المحاضرة السابعة

العناصر الأساسية في المحاضرة:

١- ثلاث نظريات هامة للدوال المتصلة على فترة مغلقة وكيفية إيجاد جذر تقريب للمعادلات الجبرية.

٢- اتصال الدالة العكسية وأمثلة توضيحية (الدوال المثلثية العكسية الاتصال – الدالة اللوغاريتمية – الدالة الأسية).

٣- تعريف المشتقة لدالة وأمثلة هامة باستخدام التعريف.

٤- المعني الهندسي للمشتقة ومعادلة الخط المماس والخط العمودي.

خصائص هامة للدوال المتصلة على فترة مغلقة :

الآن نلقى الضوء على بعض خواص الدوال المتصلة على فترة مغلقة .

نظرية (٢ . ٣ . ٢٧) : إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان $f(a)f(b) < 0$ ، فإنه يوجد نقطة على الأقل $x_o \in]a,b[$ بحيث يكون $f(x_o) = 0$.

مثال (٢. ٣. ٢٨): هل يمكن تطبيق نظرية(٢. ٣ . ٢٧) على الدالة التالية

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 < x \le 1 \\ -1; & x = 0 \end{cases}$$

الحل: واضح أن الدالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وتحقق $f(1) = 1 > 0 \,,\, f(0) = -1 < 0$ ، والدالة متصلة على الفترة $]0,1]$ ولكنها ليست متصلة على الفترة $[0,1]$ وذلك لعدم اتصالها من اليمين عند النقطة 0 وبالتالى لايمكن تطبيق النظرية على هذه الدالة .

تطبيق هام : إيجاد قيمة تقريبية لمعادلة جبرية

مثال (٢. ٣. ٢٩): أوجد جذر تقريبي للمعادلة $x^3 + x - 1 = 0$.

الحل: إعتبر الدالة $f(x) = x^3 + x - 1$. واضح أن f متصلة علي $\mathbb{R}$ وبالتالي يمكن تطبيق نظرية (٢. ٣ . ٢٧) عليها باختيار فترة مغلقة بحيث يكون إشارتى الدالة مختلفة عند طرف الفترة فمثلاً إذا إخترنا الفترة

فنلاحظ أن : $[0,1]$ $f(0) = -1 < 0 \; ; \; f(1) = 1 > 0$ ، وحيث أن الدالة كثيرة حدود فهى متصلة على الفترة المغلقة $[0,1]$ إذن يوجد $x_o \in]0,1[$ بحيث يكون $f(x_o) = 0$.

وتكون x_o هى جذر للمعادلة ومطلوب إيجاده . ولكى نحاول إيجاد قيمة تقريبية لهذا الجذر فنحصره فى فترة أصغر فنقسم الفترة $[0,1]$ إلي عشرة أقسام متساوية بالنقط $0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ ونحسب

$$f(0.5) = (0.5)^3 + 0.5 - 1 = 0.625 - 1 < 0$$

أي عند منتصف الفترة ، وحيث أن الناتج سالباً فيكون الجذر بين العددين 0.5 ، 1 فنهتم بحساب قيمة الدالة عند النقط علي يمين 0.5 دون غيرها (أما إذا كان العكس فنهتم بقيم الدالة عند النقط علي يسار 0.5) لأنه في هذا المثال قيمة الدالة في نهاية الفترة موجبة . ونُكمل

$$f(0.6) = (0.6)^3 + 0.6 - 1 = 0.816 - 1 < 0$$

$$f(0.7) = (0.7)^3 + 0.7 - 1 = 1.043 - 1 > 0$$

إذن الجذر يقع في الفترة $]0.6, 0.7[$ ويمكن أخذ قيمة تقريبية للجذر ولتكن 0.65 وبذلك لن يتعدي الخطأ 0.05

وللحصول علي تقريب أفضل نعود فنقسم الفترة $]0.6, 0.7[$عشرة أقسام متساوية بالنقط:

$$0.61, 0.62, 0.63, 0.64, 0.65, 0.66, 0.67, 0.68, 0.69$$

ونحسب قيمة الدالة عند منتصف الفترة

$$f(0.65) = (0.65)^3 + 0.65 - 1 \cong 0.9246 - 1 < 0$$

كمية سالبة فنهتم بالنقط التي علي يمين 0.65 ، ثم نحسب

$$f(0.66) = (0.66)^3 + 0.66 - 1 \cong 0.9475 - 1 < 0$$

$$f(0.67) = (0.67)^3 + 0.67 - 1 \cong 0.9708 - 1 < 0$$

$$f(0.68) = (0.68)^3 + 0.68 - 1 \cong 0.9944 - 1 < 0$$

$$f(0.69) = (0.69)^3 + 0.69 - 1 \cong 1.0185 - 1 > 0$$

وينتج إذن أن الجذر في الفترة $]0.68, 0.69[$ ويمكن اختيار قيمة تقريبية للجذر $x_o \cong 0.685$ بنسبة خطأ لا تتعدي 0.005 وهكذا ... .

ويمكن الحصول على تقريب أفضل بتطبيق النظرية مرات أكثر وبنفس الطريقة السابقة .

نظرية (٢. ٣. ٣٠): إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فإنه يوجد للدالة f قيمة عظمى وقيمة صغرى فى هذه الفترة. وهذا يعنى أنه يوجد $\xi, \eta \in [a,b]$ بحيث أن:

$$\max f = f(\xi) \, , \, \min f = f(\eta)$$

مثال (٢. ٣. ٣١): أوجد $\min f, \max f$ إن وجدت للدالة :

$$f(x) = |x| \; ; \; -1 < x < 1$$

الحل:

واضح أن نطاق الدالة هو الفترة المفتوحة $]-1,1[$ ونعلم أن الدالة $|x|$ متصلة على هذه الفترة ولكن لا يمكن أن نجزم بوجود القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة لأنه قد اختل شرط من شروط النظرية (**٢. ٣. ٣٠**) وهو أن النطاق ليس فترة مغلقة ويلاحظ أن مدى هذه الدالة هو $R_f = [0\,,1[$ وبالتالي فإن للدالة قيمة صغرى وهي $\min f = 0$ ولكن لايوجد لها قيمة عظمى .

مثال (٢. ٣. ٣٢): إذا كانت $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & , \quad 0<x\le 2\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$.

هل يوجد للدالة f قيمة عظمي وقيمة صغري؟ علل؟

الحل :

واضح أن الدالة ليست متصلة عند النقطة $x=0$ وبالتالي لا تتحقق شروط نظرية (٢. ٣. ٣٠) ويكون ليس من الضروري أن يكون لها قيمة عظمي وقيمة صغري ويمكن ملاحظة أن مداها هو $[\frac{1}{2},\infty[$ وبالتالي الدالة ليست محدودة من أعلي ولا يوجد لها قيمة عظمي بينما يوجد لها قيمة صغري وهي $\min f=\dfrac{1}{2}$.

ملاحظة (٢. ٣. ٣٣): إذا كانت الدالة $f(x)=|x|$ في مثال (٢. ٣ . ٣١) معرفة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ فيمكن تطبيق نظرية (٢. ٣ . ٣٠) عليها حيث يكون مداها في هذه الحالة هو $R_f = [0\,,1]$ وبالتالي فإن: $\max f = 1$ ، $\min f = 0$.

نظرية (٢. ٣. ٣٤): إذا كانت f دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان $m=\min f$ ، $M=\max f$ فإنه لأي عدد c تحقق $m<c<M$ يوجد عنصر $x_o\in[a\,,b]$ بحيث أن $f(x_o)=c$. وهذا يعني أن $R_f=[m\,,M]$.

إتصال الدالة العكسية : Continuity of the Inverse function

إذا كانت $f:[a,b]\to[c,d]$ تناظر أحادي فإنه يوجد لها دالة عكسية (أنظر الباب الأول) وبالإضافة إلي ذلك يمكن استنتاج ما يلي :

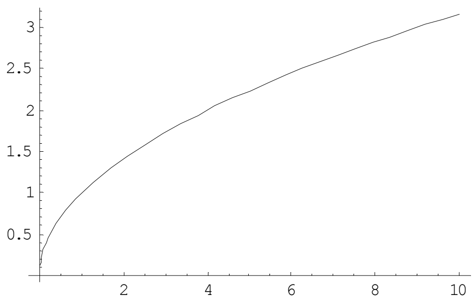
(١) إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to[c,d]$ غامرة وتزايدية فإن دالتها العكسية $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ تكون غامرة وتزايدية .

(٢) إذا كانت الدالة $f:[a,b]\to[c,d]$ غامرة وتناقصية فإن دالتها العكسية $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ تكون غامرة وتناقصية.

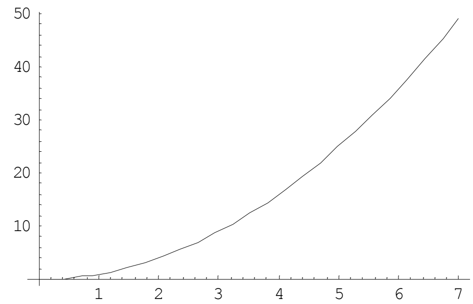
(٣) إذا كانت الدالة $f : A \to B$ تناظر أحادي ومتصلة علي A فإن دالتها العكسية $f^{-1} : B \to A$ تكون تناظر أحادي ومتصلة علي B.

أمثلة (٢. ٣. ٣٥) :

(١)الدالة $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ والمعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$ دالة تزايدية وغامرة ومتصلة (تحقق من ذلك؟) وبالتالي يكون لها دالة عكسية $f^{-1} : [0,\infty[\to [0,\infty[$ ودالتها العكسية تنتج من وضع $y = x^2$ ومنها نجد أن $x = \pm\sqrt{y}$ والقيمة السالبة مرفوضة لأن قيم $x \in [0,\infty[$ غير سالبة ، أي أن $x = \sqrt{y}$ وباستبدال x محل y و y محل x يكون $y = \sqrt{x}$ ، وينتج أن الدالة العكسية للدالة f هي $f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. (أنظر الرسم أدناه).



$f^{-1}(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$



$f(x) = x^2$

(٢) الدالة $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ والمعرفة بالقاعدة $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ دالة تزايدية وغامرة ومتصلة (تحقق من ذلك؟) وبالتالي يكون لها دالة عكسية $f^{-1} : [0,\infty[\to [0,\infty[$ ودالتها العكسية تنتج من وضع $y = x^n$ ومنها نجد أن $x = y^{\frac{1}{n}}$ ، وباستبدال x محل y و y محل x يكون $y = x^{\frac{1}{n}}$ ، وينتج أن الدالة العكسية للدالة f هي $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.

نتيجة (٢. ٣. ٣٦) الدالة $f :]0,\infty[\to]0,\infty[$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ حيث $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}$ دالة متصلة لأنها تحصيل دالتين متصلتين ولها دالة عكسية متصلة وهي $f^{-1}(x) = x^{\frac{q}{p}}$.

ملاحظة (٢. ٣. ٣٧) : الدالة اللوغاريتمية $a > 1$, $y = \log_a x$ $(0 < a < 1$, $y = \log_a x)$ دالة متصلة وتزايدية (تناقصية) علي نطاقها $]0,\infty[$ وسنري إثبات ذلك في مقرر ١٣٢ر ، ومن ثم دالتها العكسية $y = a^x$ تكون متصلة وتزايدية (تناقصية) كذلك علي نطاقها $\mathbb{R}$.

الباب الثاني

الاشتقاق (تعريف وأمثلة)

بند ١ : المشتقة الأولى لدالة : First Derivative of a Function

إذا كانت $y = f(x)$ دالة معرفة ومتصلة علي فترة مفتوحة $A =]a,b[$ وكانت $x_o \in A$ فإن المقدار $f(x) - f(x_o)$ يؤول للصفر عندما تؤول x إلي x_o .

تعريف (3. ١. ١): إذا كان المقدار $\dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ يؤول إلى قيمة نهائية وحيدة ومحددة عندما تؤول x إلي x_o ، فتسمى هذه النهاية بالمشتقة الأولى أو المعامل التفاضلى الأول للدالة $f(x)$ عند النقطة x_o ويرمز لها بالرمز $f'(x_o)$ ، أى أن :

$$\boxed{f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}}$$

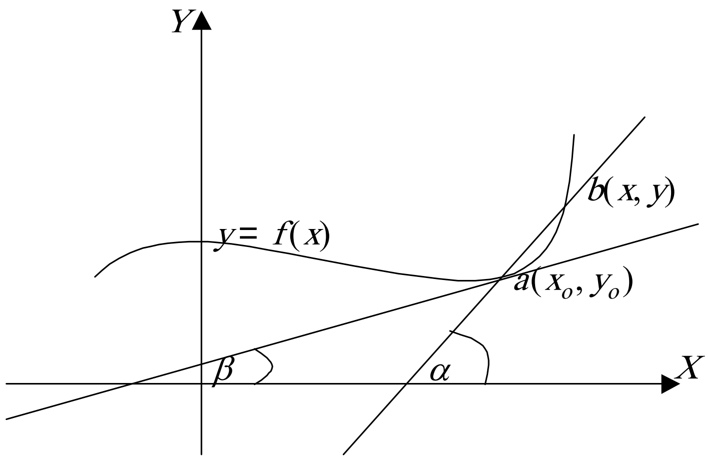
ويقال فى هذه الحالة أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة x_o.

ويقال إن الدالة f قابلة للاشتقاق عل مجموعة $A =]a,b[$ إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقط المجموعة A.

بعض الرموز الأخرى المستخدمة للتعبير عن المعامل التفاضلى الأول للدالة $y=f(x)$ هى " $Df(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, y' , Dy " وتقرأ " تفاضل y بالنسبة إلى x " أو " المعامل التفاضلى الأول للدالة f " أو " المشتقة الأولى للدالة y "

المعنى الهندسى للمشتقة الأولى: The Geometric meaning

نفرض أن الدالة $y=f(x)$ متصلة وممثلة بالمنحنى التالى:



بفرض أن $a(x_o,y_o),b(x,y)$ نقطتان على منحنى الدالة وقريبتان من بعضيهما البعض. نلاحظ أن $\tan\alpha = \dfrac{y-y_o}{x-x_o}$ تعبر عن ميل الوتر ab . فإذا إقتربت x من x_o فإن النقطة $b(x,y)$ تؤول إلي النقطة $a(x_o,y_o)$ علي منحني الدالة والمستقيم المار بالنقطتين a,b يؤول إلى المماس لمنحنى الدالة $y=f(x)$ عند النقطة a. ويكون ميل الخط المماس للمنحني عند النقطة a هو:

$$\tan\beta = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

(بفرض وجود هذه النهاية) ، أى أن المشتقة الأولى للدالة عند x_o ما هى إلا ميل المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $a(x_o,y_o)$. وحيث أن معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (x_o,y_o) وله الميل m عند هذه النقطة هى $\dfrac{y-y_o}{x-x_o}=m$ ، فإن معادلة المماس للمنحنى $y=f(x)$ عند النقطة $a(x_o,y_o)$ هى $\dfrac{y-y_o}{x-x_o}=f'(x_o)$ وذلك لأن $m=f'(x_o)$. ويمكن استنتاج أن معادلة الخط العمودى على المماس عند نفس النقطة $a(x_o,y_o)$ علي الصورة $\dfrac{y-y_o}{x-x_o} = \dfrac{-1}{f'(x_o)}$ وذلك في حالة ما إذا كان $f'(x_o)\neq 0$ أما إذا كانت $f'(x_o)=0$ فإن معادلة الخط المماس تكون $y=y_0$ ومعادلة الخط العمودي علي المماس هي $x=x_0$.

أمثلة (3. 1. 2): (أ) بـــاستخدام تعريف المشتقة الأولى ، أوجد مشتقة الدوال التالية:

$$(i)\ f(x)=\sqrt{x}\quad ;\quad x>0$$

الحل: نفرض إن $x_o>0$ نقطة اختيارية. نحسب النهاية

$$\lim_{x\to x_o}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_o}}{x-x_o}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}} = \lim_{x\to x_o}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_o}} = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

إذن الدالة قابلة للتفاضل عند النقطة x_o ويكون $f'(x_o)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_o}}$ ، وحيث أن $x_o>0$ نقطة إختيارية ، فيكون

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad ; \qquad x > 0}$$

$(ii)\ f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad ; \qquad x \neq 0$

الحل. بفرض أن $x_o \neq 0$ نقطة إختيارية . نحسب النهاية

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_o}}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x_o - x}{x x_o (x - x_o)} = -\frac{1}{x_o^2}$$

إذن الدالة قابلة للتفاضل عند النقطة x_o ويكون $f'(x_o) = -\dfrac{1}{x_o^2}$ ، وحيث أن $x_o \neq 0$ نقطة إختيارية ، فيكون

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \qquad , \qquad x \neq 0}$$

$(iii) \quad f(x) = x^n$ (n عدد طبيعى)

الحل. بفرض أن x_o نقطه إختيارية من $\mathbb{R}$. نحسب النهاية

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{x^n - x_o^n}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)(x^{n-1} + x^{n-2}x_o + \ldots + x_o^{n-1})}{(x - x_o)} = n x_o^{n-1}$$

إذن الدالة قابلة للتفاضل عند النقطة x_o ويكون $f'(x_o) = n x_o^{n-1}$ ، وحيث أن x_o نقطة إختيارية ، فيكون

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n x^{n-1} \qquad ; \qquad n \in \mathbb{N}}$$

$(iv)\ f(x) = \sin x$

الحل. نفرض أن x_o نقطه إختيارية من $\mathbb{R}$. نحسب النهاية

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{\sin x - \sin x_o}{x - x_o}$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{2\sin\left(\frac{x - x_o}{2}\right)\cos\left(\frac{x + x_o}{2}\right)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{\sin\left(\frac{x - x_o}{2}\right)\cos\left(\frac{x + x_o}{2}\right)}{\left(\dfrac{x - x_o}{2}\right)} = \cos x_o$$

إذن الدالة قابلة للتفاضل عند النقطة x_o ويكون $f'(x_o) = \cos x_o$ ، وحيث أن x_o نقطة إختيارية ، فيكون

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\sin x\right) = \cos x \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$(v)\ f(x) = \cos x$

بنفس طريقة المثال السابق يمكن إثبات أن:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\cos x\right) = -\sin x}$$

(ب) أوجد معادلة الخط المماس والخط العمودي لمنحني لدالة $y=f(x)=x^2$ عند النقطة $x_o=2$.

الحل : من الفقرة السابقة (iii) نجد أن $y'=2x$ ، وبالتالي عند النقطة $x_o=2$ نجد أن $y'=f'(2)=4$

ويكون ميل المماس للمنحني عند هذه النقطة هو $m=4$ وتكون معادلة الخط المماس للمنحني عندها هي

$\frac{y-4}{x-2}=4$ ، أي أن $y=4x-4$ وميل الخط العمودي علي المماس هو $-\frac{1}{m}=-\frac{1}{4}$ ومعادلته هي

$\frac{y-4}{x-2}=-\frac{1}{4}$ ، أي أن $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$.

(ج) إذا كانت $f(x)=|x|$ دالة معرفة علي $\mathbb{R}$. إحسب باستخدام تعريف المشتقة $f'(4)$ ، $f'(-3)$ ، $f'(0)$ (إن وجدت)؟

الحل : **أولاً**: عندما تقترب x من العدد 4 فتكون x موجبة ويكون $f(x)=|x|=x$ وبالتالي نجد أن :

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{|x|-|4|}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}1=1$$

إذن $f'(4)$ موجودة وتساوي العدد 1 .

ثانياً: عندما تقترب x من العدد -3 فتكون x سالبة ويكون $f(x)=|x|=-x$ وبالتالي نجد أن :

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{|x|-|-3|}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{-x-3}{x+3}=\lim_{x\to -3}-1=-1$$

إذن $f'(-3)$ موجودة وتساوي العدد -1 .

ثالثاً: عندما تقترب x من العدد 0 فتكون x موجبة علي يمين 0 ويكون $f(x)=|x|=x$ بينما تكون سالبة علي يسار 0 ويكون $f(x)=|x|=-x$ ، وبالتالي:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0+}1=1\ ,\ \lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0-}-1=-1$$

إذن $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ غير موجوده عند النقطة 0 ، وعليه فـــإن $f'(0)$ غير موجودة ، أي أن الدالة $f(x)=|x|$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

==

==

==