المحاضرة العاشرة

Higher derivatives المشـــتـقات العلـــيا

العناصر الأساسية في المحاضرة :

١- التفاضل المتتالى للدوال الصريحة.
٢- المشتقة النونية لدالة.
٣- المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين (نظرية ليبنتز).
٤- تطبيقات على المشتقة النونية.

بند ٢ : المشـــتـقات العلـــيا: Higher derivatives

التفاضل المتتالى للدوال الصريحة:

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فى نطاق معين وكانت المشتقة الأولى $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ دالة قابلة للاشتقاق أيضاً فإن الدالة الناتجة من اشتقاق المشتقة الأولي تسمي المعامل التفاضلى الثانى أو المشتقة الثانية ويرمز لها بـــ $f''(x) := \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$ أو بأحد الرموز التالية أيضاً:

$$f^{(2)}(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x),\ y'',\ D^2y,\ y^{(2)}$$

وهكذا يمكن تعريف المشتقة الثالثة والرابعة ..... والنونية بصفة عامة(في حالة وجودها) بالصيغة التالية:

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)\right),\quad n = 2,3,\ldots$$

كما يرمز للتــفاضـــلات من رتب أعلى بأحد الرموز التالية:

$$y^{(3)},\ y^{(4)},\ \ldots,\ y^{(n)} \quad \text{أو} \quad \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

ومن الرموز المستخدمة للتفاضل النونى أو المشتقة النونية للدالة هى:

$$y^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}, D^n y, \frac{d^n}{dx^n} f(x), f^{(n)}(x)$$

أمثلة (٣. ٢. ١): أوجد المشتقة الثانية للدوال الآتية:

(i) $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$

الحل. $y' = 3x^2 + 4x + 1 \quad , \quad y'' = 6x + 4$

(ii) $y = (4x+6)^{12}$

الحل. $y' = 12(4x+6)^{11}(4) = 48(4x+6)^{11}$;

$$y'' = (48)(11)(4x+6)^{10}(4) = 2112(4x+6)^{10}$$

المشتقة النونية للدوال: The n-th derivative of Functions

إيجاد المشتقة النونية غير متيسر لكثير من الدوال ، هناك بعض الدوال يمكن إيجاد المشتقة النونية لها بتكرار عملية التفاضل ويمكن استخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي فى إثبات صحة كل من النتائج التى سوف نحصل عليها. وطريقة الاستنتاج الرياضى تتلخص فى الآتى : إذا وجد تقرير $P(n)$ مصاحب لكل عدد طبيعى n، فإنه للبرهنة على صحة التقرير يكفى إثبات صحة التقرير عندما $n = 1$ ثم نثبت صحته عند $n = k+1$ وذلك بفرض صحته عند $n = k$.

وسوف يتضح ذلك من الأمثلة التالية.

أمثلة (٣. ٢. ٣):

أوجد المشتقة النونية لكل من الدوال التالية:

(i) $y = (ax+b)^r$ $\qquad$ (ii) $y = \sin(ax+b)$

(iii) $y = \cos(ax+b)$ $\qquad$ (iv) $y = \ln(ax+b)$

حيث a,b,r ثوابت حقيقية.

الحل.

(i) بما أن $y = (ax+b)^r$. إذن

$$y' = r(ax+b)^{r-1}a \quad , \quad y'' = r(r-1)(ax+b)^{r-2}a^2 \quad , \quad y''' = r(r-1)(r-2)(ax+b)^{r-3}a^3$$

الآن يمكن إستنتـــاج أن:

$$y^{(n)} = r(r-1)\ldots(r-n+1)(ax+b)^{r-n}a^n$$

ويمكن البرهنة على صحة هذه العلاقة باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي . إذن يكون

$$\boxed{y^{(n)} = D^n(ax+b)^r = r(r-1)\ldots(r-n+1)(ax+b)^{r-n}a^n}$$

حالات خاصة:

(أ) إذا كانت $b=0\ ,\ a=1\ ,\ r=n$ حيث $n\in\mathbb{N}$. إذن

$$D^n x^n = n(n-1)\ldots(n-n+1)\,a^{n-n} = n(n-1)\ldots 3.2.1 = n!$$

أى أن $\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ D^n x^n = n!$ ، ونجد أن $D^{n+m}x^n = 0\ ;\forall m=1,2,3,\ldots$

(ب) إذا كان $r=-1$. فإن

$$\boxed{\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = a^n(-1)(-2)(-3)\ldots(-1-n+1)(ax+b)^{-1-n} = \frac{(-1)^n\,n!}{(ax+b)^{n+1}}a^n\ \ldots\ (*)}$$

$$\boxed{\left((ax+b)^{-1}\right)^{(n)} = (-1)^n\,n!\,a^n\,(ax+b)^{-n-1}}$$

(ii) بما أن $y=\sin(ax+b)$. إذن

$$y' = a\cos(ax+b) = a\sin(ax+b+\frac{\pi}{2})$$

$$y'' = a^2\cos(ax+b+\frac{\pi}{2}) = a^2\sin(ax+b+2\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = a^3\cos(ax+b+2\frac{\pi}{2}) = a^3\sin(ax+b+3\frac{\pi}{2})$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$

$$y^{(n)} = a^n\cos(ax+b+\frac{(n-1)\pi}{2}) = a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$$

أى أن

$$\boxed{D^n\sin(ax+b) = a^n\sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})}$$

(iii) بنفس طريقة المسألة السابقة يمكن إثبات أن:

$$\boxed{D^n\cos(ax+b) = a^n\cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})}$$

(iv) حيث أن $y=\ln(ax+b)$ فبالتفاضل نجد أن $y'=\dfrac{a}{ax+b}$ ، وباستخدام العلاقة $(^*)$ السابقة وبالاشتقاق $n-1$ مرة نجد أن :

$$\boxed{\left(\ln(ax+b)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(ax+b)^n}a^n}$$

المشتقة النونية لحاصل ضرب دالتين (نظرية ليبنـــــــتز):

نظرية (٣. ٢. ٤): (نظرية ليبنـــــــتز) Leibniz theorem

إذا كانت $y = uv$ حيث $u = u(x)\ ,\ v = v(x)$ دالتين فى المتغير x قابلتين للإشتقاق m مرة ، فإن

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)}\, v^{(r)} \quad ، \quad 1 \le n \le m$$

أى أن

$$y^{(n)} = u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v^{(1)} + \ \ldots\ + \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)} + \ldots + u v^{(n)}$$

حيث

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ ,\ \binom{n}{1} = n\ ,\ \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\ ;\ v^{(0)} = v\,;\, v^{(r)} = \frac{d^r v}{dx^r}\ ; r = 1,2,3,\ldots$$

تطبيقات على نظرية ليبنـــــــتز:

أمثلة (٣. ٢. ٥):

(i) أوجد المعامل التفاضلى النونى للدالة $y = (x^2 + 1)\sin x$.

الحل.

بوضع $v = x^2 + 1\ ,\ u = \sin x$ ، فمن أمثلة (٣. ٢. ٣) نجد أن

$$u^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})\ ;\ v^{(1)} = 2x\ , v^{(2)} = 2\ , v^{(n)} = 0\ ,\ \forall n > 2$$

ويمكن اعتبار الدالة $y = (x^2 + 1)\sin x = uv$ حاصل ضرب دالتين ونستخدم نظرية ليبنتز

$$y^{(n)} = u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v^{(1)} + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v^{(2)} + \ldots + \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)} + \ldots + u v^{(n)}$$

إذن

$$y^{(n)} = (x^2 + 1)\sin(x + \frac{n\pi}{2}) + n(2x)\sin(x + \frac{(n-1)\pi}{2}) + \frac{n(n-1)}{2!}(2)\sin(x + \frac{(n-2)\pi}{2}).$$

أى أن

$$y^{(n)} = (x^2 + 1)\sin(x + \frac{n\pi}{2}) + 2nx\sin(x + \frac{(n-1)\pi}{2}) + n(n-1)\sin(x + \frac{(n-2)\pi}{2}).$$

وذلك لكل $n \geq 2$. أما في حالة $n = 1$ فيكون

$$y^{(1)} = (x^2 + 1)\cos x + 2x \sin x$$

(ii) أوجد المعامل التفاضلي النوني للدالة $y = x^3 \cos(2x)$.

<u>الحل.</u>

بوضع $v = x^3$, $u = \cos(2x)$ ، إذن يكون

$$v^{(1)} = 3x^2, v^{(2)} = 6x, v^{(3)} = 6, v^{(n)} = 0, \forall n > 3$$

وكذلك نجد أن $u^{(n)} = 2^n \cos(2x + \frac{n\pi}{2})$ ، وباستخدام قاعدة ليبنتز

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v^{(2)} + \ldots + \binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r)} + \ldots + uv^{(n)}$$

إذن يكون:

$$\begin{aligned} y^{(n)} = {} & 2^n x^3 \cos(2x + \frac{n\pi}{2}) + n2^{n-1}(3x^2)\cos(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}) \\ & + \frac{n(n-1)}{2!}2^{n-2}(6x)\cos(2x + \frac{(n-2)\pi}{2}) \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}2^{n-3}(6)\cos(2x + \frac{(n-3)\pi}{2}) \end{aligned}$$

وذلك لكل $n \geq 3$. أما في حالة $n = 2, n = 1$ فيكون

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= -2x^3 \sin 2x + 3x^2 \cos 2x, \\ y^{(2)} &= -4x^3 \cos 2x - 6x^2 \sin 2x - 6x^2 \sin 2x + 6x \cos 2x \\ &= (6x - 4x^3)\cos 2x - 12x^2 \sin 2x \end{aligned}$$

(iii) إذا كانت $y = \frac{3 + 2x^2}{2 + x}$ فأوجد $y^{(n)}(x)$ ثم احسب $y^{(n)}(0)$.

<u>الحل :</u>

واضح أن الدالة قابلة للتفاضل عدد لانهائى من المرات علي النطاق $\mathbb{R} - \{-2\}$ وبأخذ $u(x) = 3 + 2x^2$, $v(x) = (2 + x)^{-1}$ فيكون :

$$u^{(1)} = 4x, u^{(2)} = 4, u^{(n)} = 0, \forall n > 2$$

ومن العلاقة (3.3) يكون :

$$v^{(n)} = (-1)^n n!(2 + x)^{-n-1}$$

وباعتبار $y = vu$ كحاصل ضرب دالتين يمكن استخدام قاعدة ليبنتز

$$y^{(n)}=v^{(n)}u+\binom{n}{1}v^{(n-1)}u^{(1)}+\binom{n}{2}v^{(n-2)}u^{(2)}+\ldots+\binom{n}{r}v^{(n-r)}u^{(r)}+\ldots+vu^{(n)}$$

ويكون

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=(-1)^n n!(2+x)^{-n-1}(3+2x^2)\\&+n(-1)^{n-1}(n-1)!(2+x)^{-n}(4x)+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}(n-2)!(2+x)^{-n+1}(4).\end{aligned}$$

وذلك لكل $n\geq 2$. أما في حالة $n=1$ فيكون

$$y'=-(3+2x^2)(2+x)^{-2}+(4x)(2+x)^{-1}$$

وعندما $x=0$ نجد أن :

$$y'(0)=-(3)(2)^{-2}=-\frac{3}{4}$$

بينما

$$\begin{aligned}y^{(n)}(0)&=(-1)^n n!(2)^{-n-1}(3)+\frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}(n-2)!(2)^{-n+1}(4).\\&=\frac{3(-1)^n n!}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^{n-2}n!}{2^{n-2}}=\frac{(-1)^n(n!)}{2^{n+1}}[3+8]=\frac{11(-1)^n(n!)}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

وذلك لكل $n\geq 2$.

في هذا المثال يمكن ملاحظة أنه باستخدام القسمة المطولة يكون :

$$y=\frac{3+2x^2}{2+x}=2x-4+\frac{11}{x+2}=(2x-4)+11(x+2)^{-1}$$

ويمكن إيجاد المشتقة النونية بدون استخدام قاعدة ليبنتز

$$y^{(1)}=2+11(-1)(x+2)^{-2}$$

أما في حالة $n\geq 2$ فيكون

$$y^{(n)}=11(-1)^n n!(2+x)^{-n-1}.$$

ثم نحسب المشتقات عند $x=0$ بالتعويض المباشر ونحصل علي نفس الناتج السابق.

(iv) إذا كانت $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ ، فاثبت أن $(1-x^2)y''-xy'+m^2y=0$.

<u>**الحل.**</u> بما أن $y=\sin(m\sin^{-1}x)$. إذن $y'=\cos(m\sin^{-1}x)m\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، أي أن

$$\sqrt{1-x^2}\,y'=m\cos(m\sin^{-1}x)$$

بتفاضل العلاقة السابقة مرة واحدة بالنسبة إلى x . إذن

$$\sqrt{1-x^2}\,y''+\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}y'=-m\sin(m\sin^{-1}x)\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

أي أن
$$(1-x^2)y''-xy'=-m^2\sin(m\sin^{-1}x)$$

إذن
$$(1-x^2)\,y''-x\,y'+m^2\,y=0$$

(v) إذا كانت $y=3^k\sin^{-1}x$ ، فاثبت أن $(1-x^2)y''-xy'=0$. ومن ثم أثبت أن

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+1)}-n^2\,y^{(n)}=0$$

الحل. بما أن $y=3^k\sin^{-1}x$ ، إذن $y'=3^k\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، أي أن $\sqrt{1-x^2}\;y'=3^k$.

بالتفاضل مرة ثانية بالنسبة إلى x نحصل علي $\sqrt{1-x^2}\;y''+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\;y'=0$. إذن

$(1-x^2)y''-xy'=0$ ، وبالتفاضل n من المرات نحصل على:

$$(1-x^2)y^{(n+2)}+n(-2x)y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2!}(-2)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0$$

إذن
$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+1)}-n^2\,y^{(n)}=0$$

(vi) إذا كانت $y=(\sin^{-1}x)^2$ ، فاثبت أن $(1-x^2)\;y''-x\,y'=2$ ، ومن ثم إثبت أن

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)}-(2n+1)\,x\,y^{(n+1)}-n^2\,y^{(n)}=0$$

الحل. (تمرين)