الفصل الثاني

تحصيل القوى المتلاقية في نقطة

محصلة قوتين:

المقصود بمحصلة مجموعة من القوى، هي القوة التي تعمل عمل المجموعة، أي يكون لها نفس تأثير المجموعة.

تعيين مقدار محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة:

إذا كان $\overleftarrow{ح}$ هو محصلة القوتين المتلاقيتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تحصران بينهما زاوية قياسها ى، فإن خط عمل المحصلة يمر بنقطة تلاقي القوتين، ومقدارها يتعين بالعلاقة:

$$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى .$$

تذكر أن
إيجاد قوة ما
يقصد به تعيين:
١ – نقطة تأثيرها.
٢ – اتجاهها.
٣- مقدارها.

تعيين اتجاه محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة:

إذا كان $\overleftarrow{ح}$ يصنع مع $\overleftarrow{ق_1}$ زاوية قياسها $هـ_1$، فإن:

$$\text{ظا } هـ_1 = \frac{ق_2 \text{ جا } ى}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا } ى} ، \text{ ظا } هـ_2 = \frac{ق_1 \text{ جا } ى}{ق_2 + ق_1 \text{ جتا } ى}$$

لا تنسى: المحصلة تصنع مع القوة الأكبر في المقدار زاوية أصغر في القياس.

أمثلة:

(١) قوتان مقدارهما ١٠، ١٦ نيوتن تؤثران في نقطة مادية، فإذا كان قياس الزاوية بينهما ١٢٠°، أوجد محصلة القوتين.

(٢) قوتان مقدارهما ٩، ٩√٣ نيوتن تؤثران في نقطة مادية، فإذا كان مقدار محصلتهما يساوي ١٨ نيوتن، فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين، وعين اتجاه المحصلة.

(٣) قوتان مقدارهما ٢٥٠، ٥٠٠ ث.جم تؤثران في نقطة، فإذا كان مقدار المحصلة يساوي ٧٥٠ ث.جم، أوجد قياس الزاوية بين القوتين، وعين اتجاه المحصلة.

❊ (٤) قوتان مقدارهما ٥، ٦ ث.كجم تؤثران في نفس النقطة، فإذا علمت أن اتجاه محصلة القوتين يقسم الزاوية بين اتجاهيهما إلى زاويتين النسبة بين قياسيهما كالنسبة ١ : ٢، أوجد قياس الزاوية بين القوتين، ومقدار محصلتهما. (جتا$^{-١}$ $\frac{-١١٧}{١٢٥}$، $\frac{١١}{٥}$)

ملاحظة :

إذا كان اتجاه المحصلة عموديًّا على اتجاه القوة الأولى، أي أن هـ$_١$ = ٩٠°، فإن:

١) ظا هـ$_١$ = غير معرّف، أي أن و$_١$ + و$_٢$ جتا ى = ٠ ⟸ جتا ى = $\frac{-و_١}{و_٢}$.

٢) الزاوية بين القوتين منفرجة.

٣) و$_١$ < و$_٢$

٤) ح^٢ = و$_٢^٢$ − و$_١^٢$ أو و$_٢^٢$ = ح^٢ + و$_١^٢$

وإذا كان اتجاه المحصلة عموديًّا على اتجاه القوة الثانية، ..... أكمل

(٥) قوتان مقدارهما ٨ ، و نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى، أوجد قيمة و.

(٦) قوتان مقدارهما ١٢ ، و نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الثانية، أوجد قيمة و.

(٧) قوتان مقدارهما ٤ ، ٨ ث.كجم تؤثران في نقطة مادية، فإذا كان اتجاه محصلتهما عموديًّا على اتجاه إحداهما، أوجد مقدار المحصلة وقياس الزاوية بين القوتين.

لا تنسى .... إذا تعامد اتجاه المحصلة مع اتجاه إحدى القوتين فإنه يتعامد مع اتجاه القوة الصغرى.

حالات خاصة:

[١] القوتان في اتجاه واحد (متحدتا الاتجاه):

١) قياس الزاوية بين اتجاهيهما (صفرًا)، $ى = ٠$

٢) $ح = ث_١ + ث_٢$

٣) اتجاه المحصلة هو نفس اتجاه القوتين.

٤) يقال للمحصلة في هذه الحالة بأنها أكبر محصلة، أو أكبر ما يمكن، أو نهاية عظمى.

[٢] القوتان متضادتان في الاتجاه:

١) الزاوية بين اتجاهيهما مستقيمة، $ى = ١٨٠^\circ$

٢) $ح = |ث_١ - ث_٢|$، مقدار المحصلة يساوي الفرق المطلق بين مقداري القوتين.

٣) اتجاه المحصلة هو نفس اتجاه القوة الكبرى.

٤) يقال للمحصلة في هذه الحالة بأنها أصغر محصلة، أو أصغر ما يمكن، أو نهاية صغرى.

[٣] القوتان متساوتان في المقدار:

١) $ث_١ = ث_٢ = ث$

٢) اتجاه المحصلة ينصف الزاوية بين القوتين، $هـ_١ = هـ_٢ = \frac{ى}{٢}$.

٣) $ح = ٢ ث جتا \frac{ى}{٢}$.

٤) إذا كان $ى = ١٢٠^\circ$، فإن $ح = ث$ وبالعكس.

[٤] القوتان متعامدتان:

١) $ى = ٩٠^\circ$

٢) $ح^٢ = ث_١^٢ + ث_٢^٢$.

٣) اتجاه المحصلة يتعين بالعلاقة: $ظا هـ_١ = \frac{ث_٢}{ث_١}$، أو $ظا هـ_٢ = \frac{ث_١}{ث_٢}$

أمثلة وتمارين:

(١) إذا علمت أن النهايتين العظمى والصغرى لمحصلة قوتين تؤثران في نقطة مادية هما على الترتيب ٢١، ١٣ **ث.كجم**، أوجد مقدار كل منهما.

(٢) قوتان مقدارهما ١٥، ٢٥ **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية، وقياس الزاوية بين اتجاهيهما ٦٠°، أوجد محصلتهما.

(٣) قوتان مقدارهما ق، ق$\sqrt{٣}$ **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية، فإذا كان مقدار محصلتهما يساوي ٢ ق **نيوتن**، فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(٤) أوجد محصلة قوتين متلاقيتين مقدار كل منهما ١٠ **ث.كجم** وقياس الزاوية بين اتجاه إحداهما واتجاه المحصلة يساوي ٦٠°.

(٥) قوتان متعامدتان مقدارهما ٨، ١٥ **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية، أوجد محصلتهما.

(٦) قوتان متلاقيتان مقدارهما ٧٠٠، ٢٤٠٠ **داين**، أوجد قياس ازاوية بين اتجاهيهما إذا كان مقدار محصلتهما ٢٥٠٠ **داين**.

(٧) قوتان مقدارهما ق ، ٢ق **ث.كجم** تؤثران في نقطة ومحصلتها عمودية على القوة الأولى، أوجد قياس الزاوية بينهما ومقدار المحصلة.

(٨) قوتان مقدارهما ٤، ق **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية وبينهما زاوية قياسها ١٣٥°، أوجد قيمة ق ومقدار محصلة القوتين إذا علمت أن اتجاه المحصلة يصنع مع اتجاه القوة الأولى زاوية قياسها ٤٥°.

(٩) قوتان إذا كانتا متعامدتين كان مقدار محصلتهما ٥ **نيوتن**، وإذا كانتا تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° كان مقدار محصلتهما $\sqrt{١٣}$ **نيوتن**، أوجد مقدار كل من القوتين.

(١٠) قوتان مقدار كل منهما ٧ **ث.كجم** بينهما زاوية قياسها ١٤٠° ، أوجد محصلتهما.

(١١) قوتان مقدارهما ٤، ٨ **نيوتن** تؤثران في نقطه ، فإذا كان مقدار محصلتهما $٤\sqrt{٣}$ **نيوتن**، فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(١٢) قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ **ث.كجم** تؤثران في نقطة مادية، فإذا كان مقدار محصلتهما ١٣ **ث.كجم**، فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(١٣) قوتان مقدارهما **ق**، ٣ **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بين اتجاهيهما ١٢٠° ، أوجد **ق** في كل من الحالتين:

أولاً: مقدار المحصلة = **ق**. ثانيًا: اتجاه المحصلة عموديًّا على اتجاه القوة الأولى.

(١٤) قوتان مقدارهما ٣، $٣\sqrt{٢}$ **ث.كجم** تؤثران في نقطة مادية، وقياس الزاوية بينهما ٤٥° ، أوجد محصلتهما.

(١٥) قوتان مقدارهما ٢٠ ، ١٠ **ث.كجم** تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، أوجد محصلتهما.

(١٦) قوتان مقدارهما ١٠، $١٠\sqrt{٣}$ **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية، فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ **نيوتن**، أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(١٧) قوتان مقدارهما ٤، **ق نيوتن** تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى، أوجد قيمة **ق**.

(١٨) قوتان مقدارهما ٨، ٨√٣ **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠°، أوجد محصلتهما.

(١٩) قوتان مقدارهما ١، ٢ **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية، فإذا كان مقدار محصلتهما يساوي √٣ **نيوتن**، فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(٢٠) قوتان مقدارهما ٨٠ ، ١٦٠ **ث.جم** تؤثران في نقطة مادية، أوجد قياس الزاوية بينهما، علمًا بأن محصلتهما عمودية على القوة الأولى.

(٢١) قوتان مقدارهما ٨، ق **نيوتن** تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°، فإذا كانت مقدار محصلتهما ق√٣ **نيوتن**، أوجد قيمة ق.

(٢٢) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨، ١٠، ١٢ **نيوتن** تؤثر في نقطه ماديه، فإذا كانت القوى الثلاث متزنة، فكم يكون قياس الزاوية بين القوتين الأخيرتين؟

(٢٣) قوتان مقدارهما ٢ق، ق **ث.كجم** تؤثران في نقطة مادية، وإذا ضُوعف مقدار القوة الأولى وزيد مقدار الثانية ١٥ **ث.كجم**، فإن اتجاه المحصلة لا يتغير، أوجد ق.

(٢٤) $\overleftarrow{ق_1}$، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتان تؤثران في نقطة مادية ومقدار محصلتهما ح من وحدات القوى، وإذا عُكس اتجاه $\overleftarrow{ق_2}$ فإن مقدار محصلتهما يصبح ح√٣ من وحدات القوى وفي اتجاه عمودي على اتجاه المحصلة الأولى، أثبت أن: $ق_1 = ق_2 = ح$، ثم أوجد قياس الزاوية بين اتجاهي $\overleftarrow{ق_1}$، $\overleftarrow{ق_2}$.

محصلة عدة قوى متلاقية في نقطة :

* تعتمد على تحليل كل قوة إلى مركبتين في اتجاهين متعامدين.
* اختيار اتجاهين متعامدين مناسبين. * نفرض $\overleftarrow{س}$ ⊥ $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة
* التعبير عن كل قوة في الصورة القطبية $\overleftarrow{ق}_ر$=(و$_ر$، هـ$_ر$)، ويكون:

س = المجموع الجبري للقياسات الجبرية لمركبات القوى في اتجاه $\overleftarrow{س}$.

= و$_1$ جتا هـ$_1$ + و$_2$ جتا هـ$_2$ + ... + و$_ر$ جتا هـ$_ر$ = ح جتا هـ

، ص = المجموع الجبري للقياسات الجبرية لمركبات القوى في اتجاه $\overleftarrow{ص}$.

= و$_1$ جا هـ$_1$ + و$_2$ جا هـ$_2$ + ... + و$_ر$ جا هـ$_ر$ = ح جا هـ

∴ ح^2 = س^2 + ص^2 ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ حيث: $\overleftarrow{ح}$ = (ح، هـ).

تعيين اتجاه المحصلة:

م	س	ص	الربع	هـ
١	+	+	الأول	الحادة
٢	–	+	الثاني	١٨٠° – الحادة
٣	–	–	الثالث	١٨٠° + الحادة
٤	+	–	الرابع	٣٦٠° – الحادة

الحالات الخاصة:

م	س	ص	الاتجاه	هـ	ح
١	+	٠	$\overleftarrow{وس}$	٠	س
٢	–	٠	$\overleftarrow{وس}$	١٨٠°	–س
٣	٠	+	$\overleftarrow{وص}$	٩٠°	ص
٤	٠	–	$\overleftarrow{وص}$	٢٧٠°	–ص

أمثلة:

(١) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٤، ٨√٣ ، ١٢ **نيوتن** تؤثر في نقطة مادية، الأولى في اتجاه يصنع ٣٠° شمال الشرق، والثانية في اتجاه ٦٠° شمال الغرب، والثالثة في اتجاه الجنوب، أثبت أن مقدار محصلة المجموعة يساوي ٤ **نيوتن** في اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

(٢) أربع قوى مستوية مقاديرها ٩٠، ٤٠، ٦٠√٣ ، ٥٠√٣ **نيوتن** تؤثر في نقطة مادية، الأولى في اتجاه الشرق، والثانية تصنع مع اتجاه الأولى زاوية قياسها ٦٠° والثالثة تصنع مع اتجاه الثانية زاوية قياسها ٩٠° ، والرابعة نحو الجنوب، أوجد محصلة المجموعة.

(٣) قوى مستوية مقاديرها ١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٦٠ ث.**كجم** تؤثر في نقطة، فإذا كان قياس الزاوية بين اتجاه كل قوتين متتاليتين ٦٠° ، أوجد محصلة المجموعة.

(٤) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٤، ١٢، ١٦ ث.**كجم** تؤثر في نقطة و ، الأولى في اتجاه الشرق، والثانية في اتجاه ٣٠° غرب الشمال، والثالثة في اتجاه ٦٠° جنوب الغرب، كما أثرت قوة رابعة $\overleftarrow{وق}$ في النقطة و وفي اتجاه الشرق، فإذا علمت أن مقدار محصلة القوى الأربع يساوي ٤ ث.**كجم**، فأوجد مقدار ق واتجاه المحصلة.

(٥) أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع، م نقطة تقاطع متوسطاته، أثرت قوى مقاديرها ٤، ٤، ٨ **نيوتن** في $\overleftarrow{مب}$ ، $\overleftarrow{مج}$ ، $\overleftarrow{مأ}$ على الترتيب، أوجد محصلة المجموعة.

(٦) أ ب ج ء مربع، أثرت قوى مقاديرها ١٠، ٢٠√٢ ، ٢٥ **نيوتن** في الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أج}$ ، $\overleftarrow{أء}$ على الترتيب، أوجد المحصلة.

(٧) القوى المستوية ٥٠، ١٠√٣ ، ٤٠، ٩٠، ٣٠√٣ تؤثر في نقطة مادية، وكان قياس الزاوية بين اتجاهي الأولى والثانية ٣٠° ، و بين اتجاهي الثانية والثالثة ٣٠° ، و بين اتجاهي الثالثة والرابعة ٦٠° ، و بين اتجاهي الرابعة والخامسة ١٥٠° ، أوجد محصلة المجموعة.

(٨) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٣ سم، ب جـ = ٤ سم، أ جـ = ٥ سم، أثرت في النقطة ب قوى مقاديرها ١٢، ١٦، ٢٠ نيوتن في الاتجاهات $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$، $\overleftarrow{أ جـ}$ على الترتيب، أوجد محصلة المجموعة.

(٩) أ ب جـ ء هـ و سداسي منتظم أثرت في ء قوى مقاديرها ٣، $٢\sqrt{٣}$ ، ٤، $٣\sqrt{٣}$ ، ٢ نيوتن في الاتجاهات $\overleftarrow{ء جـ}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{ء و}$ ، $\overleftarrow{ء هـ}$ على الترتيب، أوجد محصلة المجموعة.

(١٠) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أ ب}$ // $\overline{جـ ء}$ ، أ ب = $\frac{١}{٢}$ جـ ء، فإذا كانت ن نقطة في المستوى أثرت فيها أربع قوى ممثلة تمثيلاً تامًّا بالمتجهات $\overleftarrow{ن أ}$ ، $\overleftarrow{ب ن}$، $\overleftarrow{ء ن}$ ، $\overleftarrow{ن جـ}$، أوجد محصلتها.

تمارين:

(١) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ١، ٢، $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر في نقطة م في الاتجاهات $\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م جـ}$ على الترتيب، فإذا كان ق(∠أ م ب) = ٦٠°، ق(∠أ م جـ) = ٩٠°، أوجد المحصلة.

(٢) ثلاث قوى مستوية ومتساوية في المقدار تؤثر في نقطة مادية، وكان خط عمل القوة الثانية يصنع مع اتجاهي القوتين الأخيرتين زاويتين قياسيهما ٦٠°، أوجد المحصلة.

(٣) تؤثر قوى مستوية مقاديرها ٥، ١٠، $١٥\sqrt{٣}$ ، ٢٠ نيوتن في نقطة مادية، وكان قياس الزاوية بين اتجاهي القوتين الأولى والثانية ٦٠°، وبين اتجاهي الثانية والثالثة ٩٠°، وبين اتجاهي الثالثة والرابعة ١٥٠°، أوجد المحصلة.

(٤) أ ب جـ ء هـ و سداسي منتظم أثرت في ء قوى مقاديرها ٤، $٢\sqrt{٣}$ ، ١٠، $٢\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم في الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ على الترتيب، أوجد محصلة المجموعة.

(٥) تؤثر القوى المستوية التي مقاديرها ١، ٢، ٣√٣ ، ٤ **نيوتن** في نقطة مادية، وكان قياس الزاوية بين اتجاهي القوتين الأولى الثانية ٦٠°، وبين اتجاهي الثانية والثالثة ٩٠°، وبين اتجاهي الثالثة والرابعة ١٥٠°، أوجد المحصلة.

(٦) أثرت قوى مستوية مقاديرها ١٤، ٢√٣ ، ٦، ١٠ **نيوتن** في نقطة مادية في الاتجاهات ٦٠° شرق الشمال، ٦٠° شمال الغرب، ٦٠° غرب الجنوب، الجنوب على الترتيب، أوجد المحصلة.

(٧) أثرت القوى التي مقاديرها ٦، ن، ٦√٢ ، ك **ثقل جرام** في نقطة مادية، في اتجاهات الشرق، ٣٠° شمال الشرق، الشمال الغربي، والجنوب على الترتيب، فإذا كان مقدار المحصلة ٢ **ثقل جرام** وتعمل في اتجاه ٦٠° شرق الشمال، فأوجد قيمة ن، ك.

(٨) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٦ **سم**، ب جـ = ٨ **سم**، أُخذت النقطة هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث ب هـ = ٦ **سم**، أثرت قوى مقاديرها ١، ١٠، ٥√٢ ، ٣ **نيوتن** في $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ على الترتيب، أوجد المحصلة.

(٩) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢ **سم**، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب هـ = ٥ **سم**، أثرت قوى مقاديرها ٢، ١٣، ٤√٢ ، ٩ **نيوتن** في $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب، أوجد المحصلة.

(١٠) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨ **سم**، ب جـ = ٤ **سم**، هـ ∈ $\overline{ء جـ}$ بحيث ء هـ = ٣ **سم**، أثرت قوى مقاديرها ن، ٦√٥ ، ك، ٢ ث.كجم في $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب، فإذا كانت هذه المجموعة متزنة، فأوجد قيمتي ن، ك.