ثانياً: **الضرب الإتجاهى**

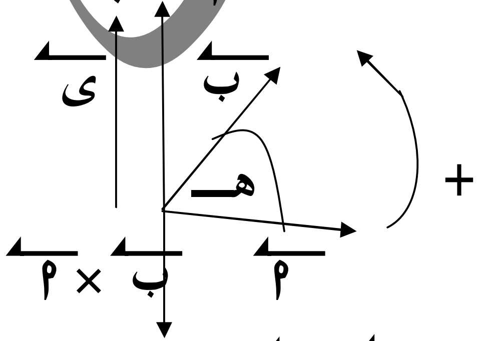
تعريف:

اذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين ، هـــ قياس الزاوية بينهما عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة فإن الضرب الإتجاهى للمتجهين يرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ ويعرف كا لآتى

$$\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ ب جا هـ})\, \overleftarrow{\text{ى}}$$

حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على مستوى المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$

ويتحدد اتجاهه بقاعدة اليد اليمنى أو اتجاه دوران عقارب الساعة



اذا كان اتجاه دوران $\overleftarrow{\text{أ}}$ نحو $\overleftarrow{\text{ب}}$ عبر الزاوية الصغرى ضد اتجاه دوران عقارب الساعة نعتبر $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ موجباً والعكس بالعكس

ملحوظات هامة

١- $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = -\, \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}}$

٢- اذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \parallel \overleftarrow{\text{ب}}$ فإن

$\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{0}$

٣- $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{0}$

$\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{أ}} = \|\overleftarrow{\text{أ}}\|^2$

نظرية:أولاً:

لأى متجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ فإن $(\text{م}\,\overleftarrow{\text{أ}}) \times \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times (\text{م}\,\overleftarrow{\text{ب}}) = \text{م}(\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}})$

حيث م كمية قياسية

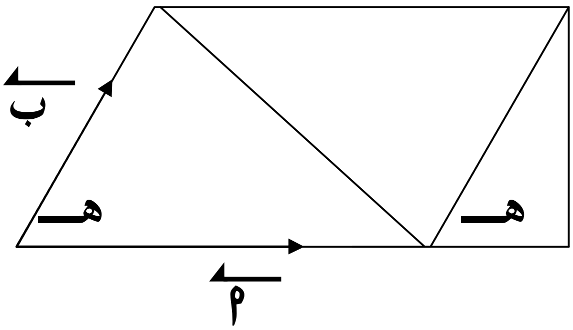
ثانياً: لأى ثلاث متجهات $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}}$ فإن

$$(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \times \overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ج}} + \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{ج}}$$

معيار الضرب الإتجاهى

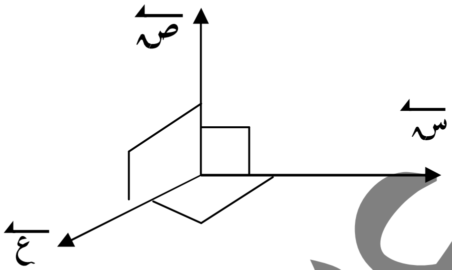
$\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|$ = أ ب جا هـ = مساحة متوازى الأضلاع المقام على القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين للمتجهين $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ كضلعين متجاورين فيه

حاول اثبات ذلك



$\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|$ = ٢ مساحة المثلث المقام على هاتين القطعتين كضلعين فيه

المجموعة اليمينية لمتجهات الوحدة



$\{\vec{\text{س}} ، \vec{\text{ص}} ، \vec{\text{ع}}\}$

$\vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ع}}$ متجهات متعامدة مثنى مثنى

ومعيار كل منها يساوى الوحدة

$\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}}$

$\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{\text{س}}$

$\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}}$

$\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{س}} = -\vec{\text{ع}}$ وهكذا

ملاحظات: ١- $\vec{\text{س}} \odot \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ص}} \odot \vec{\text{ع}} = \vec{\text{ع}} \odot \vec{\text{س}} = ٠$

٢- $\vec{\text{س}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{٠}$

٣- اذا كان $\vec{\text{أ}} = \text{أ}_1 \vec{\text{س}} + \text{أ}_2 \vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ب}} = \text{ب}_1 \vec{\text{س}} + \text{ب}_2 \vec{\text{ص}}$ فإن

$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\text{أ}_1 \text{ب}_2 - \text{أ}_2 \text{ب}_1)\vec{\text{ع}}$

مثال محلول: اذا كان $\vec{\text{أ}} = ٢\vec{\text{س}} + ٣\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ب}} = \vec{\text{س}} + ٤\vec{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{جـ}} = ٣\vec{\text{س}} - ٢\vec{\text{ص}}$ فاوجد

١- $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$ ٢- $\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{جـ}}$ ٣- $(\vec{\text{أ}} + \vec{\text{ب}}) \times \vec{\text{جـ}}$ ٤- $(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) \times \vec{\text{جـ}}$

٥- $(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) \odot \vec{\text{جـ}}$

الحل

١- $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (٨ - ٣)\vec{\text{ع}} = ٥\vec{\text{ع}}$ ٢- $\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{جـ}} = (-٢ - ١٢)\vec{\text{ع}} = -١٤\vec{\text{ع}}$

٣- $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \times \overrightarrow{\text{ج}} = (\overrightarrow{\text{٣س}} + \overrightarrow{\text{٧ص}}) \times (\overrightarrow{\text{٣س}} - \overrightarrow{\text{٢ص}}) = (-٦ - ٢١)\,\overrightarrow{\text{ع}} = -٢٧\,\overrightarrow{\text{ع}}$

٤- $(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \times \overrightarrow{\text{ج}} = ٥\overrightarrow{\text{ع}} \times (٣\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}}) = ١٥\,\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{س}} - ١٠\,\overrightarrow{\text{ع}} \times \overrightarrow{\text{ص}}$

$= ١٥\overrightarrow{\text{ص}} - ١٠\,(-\overrightarrow{\text{س}}) = ١٠\,\overrightarrow{\text{س}} + ١٥\overrightarrow{\text{ص}}$

٥- $(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \odot \overrightarrow{\text{ج}} = ٥\,\overrightarrow{\text{ع}} \odot (٣\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}}) = ١٥\,\overrightarrow{\text{ع}} \odot \overrightarrow{\text{س}} - ١٠\,\overrightarrow{\text{ع}} \odot \overrightarrow{\text{ص}} = ٠$

مثال: اذا كانت أ = (−٥ ، ٤) ، ب = (٢ ، ٣) ، ج = (٦ ، ٧) فاوجد $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أج}}$ ثم استنتج مساحة المثلث أ ب ج

الحل

$\overrightarrow{\text{أب}} = \text{ب} - \text{أ} = (٧ ، -١) = ٧\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{أج}} = \text{ج} - \text{أ} = (١١ ، ٣) = ١١\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أج}} = (٢١ + ١١)\,\overrightarrow{\text{ع}} = ٣٢\,\overrightarrow{\text{ع}}$

مساحة المثلث أ ب ج = $\frac{١}{٢} \| \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أج}} \| = \frac{٣٢}{٢}$ وحدة مساحة

تمارين

١- اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}}$ فاوجد

١- $(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \times \overrightarrow{\text{ج}}$ ٢- $(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \odot \overrightarrow{\text{ج}}$ ٣- $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}})$

٢- اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٦\overrightarrow{\text{س}} + ٥\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ فاثبت أن

أولاً: $\| \overrightarrow{\text{ب}} + (٣\overrightarrow{\text{أ}} \odot ٢\overrightarrow{\text{ج}})\,\overrightarrow{\text{أ}} \| = ٢٥$

ثانياً: $\overrightarrow{\text{ب}} \times \{ -\overrightarrow{\text{ج}} + \overrightarrow{\text{س}} + (\overrightarrow{\text{ب}} \odot -٢\overrightarrow{\text{أ}})\,\overrightarrow{\text{ج}} \} = -٢٢\,\overrightarrow{\text{ع}}$

٣- اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين ، $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{م}}$ فاوجد $(\overrightarrow{\text{أ}} + ٢\overrightarrow{\text{ب}}) \times (٣\overrightarrow{\text{أ}} - ٢\overrightarrow{\text{ب}})$ بدلالة $\overrightarrow{\text{م}}$ الجواب [$-٨\,\overrightarrow{\text{م}}$]

٤- اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ فاوجد المتجه $\overrightarrow{\text{ج}}$ الذى يعمل في مستوى المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، يحقق $\overrightarrow{\text{ج}} \perp \overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = -١٤\,\overrightarrow{\text{ع}}$

الجواب $\overrightarrow{\text{ج}} = -٦\overrightarrow{\text{س}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ص}}$

٥- اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين ، قياس الزاوية بينهما هـ عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة فاثبت أن

أولاً: $\| (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) \times (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \| = ٢$ أ ب جا هـ

ثانياً: $\| \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} \|^{٢} + \| \overrightarrow{\text{أ}} \odot \overrightarrow{\text{ب}} \|^{٢} = \text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٢}$

٦- اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{٠}}$ فاثبت أن $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ج}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

٧- أ ب ج مثلث ، م نقطة داخلة ، اثبت أن $\overrightarrow{\text{م أ}} \times \overrightarrow{\text{م ب}} + \overrightarrow{\text{م ب}} \times \overrightarrow{\text{م ج}} + \overrightarrow{\text{م ج}} \times \overrightarrow{\text{م أ}} = \overrightarrow{\text{أ ب}} \times \overrightarrow{\text{أ ج}}$

٨ – اذا كانت $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ ثلاث متجهات وحدة بحيث كان قياس الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يساوى قياس الزاوية بين المتجهين $(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ ، $\overrightarrow{\text{ج}}$ يساوى هـ فاثبت أن $(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \odot \overrightarrow{\text{ج}} = \frac{١}{٢}$ جا ٢هـ