تمارين عامة علي الباب الثالث والمحاضرة العاشرة

١- باستخدام التعريف الأولى (المبادىء الأولية) أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \cos^{-1} x$.

٢- إذا كانت $f(x) = x|x|$. أوجد كلاً من $f'_+(0)$ ، $f'_-(0)$ ، وهل $f'(0)$ موجودة؟ علل؟ ثم ابحث قابلية الدالة للاشتقاق علي المجموعة $\mathbb{R}^*$.

٣- كرر مسألة (٢) السابقة علي الدوال :

$(i)\ f(x) = x^2|x|$ $\qquad$ $(ii)\ f(x) = \sqrt{|x|}$

٤ - أوجد المعامل التفاضلى الأول للدوال الآتية:

$(i)\ \ y = \sin(-2x)\cos(10x)$ $\qquad$ $(ii)\ \ y = \dfrac{2x}{1-x^2}$ $\qquad$ $(iii)\ \ y = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$(iv)\ \ y = \sec^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ $\qquad$ $(v)\ \ y = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$(vi)\ \ y = \cos\left(5\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

٥ - أوجد مشتقة y بالنسبة إلى x فى كل من الصيغ التالية:

$(i)\ \ x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ $\qquad$ $(ii)\ \ x\sin y + y\cos x = (\tan x)y$

٦ - إذا كانت $y = t^2 + 2t^3$; $x = 2t + 3t^2$ ، فاثبت أن $y = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$.

٧ - أوجد معادلتى الخط المماس والخط العمودى للمنحنيات التالية:

(أ) $y = 2 + x - x^2$ عند النقطة $(1,2)$ ، (ب) $y^2 = 2px$ عند النقطة $(2p, 2p)$

٨- أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتيه:

$(i)\ y = x\sin^2 x$ $\qquad$ $(ii)\ \ y = \tan^{-1} x$

٩ – أوجد المشتقة النونية للدوال:

$(i)\quad y=(x^4+3x^2+1)\cos 5x \qquad (ii)\quad y=\sin 2x\cos 5x$

$(iii)\quad y=\dfrac{1}{x} \qquad (iv)\quad y=x^3\sin 3x$

١٠ – أوجد قيم جميع المشتقات التفاضلية عند نقطة الأصل للدوال التالية:

$(i)\quad y=\sin^{-1}x \qquad (ii)\quad y=\dfrac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

١١ – إذا كانت $y=(x^2-1)^n$ ، فاثبت أن $(x^2-1)y''-2(n-1)xy'-2ny=0$ ، ومن ثم إثبت أن :

$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y=0$$

١٢ – أوجد المشتقة النونية لكل من الدوال:

$(i)\ y=\sin^2 x \quad (ii)\ y=\cos^2 x \quad (iii)\ y=\dfrac{\sin x}{x}$

$(iv)\ y=\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x}} \quad (v)\ y=\dfrac{x^3+1}{2x+3}$

١٣ – أوجد المعامل التفاضلى الثالث إذا كانت $x^4+y^4=12$.

١٤ – إذا كانت $y=\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ ، فاثبت أن:

$$(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0\,,\ (n\geq 1)$$

١٥ – أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في الحالات الآتية :-

$(i)\quad y=\ln\left(\dfrac{3x^2+1}{x^2}\right)$

$(ii)\quad y=\tan^{-1}\left(\ln|x|\right)$

$(iii)\quad y=\dfrac{(3x+5)^{10}(x^2+3)^{40}}{(x^2+2)^3}$

$(iv)\quad y=(\sec x)^{\cot x}\ ,\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

$(v)\quad y=\log_5\sec x\ ,\ x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

$(vi)\quad y=a^{\sec x\ \tan x}\ ,\ a>o$

١٦- استخدم قاعدة ليبنتز في إيجاد المشتقة النونية للدالة

$$y = a^{\alpha x} \sin \beta x \quad , \quad \beta \in \mathbb{R} \quad , \quad a \in]0,\infty[$$

١٧- أوجد y' للدوال:

(v) $y = \ln \sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$ (vi) $y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

(vii) $y = x^{3} + \sin\left(e^{-x}\right)$ $(viii)$ $y = (2 + x^{3})^{\sin x^{3}}$

(ix) $y = 2^{x} x^{2}$

١٨- أوجد y' للدوال:

(i) $y = \ln\left(\sin 2x\right) + x^{\tan x}$ (ii) $y = x^{x^{x}}$

(iii) $y = (x^{x})^{x}$ (iv) $y = \ln \ln x$

(v) $y = 2x^{3} \cos x \sin 2x + \sin\left(e^{2x^{2}}\right)$ (vi) $y = e^{\cos^{3} x - \tan^{-1} x^{3}}$

(vii) $y = (\sin^{-1} 2x)^{x^{2}}$ $(viii)$ $y = (x \ln x) + \ln x^{2}$

(ix) $y = 10^{\sin 2x} + \cos 2x$

١٩- أوجد مشتقة y بالنسبة إلى x في كل من الصيغ التالية :

(i) $y = x + \sin e^{y}$ (ii) $y = \ln \ (\sin 2xy)$

(iii) $x = \ln(1 + t^{2})$, $y = \ln(\sin 2t)$

(iv) $x = e^{t} \sin^{3} t$, $y = e^{-t} \cos t$

(v) $x^{\ln y} + y^{\ln x} = xy$ (vi) $(\tan x)^{y} = (\tan y)^{x}$

٢٠- أوجد y' للدوال:

(1) $y = x^{\sin x} + 3x^{2} e^{-x}$ (2) $e^{xy} + \sqrt{xy} = 3x^{5}$

(3) $y = x^{\sin x^{2}} + 5 \sec^{-1}\left(5x\right)$ (4) $y = x^{\sin x^{2}} + 3x^{2}$

(5) $y = x \sin^{-1}(e^{-2x})$ (6) $y = \tan \sqrt{\sin(e^{2x} - 1)}$

(7) $y = \ln(1 + \cos^{2} x)$ (8) $y = \ln(x + \sqrt{x^{2} + 1})$

(9) $y = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (10) $y = 2^{x} 3^{-x} \sin^{-1} x$

٢١- أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية :

(i) $y = e^{x} + e^{-3x}$ (ii) $y = e^{x}\sin^{2}x$

(iii) $e^{x} + e^{y} = e^{x+y}$ (v) $y = \ln\ (x + \sqrt{x^{2}-9})$

٢٢- أوجد المشتقة النونية للدوال :

(i) $y = e^{4x}(x^{4} + 3x^{2} + 1)$ (ii) $y = (2x^{2} + 3x + 1)e^{-5x}$

(iii) $y = 2^{x}$ (iv) $y = (ax^{2} + bx + c)\ln x$

حيث a, b, c, k ثوابت.

٢٣- إذا كانت $y = a\cos(\ln x) + b\sin(\ln x)$ ، حيث $a,b \in \mathbb{R}$. فاثبت أن

$$x^{2}y'' + xy' + y = 0$$

==========

==========

==========