنه قد يكون مقياس الدالـــة دالـــة متصلة عند نقطة ورغم ذلك الدالة نفسها تكون منفصلة عند هذه النقطة .

مثال (٢. ٣. ١٤): ابحث اتصال الدالة $f(x) = |x|$ على $\mathbb{R}$.

الحل: حيث أن الدالة $g(x) = x$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ، فمن نظرية (٢. ٣ . ١١) ينتج أن الدالة $|g(x)| = |x|$ تكون دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتالي فإن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

الآن نفرض أن الدالة f معرفة على المجموعة G وكانت $a \in G$.

تعريف(٢. ٣ . ١٥) : (اتصال الدالة من طرف واحد)

يقال إن الدالة f متصلة من اليمين عند النقطة a إذا كان $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$ ، ويقال إن الدالة f متصلة من اليسار عند النقطة a إذا كان $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

لاحظ أنه إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة a فإنها تكون متصلة من اليمين ومتصلة من اليسار عند هذه النقطة وبالعكس إذا كانت الدالة f متصلة من اليمين ومتصلة من اليسار عند النقطة a فإنها تكون متصلة عند النقطة a .

تعريف (٢. ٣. ١٦): إذا كانت الدالة f معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$. يقال إن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ إذا كانت f متصلة على الفترة المفتوحة $]a,b[$ ومتصلة من اليمين عند النقطة a ومتصلة من اليسار عند النقطة b .

مثال (٢. ٣. ١٧): ابحث اتصال الدالة $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ; \ x \le 3 \\ 3x-7 & ; \ x > 3 \end{cases}$ عند النقطة $x = 3$.

الحل :

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} (2x-1) = 5$$

$$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3+} (3x-7) = 2$$

ويلاحظ أن $f(3) = 5$ ، إذن $\lim_{x \to 3-} f(x) = 5 = f(3)$ ، أى أن الدالة متصلة من اليسار عند النقطة 3.

بينما $\lim_{x \to 3+0} f(x) = 2 \ne f(3)$ ، أى أن الدالة ليست متصلة من اليمين عند النقطة 3.

ونستنتج مما سبق أن الدالة f ليست متصلة عند النقطة 3.

تعريف (٢. ٣. ١٨): يقال إن a نقطة انفصال من النوع الأول للدالة f إذا كان :

$$\lim_{x \to a+} f(x) = b_1 , \ \lim_{x \to a-} f(x) = b_2 ; b_1 \ne b_2$$

ويقال إن a نقطة انفصال من النوع الثاني للدالة f إذا كانت $f(x)$ لاتؤول إلى نهاية من اليمين أو من اليسار أو من اليمين واليسار معا .

ويقال إن a نقطة انفصال من النوع الثالث للدالة f إذا كان :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad , \quad f(a) \ne b$$

مثال (٢. ٣. ١٩): عند النقطة $x = 0$ ادرس اتصال الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{\sin x}{x} & , \ x \ne 0 \\ 3 & , \ x = 0 \end{cases}$$

الحل: نحسب أولا النهاية اليمنى والنهاية اليسرى عند النقطة 0

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 2-\frac{\sin x}{x} = 2-1=1$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 2 - \frac{\sin x}{x} = 2 - 1 = 1$$

وينتج من ذلك أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ ، ولكن $f(0)=3$. إذن الدالة ليست متصلة عند النقطة 0 وانفصالها من النوع الثالث.

مثال (٢. ٣. ٢٠): ادرس اتصال دالة الصحيح $f(x)=[x]$ على $\mathbb{R}$.

الحل: نعلم أن دالة الصحيح معرفة كما يلي

$$f(x)=[x]=n \qquad , \qquad n\le x<n+1$$

وذلك لأي عدد صحيح $n\in\mathbb{Z}$.

أولا : إذا كانت $a=n$ عدد صحيح

$$\lim_{x\to n-}[x] = \lim_{x\to n-} (n-1) = n-1 ,$$

$$\lim_{x\to n+}[x] = \lim_{x\to n+} (n) = n$$

واضح أن النهاية اليمنى لاتساوى النهاية اليسرى عند النقطة $a=n$ إذن الدالة تكون منفصلة عند جميع النقاط $x=n$ حيث n عدد صحيح .

ثانيا : إذا كانت $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ فإنه يوجد عدد صحيح n بحيث أن $n<a<n+1$ ونلاحظ أن

$$\lim_{x\to a+}[x] = \lim_{x\to a+} n = n , \quad \lim_{x\to a-}[x] = \lim_{x\to a-} n = n$$

وكذلك $f(a)=[a]=n$. وينتج إذن أن $\lim\limits_{x\to a}[x]=[a]$. إذن الدالة $[x]$ تكون متصلة عند أى نقطة $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. ونستنتج مما سبق أن دالة الصحيح متصلة على $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ومنفصلة انفصال من النوع الأول عند أى نقطة $a\in\mathbb{Z}$.

مثال (٢. ٣. ٢١): ادرس اتصال الدالة الآتية

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \ |x|\le \pi/2 \\ 2-\dfrac{4x^2}{\pi^2} & , \ |x|>\pi/2 \end{cases}$$

الحل : واضح أن

$$f(x)=\begin{cases} 2-4x^2/\pi^2 & , \ x<-\pi/2 \\ \sin x & , \ -\pi/2\le x\le \pi/2 \\ 2-4x^2/\pi^2 & , \ x>\pi/2 \end{cases}$$

ونطاقها هو $\mathbb{R}$.

إذا كانت $x<-\pi/2$: $f(x)=2-\dfrac{4}{\pi^2}x^2$ وهى دالة متصلة لأنها كثيرة حدود .

إذا كانت $-\pi/2 < x < \pi/2$: $f(x) = \sin x$ وهى دالة متصلة كما سبق فى مثال (٢. ٣. ٦) .

إذا كانت $x > \pi/2$: $f(x) = 2 - \frac{4}{\pi^2}x^2$ وهى أيضا دالة متصلة لأنها كثيرة حدود .

لإتمام دراسة الدالة على $\mathbb{R}$ يجب دراستها أيضاً عند النقطتين $\pi/2$ ، $-\pi/2$.

عند النقطة $x = -\pi/2$:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \sin x = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}-} (2 - \frac{4}{\pi^2}x^2) = 2 - \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{4} = 2 - 1 = 1$$

واضح أن النهاية اليمنى لاتساوى النهاية اليسرى وبالتالى فإن الدالة ليست متصلة عند النقطة $x = -\frac{\pi}{2}$ وانفصالها من النوع الأول عند هذه النقطة .

عند النقطة $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} 2 - \frac{4}{\pi^2}.x^2 = 2 - 1 = 1$$

وكذلك $f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. وينتج من ذلك أن $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) = 1$ ، أى أن الدالة متصلة عند النقطة $x = \frac{\pi}{2}$. ومما سبق ينتج أن الدالة متصلة على $\mathbb{R}$ ماعدا عند النقطة $-\frac{\pi}{2}$.

مثال (٢. ٣. ٢٢): إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & ; \ x \le 1 \\ 3x & ; 1 < x < 2 \\ bx^2 - a & ; \ x \ge 2 \end{cases}$$

فأوجد قيمة كلاً من الثابتين a,b لكى تكون الدالة متصلة على $\mathbb{R}$.

الحل :

واضح أن الدالة متصلة على الفترات $]2, \infty[\ ;]1, 2[\ ;]-\infty, 1[$ لأنها كثيرات حدود. إذن لكى تكون الدالة متصلة على $\mathbb{R}$ يجب أن تكون متصلة أيضا عند النقطتين $1, 2$.

لكى تكون متصلة عند النقطة $x = 1$ يجب أن تحقق

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

الآن

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax-b) = a-b \;; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x = 3 \;; f(1) = a-b$$

إذن ينتج من ذلك أن

$$a - b = 3 \quad \ldots \quad (2.25)$$

ولكي تكون الدالة متصلة عند النقطة $x = 2$ يجب أن تحقق

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

الآن

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x = 6; \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} bx^2 - a = 4b - a; f(2) = 4b - a$$

إذن يكون

$$4b - a = 6 \quad \ldots \quad (2.26)$$

من المعادلتين $(2.25),(2.26)$ بالجمع ينتج أن $3b = 9$ ومنها $b = 3$ وبالتعويض في (2.25) عن قيمة b ينتج أن $a = 6$.

مثال (٢. ٣. ٢٣): أوجد قيمة كلاً من الثابتين a,b لكي تكون الدالة الآتية متصلة على الفترة المغلقة $[-3,0]$.

$$g(x) = \begin{cases} -x & , -3 \le x \le -2 \\ a(x^2-1)+b & , -2 < x < 0 \\ 3 & , x = 0 \end{cases}$$

الحل : الدالة تكون متصلة على الفترة المغلقة $[-3,0]$ إذا كانت متصلة على الفترة المفتوحة $]-3,0[$ ومتصلة من اليمين عند -3 ومتصلة من اليسار عند 0 .

واضح أن الدالة متصلة على الفترات $]-2,0[$ ، $]-3,-2[$. إذن لكي يتحقق المطلوب يجب أن تكون الدالة متصلة عند النقطة -2 ومتصلة من اليمين عند -3 ومن اليسار عند 0 .

عند النقطة $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} (-x) = 2$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} a(x^2-1) + b = 3a + b$$

وكذلك نجد أن $f(-2) = -(-2) = 2$. إذن يجب أن يتحقق أن

$$3a + b = 2 \quad \ldots \quad (2.27)$$

عند النقطة $x = -3$:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} -x = 3 , f(-3) = 3$$

إذن الدالة متصلة من اليمين عند -3 .

عند النقطة $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} a(x^2 - 1) + b = -a + b ; f(0) = 3$$

إذن يجب أن يكون

$$-a + b = 3 \quad \ldots \quad (2.28)$$

إذن بطرح المعادلة (2.28) من المعادلة (2.27) ينتج أن

$$4a = -1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$$

ومن المعادلة (2.28) بالتعويض عن قيمة a ينتج أن

$$b = 3 + a = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

نظرية (٢. ٣. ٢٤): (اتصال دالة الدالة)

إذا كانت $y = f(x)$ ، $z = g(y)$ دالتين لهما الخواص الآتية :

(١) f متصلة عند النقطة x_o

(٢) g متصلة عند النقطة $y_o = f(x_o)$

فإن الدالة gof تكون متصلة عند النقطة x_o أى أن : $\lim_{x \to x_o} g(f(x)) = g(f(x_o))$

مثال (٢. ٣. ٢٥): ابحث اتصال الدالة $z = \sin x^2$.

الحل:

ضع $y = x^2$ فيكون $z = \sin y$ ولاحظ إذن أن z دالة فى y ، y دالة فى x وأصبحت الدالة عبارة عن تحصيل دالتين . الآن الدالة $y = x^2$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وكذلك الدالة $z = \sin y$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ وينتج إذن من نظرية (٢. ٣ . ٢٤) أن الدالة $\sin x^2$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (٢. ٣. ٢٦):

ابحث اتصال الدالة
$$g(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & ; \; x \neq 0 \\ 2 & ; \; x = 0 \end{cases} .$$

الحل:

إذا كانت $x \neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{x}$ تكون دالة متصلة وحيث أن دالة الجيب دالة متصلة فتكون الدالة $\sin \frac{1}{x}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$ (تحصيل دالتين متصلتين) وبالتالى فإن الدالة $x \sin \frac{1}{x}$ تكون متصلة أيضا على $\mathbb{R}^*$ لأنها عبارة عن حاصل ضرب دالتين متصلتين.

الآن عند النقطة $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

لأنها حاصل ضرب دالة محدودة فى دالة تؤول إلى الصفر ، ولكن $g(0) = 2$. إذن الدالة $g(x)$ ليست متصلة عند النقطة $x = 0$ وانفصالها من النوع الثالث عند $x = 0$.

==

==

==