المحاضرة الثامنة

العناصر الأساسية في المحاضرة :

١- العلاقة بين الاتصال والاشتقاق لدالة.
٢- المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لدالة عند نقطة.
٣- القواعد الأساسية لاشتقاق دالة.
٤- مشتقة تحصيل دالتين (قاعدة السلسلة).

العلاقة بين الاتصال والاشتقاق: The Relation between Continuity and Differentiability

نظرية (3 .1 .3): إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_o فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

البرهان.

إذا كانت x تقع فى جوار للنقطة x_o ولا تساويها، فإن

$$f(x)-f(x_o)=\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}(x-x_o)$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما تؤول x إلى x_o نجد أن:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_o))=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\lim_{x\to x_0}(x-x_o)=f'(x_o).0=0$$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ، وهذا يعني أن الدالة f دالة متصلة عند النقطة x_o.

من النظرية السابقة ينتج أنه إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $]a,b[$ فإنها تكون متصلة على هذه الفترة . ومنها نستنتج أيضاً أنه إذا كانت الدالة $y=f(x)$ غير متصلة عند نقطة ما x_o تقع فى نطاق الدالة فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة. كما أن عكس النظرية السابقه ليس بالضرورة صحيح فمن الممكن أن تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة عند النقطة x_o ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند x_o. والمثال التالى يوضح ذلك.

مثال (3. 1. 4):

إذا كانت $y=f(x)=|x|=\begin{cases} x; & x\geq 0 \\ -x; & x<0 \end{cases}$ ، فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ ، وعليه فـإن الدالة المعطاه متصلة عند الصفر. ولكن من أمثلة (٣. ١. ٢) (ج) نجد أن $f'(0)$ غير موجودة ، وعليه فـإن الدالة المعطاة دالة متصلة عند الصفر(حيث أن $|x|$ متصلة علي $\mathbb{R}$) ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند الصفر.

المشتقة اليمني والمشتقة اليسري : Right and Left Derivatives

إذا كانت الدالة f معرفة في جوار للنقطة x_o وكانت $\lim\limits_{x\to x_o+}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ موجودة فإننا نرمـز لهذه الكمية بالرمز $f'_+(x_o)$ ونقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليمين عند النقطة x_o ومشتقتها اليمني هي العدد $f'_+(x_o)$ ، وبالمثل إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_o-}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ موجودة فإننا نرمز لهذه الكمية بـالرمز $f'_-(x_o)$ ونقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق من اليسار عند النقطة x_o ومشتقتها اليسري هي العدد $f'_-(x_o)$.

من السهولة ما كان أن نتحقق من أنه إذا كانت كلاً من المشتقة اليمني والمشتقة اليسري موجودة عند النقطة x_o وأن $f'_+(x_o)=f'_-(x_o)$ فـإن الدالـة f تكـون قابلـة للاشـتقاق عنـد النقطـة x_o ويكـون $f'(x_o)=f'_+(x_o)=f'_-(x_o)$ ، وكذلك من البديهي أنه إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطـة x_o فإن كلاً من المشتقة اليمني والمشتقة اليسري موجودة عند النقطة x_o وأن $f'(x_o)=f'_+(x_o)=f'_-(x_o)$.

أمثلة (٣. ١. ٥) :

(١) إبحث قابلية الدالة $f(x)=|x-5|$ للاشتقاق عند النقطة $x=5$ ، ثم ابحث قابلية الدالة للاشـتقاق علـي المجموعة $\mathbb{R}-\{5\}$.

الحل : أولاً: عند النقطة $x=5$: نحسب

$$\lim_{x\to 5+}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5+}\frac{|x-5|-0}{x-5}=\lim_{x\to 5+}\frac{x-5}{x-5}=\lim_{x\to 5+}1=1 ,$$

$$\lim_{x\to 5-}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5-}\frac{|x-5|-0}{x-5}=\lim_{x\to 5-}\frac{-(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to 5-}-1=-1 .$$

وينتج من ذلك أن المشتقة اليمني $f'_+(5)=1$ والمشتقة اليسري $f'_-(5)=-1$ ، إذن الدالة $f(x)=|x-5|$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة $x=5$.

ثانياً : في الفترة $]5,\infty[$ يكون $f(x)=|x-5|=x-5$. إذا كانت $c>5$ نقطة اختيارية : نحسب

$$\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{|x-5|-|c-5|}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{(x-5)-(c-5)}{x-c}=\lim_{x\to c+}1=1 ,$$

$$\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-}\frac{|x-5|-|c-5|}{x-c}=\lim_{x\to c-}\frac{(x-5)-(c-5)}{x-c}=\lim_{x\to c-}1=1.$$

وينتج من ذلك أن $f'(c)=f'_+(c)=f'_-(c)=1$ ، وبالتالي الدالة قابلة للاشتقاق علي هذه الفترة.

ثالثاً : في الفترة $]-\infty,5[$ يكون $f(x)=|x-5|=-(x-5)$. إذا كانت $c<5$ نقطة اختيارية : نحسب

$$\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{|x-5|-|c-5|}{x-c}=\lim_{x\to c+}\frac{-(x-5)+(c-5)}{x-c}=\lim_{x\to c+}-1=-1\ ,$$

$$\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-}\frac{|x-5|-|c-5|}{x-c}=\lim_{x\to c-}\frac{-(x-5)+(c-5)}{x-c}=\lim_{x\to c-}-1=-1.$$

وينتج من ذلك أن $f'(c)=f'_+(c)=f'_-(c)=-1$ ، وبالتالي الدالة قابلة للاشتقاق علي هذه الفترة.

إذن الدالة $f(x)=|x-5|$ قابلة للاشتقاق علي المجموعة $\mathbb{R}-\{5\}$.

(٢) إبحث قابلية الدالة $f(x)=\sqrt{|x|}$ للاشتقاق عند النقطة $x=0$ ، ثم ابحث قابلية الدالة للاشتقاق علي المجموعة $\mathbb{R}^*$.

الحل : تمرين .

(تحقق من أن كلاً من $f'_+(0)$ ، $f'_-(0)$ غير موجودة ولكن إذا كانت $x_o\neq 0$ فإن $f'(x_o)$ موجودة).

(٣) إبحث قابلية الدالة $f(x)=\sqrt{x^3}$ للاشتقاق علي المجموعة $]0,\infty[$.

الحل : **نفرض** $c>0$ نقطة اختيارية ونحسب

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{c^3}}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-\left(\sqrt{c}\right)^3}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{c}\right)}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{c}\right)\left[x+\sqrt{c}\sqrt{x}+c\right]}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{c}\right)}=\lim_{x\to c}\frac{\left[x+\sqrt{c}\sqrt{x}+c\right]}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{c}\right)}=\frac{3c}{2\sqrt{c}}=\frac{3}{2}\sqrt{c}\ .$$

(٤) إبحث قابلية الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ للاشتقاق عند النقطة $x=0$ ، ثم ابحث قابلية الدالة للاشتقاق علي المجموعة $\mathbb{R}^*$.

الحل : تمرين .

(تحقق من أن كلاً من $f'_+(0)$ ، $f'_-(0)$ غير موجودة ولكن إذا كانت $x_o\neq 0$ فإن $f'(x_o)$ موجودة).

قواعد أساسية للاشتقاق: Basic Rules for Differentiation

نظرية (٣. ١. ٦): نفرض أن $u = u(x), v = v(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فى المتغير x ، ونفرض أن c مقدار ثابت:

(i) إذا كانت $y = c$ فإن: $\frac{d}{dx}c = 0$

(ii) إذا كانت $y = cu$ فإن: $\frac{dy}{dx} = c\frac{du}{dx}$

(iii) إذا كانت $y = u \pm v$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

(iv) إذا كانت $y = uv$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$

(v) إذا كانت $y = \frac{u}{v}, (v \neq 0)$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

نتائج (٣. ١. ٧):

(١) إذا كانت $y = u_1u_2...u_3$ حيث $u_1 = u_1(x), u_2 = u_2(x), ..., u_n = u_n(x)$ دوال قابلة للتفاضل . فإن

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{du_1}{dx}u_2...u_n + u_1\frac{du_2}{dx}u_3...u_n + ... + u_1u_2...u_{n-1}\frac{du_n}{dx}\\ &= u_1'u_2...u_n + u_1u_2'u_3...u_n + ... + u_1u_2...u_{n-1}u_n'\end{aligned}}$$

ويمكن برهان هذه النتيجة باستخدام الاستنتاج الرياضي.

(٢) من العلاقة (v) فى نظرية (٣. ١. ٦) ، بوضع $u = 1$ فإن $\frac{du}{dx} = 0$ وعليه فإن:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{-1}{v^2}\frac{dv}{dx} = \frac{-v'(x)}{v^2(x)}}$$

أمثلة (٣. ١. ٨):

(أ) أوجد المشتقة الأولى للدوال:

$$(i) \quad y = \tan x \quad ; \quad x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

الحل.

بما أن $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$، إذن من العلاقة (v) فى نظرية (٣. ١. ٦) يكون

$$y' = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

إذن $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$

$(ii)\ y = \cot x \quad ; \quad x \neq n\pi \ , n \in \mathbb{Z}$

الحل. بنفس طريقة المثال السابق نحصل على:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x}$$

$(iii)\ y = \sec x \quad ; \quad x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$

الحل.

بما أن $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. إذن باستخدام الفقرة (٢) من نتائج (٣. ١. ٧) فإن:

$$y' = \frac{-1}{\cos^2 x}\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\,\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \ \tan x$$

أى أن $\boxed{\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x}$.

$(iv)\ y = \csc x \quad ; \quad x \neq n\pi \ , n \in \mathbb{Z}$

الحل. بنفس طريقة المثال السابق نحصل على:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x}$$

مثال (٣. ١. ٩): إثبت أن مشتقة الدالة $f(x) = x^n$ حيث أن n عدد صحيح ولا يساوى الصفر هى nx^{n-1} ، أى أن

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \ ; n \in \mathbb{Z}, n \neq 0}$$

الحل.

سبق وأن برهنا صحة العلاقة فى مثال(iii) من أمثلة (٣. ١. ٣) عندما كانت n عددا طبيعيا. والآن نفرض أن n عدد صحيح سالب. بوضع $n = -m$ حيث $n \in \mathbb{N}$. إذن $f(x) = x^n = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$،

وعليه فإن

$$\frac{d}{dx}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{-1}{x^{2m}} m x^{-m-1} = (-m)x^{-m-1} = n x^{n-1}$$

في حقيقية الأمر العلاقة السابقة صحيحة لجميع قيم n الحقيقية.

أمثلة (٣. ١. ١٠): أوجد y' للدوال:

$(i) \quad y = x^2 \tan x + x \sin x$

الحل.

بما أن $y = x^2 \tan x + x \sin x$ ، إذن $y' = 2x \tan x + x^2 \sec^2 x + \sin x + x \cos x$.

$(ii) \quad y = \sqrt{x}(\tan x)(\sec x)$

الحل.

الدالة المعطاه هي عبارة عن حاصل ضرب ثلاث دوال ويكون إذن :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tan x \sec x + \sqrt{x} \sec^2 x \sec x + \sqrt{x} \tan x \sec x \tan x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \tan x \sec x + \sqrt{x} \sec^3 x + \sqrt{x} \tan^2 x \sec x = \frac{\sec x}{2\sqrt{x}}(\tan x + 2x(1 + 2\tan^2 x))$$

مثال (٣. ١. ١١): أوجد y' للدالة $y = x \tan x$ عند النقطة $x = \pi/2$.

الحل. مشتقة هذه الدالة عند $x = \pi/2$ غير موجودة لأن الدالة غير معرفة عند هذه النقطة.

مثال (٣. ١. ١٢):

عند النقطة $x = \pi$ أوجد y' للدالة $y = 5 + 4x \sin x + \cos x$.

الحل.

$$y' = 0 + 4\sin x + 4x \cos x - \sin x = 3\sin x + 4x\cos x$$

إذن $y'(\pi) = 3\sin\pi + 4\pi\cos\pi = (3)(0) + 4\pi(-1) = -4\pi$.

مشتقة تحصيل دالتين (قاعدة السلسلة): Chain Rule

نظرية (٣. ١. ١٣): إذا كانت $y = f(z)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة z_o وكانت الدالة $z = g(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة x_o (حيث $g(x_o) = z_o$) فإن الدالة y تكون قابلة للاشتقاق عند النقطة x_o ومشتقتها الأولى تعطى بالعلاقة: $(fog)'(x_o) = f'(z_o)g'(x_o)$ ، أي أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$.

أمثلة (٣. ١. ١٤): أوجد المشتقة الأولى للدوال:

$$(i)\ \ y=(f(x))^n\ ;\ n\in\mathbb{Z}, n\neq 0$$

الحل. بوضع $z=f(x)$. إذن $y=z^n$ ، وبــاستخدام النظرية السابقة لإيجاد مشتقة دالة الدالــة (قاعــدة السلسلة) نحصل على:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=nz^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)=n(f(x))^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$$

أى أن

$$\boxed{\frac{d}{dx}(f(x))^n=n(f(x))^{n-1}f'(x)}$$

$$(ii)\qquad y=\sqrt{4+x^2+3\sin x}$$

الحل. باستخدام مفهوم دالة الدالة . بوضع $z=4+x^2+3\sin x$ ، إذن $y=\sqrt{z}$ ويكون

$$\frac{dy}{dz}=\frac{1}{2\sqrt{z}}\ ;\ \frac{dz}{dx}=2x+3\cos x$$

وعليه فإن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{z}}(2x+3\cos x)=\frac{2x+3\cos x}{2\sqrt{4+x^2+3\sin x}}$$

$$(ii)\qquad y=\sin\sqrt{x^2+2}$$

الحل. بــاستخدام مفهوم دالة الدالة: بوضع $u=x^2+2$ ، $v=\sqrt{u}$. إذن $y=\sin v$ ، وعليه فإن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}=(\cos v)(\frac{1}{2\sqrt{u}})(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\cos\sqrt{x^2+2}$$

$$(iv)\ \ y=(x^2\tan x+\sqrt{x})^{12}$$

الحل. بــاستخدام مفهوم دالة الدالة: بوضع $z=x^2\tan x+\sqrt{x}$ ، فإن $y=z^{12}$. إذن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dz}=12z^{11}(2x\tan x+x^2\sec^2 x+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

وعليه فإن

$$\frac{dy}{dx}=12(x^2\tan x+\sqrt{x})^{11}(2x\tan x+x^2\sec^2 x+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$(v)\qquad y=\sin^5(\cos x)$$

الحل.

بــاستخدام مفهوم دالة الدالة نجد أنه بوضع $y=\cos x$ ، $v=\sin u$. إذن $y=v^5$ ، وعليه فــإن

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\frac{dv}{du}\frac{du}{dx}=5v^4(\cos u)(-\sin x)$$

إذن $y'=-5(\sin x)\cos(\cos x)\sin^4(\cos x)$.

ملاحظة (٣. ١. ١٥): بـــاستخدام مفهوم دالة الدالة يمكن تعميم القوانين السابقة لتصبح على النحو التالى:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)}=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)\ ;\ f(x)\neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n=n(f(x))^{n-1}f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\sin f(x)=(\cos f(x))\,f'(x);$$

$$\frac{d}{dx}\cos f(x)=(-\sin f(x))\,f'(x)$$

وهكذا بالنسبة لبقية القوانين.

أمثلة (٣. ١. ١٦): أوجد y' للدوال

$(i)\quad y=\sin\sqrt{x^2+3}$

الحل.

$$y'=(\cos\sqrt{x^2+3})\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\cos\sqrt{x^2+3}$$

$(ii)\quad y=\sin^4(\cos 5x)$

الحل.

$$y'=4\sin^3(\cos 5x)\cos(\cos 5x)(-5\sin 5x)=-20\sin 5x\cos(\cos 5x)\sin^4(\cos 5x)$$

$(iii)\quad y=(x+\sqrt{x})^9$

الحل. $$y'=9(x+\sqrt{x})^8(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$(iv)\quad y=x+\sqrt{1-x^2}\ \cos 2x$

الحل.

$$y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\cos 2x + \sqrt{1-x^2}(-2\sin 2x)$$

$$= 1 - \frac{x\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}} - 2\sqrt{1-x^2}\sin 2x$$

==

==

==