تمارين عامة على المحاضرة السابعة والباب الثاني

١) احسب النهايات الآتية :

$$1-\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\qquad ;m,n\in\mathbb{N}$$

$$2-\lim_{x\to\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})$$

$$3-\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\qquad 4-\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$$

$$5-\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$$

٢) أوجد قيمة الثابتين a,b لكى تكون الدالة التالية متصلة على $\mathbb{R}$.

$$g(x)=\begin{cases}x^3 & ,\ x<-1\\ ax+b & ,\ -1\le x<1\\ x^2+2 & ,\ x\ge 1\end{cases}$$

٣) أوجد قيمة الثابتين $a\ ,b$ لكى تكون الدالة الآتية متصلة على الفترة المغلقة $[-4,4]$

$$h(x)=\begin{cases}-x+1 & ,\ -4\le x\le -1\\ ax^2+b & ,\ -1<x<4\\ 3 & ,\ x=4\end{cases}$$

٤) ادرس اتصال الدالة f عند النقطة a :

$$(i)\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{x^2-1} & ,\ x\ne\pm 1\\[2ex] \dfrac{1}{2} & ;\ \ x=\pm 1\end{cases}\quad ,\ a=1\qquad (ii)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|+x}{2} & ;\ x\ne 0\\[2ex] 0 & ;\ x=0\end{cases}\quad ,\ a=0\ .$$

٥) ادرس اتصال الدوال التالية على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

i) $f(x)=|x|$, ii) $f(x)=[x]$, iii) $f(x)=\tan x$,

iv) $f(x)=\begin{cases} \sin x \ ; & x \le \pi/2 \\ 2-4x^2/\pi^2 \ ; & x > \pi/2 \end{cases}$, v) $f(x)=\begin{cases} -x \ ; & x \le -1 \\ 4-x^2; & -1 < x \le 2 \\ \frac{1}{2}x-1; & x > 2 \end{cases}$

٦) ابحث اتصال وانفصال الدوال التالية علي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وفي حاله الانفصال أذكر نوعه :

i) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}; & x \ne 0 \\ 1 \ ; & x = 0 \end{cases}$, ii) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}; & x \ne 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$,

iv) $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$, v) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-1)}{(x-1)^2}; & x \ne 1 \\ 10; & x = 1 \end{cases}$,vi) $f(x)=[\sin x]$,

vii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}; & x \ne 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$, viii) $f(x)=\operatorname{cotan} x$, ix) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\ ; & x \ge 0 \\ 1-x\ ; & x < 0 \end{cases}$,

x) $f(x)=|x^2-4|$, xi) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|}; & x < 0 \\ 2x^2-3x+1; & x \ge 0 \end{cases}$.

٧) أوجد الفترات التي عندها تكون الدالة g التالية متصلة :

$$g(x)=\sqrt{\frac{4x-7}{(x+3)(x^2+2x-8)}} \ .$$

٨) أوجد قيم x التي عندها الدالة f متصلة :

i) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}\sqrt{25-x^2}}{x-4}$, ii) $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x}{2x+7}}$

٩) اثبت أن المعادلة $x^5+2x^4-6x^3+2x-3=0$ لها جذر حقيقي في الفترة $]1,2[$.

١٠) بيّن أن المعادلات التالية لها حل حقيقي واحد على الأقل :

i) $x=\cos x$, ii) $x^2-\sin x=0$.

١١) إذا كانت f , g دالتين متصلتين على $[a,b]$ وكان $f(a)>g(a)$, $f(b)<g(b)$ ، بين أن هناك على الأقل حلاً حقيقياً للمعادلة $f(x)=g(x)$ في الفترة $]a,b[$.

١٢) إذا كانت $f(x)=x^3-5x^2+7x-9$. أثبت انه يوجد عدد حقيقي α بحيث يكون $f(\alpha)=100$.

١٣) احسب القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة f – إن وجدتا – إذا كانت :

i) $f(x)=x^2;\quad -1\le x\le 3$, ii) $f(x)=x^2$, iii) $f(x)=|x-2|-2;\quad -1\le x<2$,

iv) $f(x)=\begin{cases} x+1; & -1\le x<0 \\ 0; & x=0 \\ x-1; & 0<x\le 1 \end{cases}$.

١٤) أوجد جذر حقيقي تقريبي بخطأ لا يزيد عن 0.05 لكل من المعادلات التالية :

i) $x^4-x-1=0$, ii) $x^3-2x=1$

$iii)\quad x^3+x^2-4=0$

١٥) بين أنه يوجد جذرين للمعادلة $2x+1+4\cos\pi x=0$ في الفترة $[0.5,1.5]$.

١٦) اذكر صحة أو خطأ كل مما ياتي ، مبرراً إجابتك :

(١) إذا كانت الدالة f متصلة وليس لها جذر في الفترة $[a,b]$ فان f إما موجبة دائماً أو سالبة دائماً على هذه الفترة.

(٢) إذا كانت الدالة f متصلة عند نقطة a فإنها تكون محدودة على جوار للنقطة a .

١٧) أوجد قيمة للثابت a تجعل الدالة متصلة على $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=\begin{cases} |x+a| & , x\le 1 \\ 2x^2+1 & , x>1 \end{cases}$

2. $k(x)=\begin{cases} 2x^2+x-a & , x\le 0 \\ x^3+a & , x>0 \end{cases}$

3. $g(x)=\begin{cases} a & , x\le 0 \\ \tan^{-1}(1/x) & , x>0 \end{cases}$

4. $h(x)=\begin{cases} (x+a)^2 & , x\le 0 \\ (x-2a)^4 & , x>0 \end{cases}$

مسألة عل الاشتقاق بالتعريف

باستخدام التعريف أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

$(i)\quad y=\sec x$ $\qquad (ii)\quad y=\sin^{-1}x$ $\qquad (iii)\quad y=\sqrt{3x}$

==

==