المتجهات

تعريف : القطعة المستقيمة الموجهة (المتجه)

هى قطعة مستقيمة لها

١- نقطة بداية ٢- نقطة نهاية ٣-اتجاه من نقطة البداية الى نقطة النهاية

*** اذا كانت القطعة لهانقطة البداية ب ، نقطة النهاية جـ فاننا نعبر عنها رمزياً بالصيغة $\overleftarrow{ب جـ}$ *****

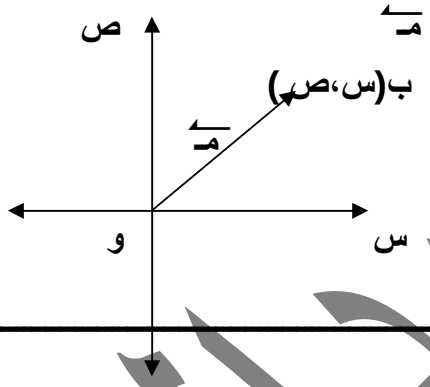
ملحوظة هامة: $\overleftarrow{ب جـ} = -\overleftarrow{جـ ب}$

تعريف: متجه الموضع

اذا كانت ب نقطة فى المستوى ، و نقطة الأصل فى النظام الإحداثى المتعامد فإن المتجه $\overleftarrow{وب}$ يسمى متجه الموضع للنقطة ب ويمكن التعبير عنه بالرمز $\overleftarrow{ب}$ أو $\overleftarrow{م}$

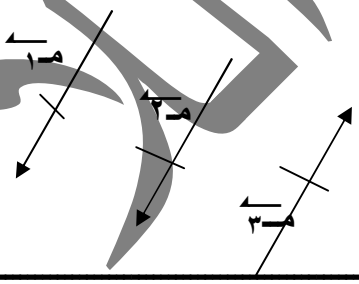
** اذا كانت ب = (س ، ص) فإن $\overleftarrow{وب}$ =(س ، ص) ب(س،ص)

المتجه الصفرى $\overleftarrow{و}$ = $\overleftarrow{٠}$ = (٠ ، ٠)



تكافؤ متجهين : يقال لمتجهين أنهما متكافئان اذا كان لهما نفس الطول ولهما نفس الإتجاه

$\overleftarrow{م_١} = \overleftarrow{م_٢} = -\overleftarrow{م_٣}$

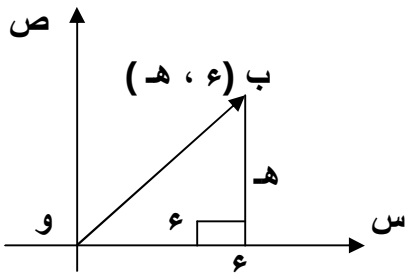


معيار المتجه (طوله) :

يعبر عن معيار المتجه $\overleftarrow{م}$ بالرمز $||\overleftarrow{م}||$ ، معيار المتجه $\overleftarrow{ب جـ}$ بالرمز ب جـ = $||\overleftarrow{ب جـ}||$

اذا كان المتجه $\overleftarrow{م}$ = (ء ، هـ) فإن معياره = $\sqrt{ء^٢ + هـ^٢}$

حيث و ب = $||\overleftarrow{وب}||$



PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

متجه الوحدة: هو متجه معياره يساوى الوحدة

متجه الوحدة فى اتجاه المتجه مـ←

يرمز لمتجه الوحدة فى اتجاه المتجه مـ← بالرمز مـ←* حيث مـ←* = $\frac{\overleftarrow{م}}{||\overleftarrow{م}||}$

متجها الوحدة الأساسيين : سـ← ، صـ←

هما متجها الوحدة فى اتجاهى وس← ، و ص←

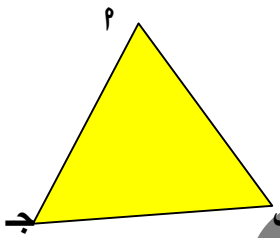
سـ← = (١ ، ٠) ، صـ← = (٠ ، ١)

جمع وطرح المتجهات

قاعدة المثلث :

أ ب← + ب جـ← = أ جـ←

أ جـ← − أ ب← = ب جـ←

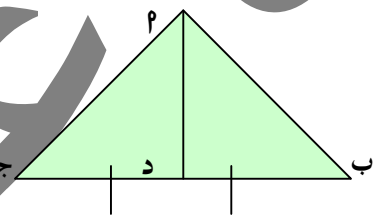


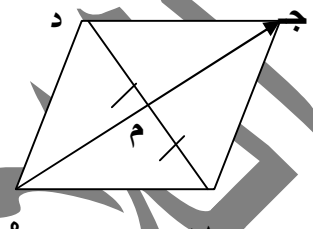
تمرين مشهور

فى المثلث أ ب جـ

اذا كانت ء منتصف ب جـ

أ ب← + أ جـ← = ٢ أ د← ، ب أ← + جـ أ← = ٢ د أ←





قاعدة متوازى الأضلاع:

أ ب← + أ د← = أ جـ← = ٢ أ م← = ٢ م جـ←

ب أ← + د أ← = جـ أ← = ٢ م أ← = ٢ جـ م←

تابع جمع المتجهات

١- اذا كان المتجه ب← = (ب١ ، ب٢) ، المتجه جـ← = (جـ١ ، جـ٢) فإن

ب← + جـ← = (ب١ + جـ١ ، ب٢ + جـ٢)

٢- اذا كان ب = (س١ ، ص ١) ، جـ = (س٢ ، ص٢) فإن المتجه

ب جـ← = جـ − ب = (س٢ − س١ ، ص٢ − ص١)

٣- ضرب عدد فى متجه: اذا كان المتجه ب← = (ب ١ ، ب٢) ، ك عدد حقيقى فإن

ك × ب← = (ك ب١ ، ك ب٢)

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

التعبير عن متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

يمكن التعبير عن المتجه $\overleftarrow{ب}$ = (ب١ ، ب٢) بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ هكذا

$\overleftarrow{ب}$ = ب١ $\overleftarrow{س}$ + ب٢ $\overleftarrow{ص}$

أمثلة محلولة

١- اذا كان $\overleftarrow{م}$ = (١٢ ، ٥) ، $\overleftarrow{ن}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ ـ ١٢ $\overleftarrow{ص}$ فاوجد

أولاً: $||\ ٢\overleftarrow{م} - ٣\overleftarrow{ن}\ ||$ ثانياً: متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ن}$

الحل

١- ٢ $\overleftarrow{م}$ ـ ٣ $\overleftarrow{ن}$ = (٢٦ ، ١٠) ـ (١٥ ، ٣٦) = (١١ ، ـ ٢٦)

$\backslash\ ||\ ٢\overleftarrow{م} - ٣\overleftarrow{ن}\ ||$ = $\sqrt{١٢١ + ٦٧٦}$ = $\sqrt{٧٩٧}$

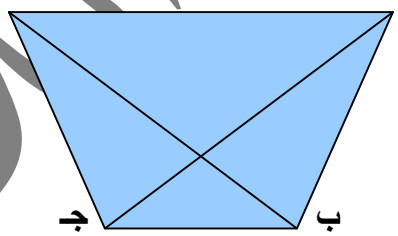
٢- متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ن}$ هو $\overleftarrow{ن}$ *

$\overleftarrow{ن}$* = $\frac{\overleftarrow{ن}}{||\overleftarrow{ن}||}$ = $\frac{(٥ ، -١٢)}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$ = $\frac{١}{١٣}$ (٥ ، ـ١٢)

= $\frac{٥}{١٣}$ $\overleftarrow{س}$ ـ $\frac{١٢}{١٣}$ $\overleftarrow{ص}$

٢- م ب ج د شكل رباعى ٠ أثبت أن م $\overleftarrow{ج}$ ـ م $\overleftarrow{د}$ = ب $\overleftarrow{ج}$ ـ ب $\overleftarrow{د}$

الحل



م $\overleftarrow{ج}$ ـ م $\overleftarrow{د}$ = د $\overleftarrow{ج}$

ب $\overleftarrow{ج}$ ـ ب $\overleftarrow{د}$ = د $\overleftarrow{ج}$

$\backslash$ م $\overleftarrow{ج}$ ـ م $\overleftarrow{د}$ = ب $\overleftarrow{ج}$ ـ ب $\overleftarrow{د}$

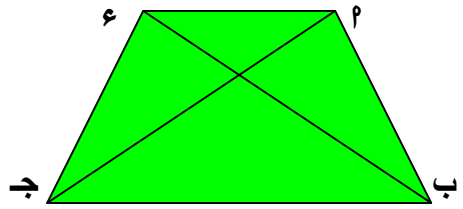
٣- م ب ج د شكل رباعى فيه ٢ ب $\overleftarrow{ج}$ = ٣ م $\overleftarrow{د}$ ٠ اثبت أن ٢ م $\overleftarrow{ج}$ +٣ د $\overleftarrow{ب}$ = ٥ م $\overleftarrow{ب}$

الحل

م $\overleftarrow{ج}$ = م $\overleftarrow{ب}$ + ب $\overleftarrow{ج}$

$\backslash$ ٢ م $\overleftarrow{ج}$ = ٢ م $\overleftarrow{ب}$ + ٢ ب $\overleftarrow{ج}$ = ٢ م $\overleftarrow{ب}$ + ٣ م $\overleftarrow{د}$ ← ١

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com



، $\overrightarrow{د ب} = \overrightarrow{د م} + \overrightarrow{م ب}$

$\therefore \overrightarrow{٣ د ب} = ٣ \overrightarrow{د م} + ٣ \overrightarrow{م ب}$ ← ٢

بجمع ١، ٢ مع ملاحظة أن $\overrightarrow{٣ م د} = -٣ \overrightarrow{د م}$

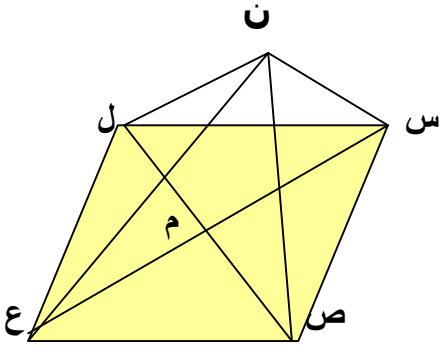
$\therefore \overrightarrow{٢ م جـ} + \overrightarrow{٣ د ب} = ٥ \overrightarrow{م ب}$

٤- س ص ع ل متوازى أضلاع ، م نقطة تقاطع قطريه ، ن نقطة فى مستويه ٠ أثبت أن

$\overrightarrow{ن س} + \overrightarrow{ن ص} + \overrightarrow{ن ع} + \overrightarrow{ن ل} = ٤ \overrightarrow{ن م}$

الحل

∵ م منتصف $\overline{س ع}$ ، منتصف $\overline{ص ل}$ (من خواص متوازى الأضلاع)



$\therefore \overrightarrow{ن س} + \overrightarrow{ن ع} = ٢ \overrightarrow{ن م}$

$\overrightarrow{ن ص} + \overrightarrow{ن ل} = ٢ \overrightarrow{ن م}$

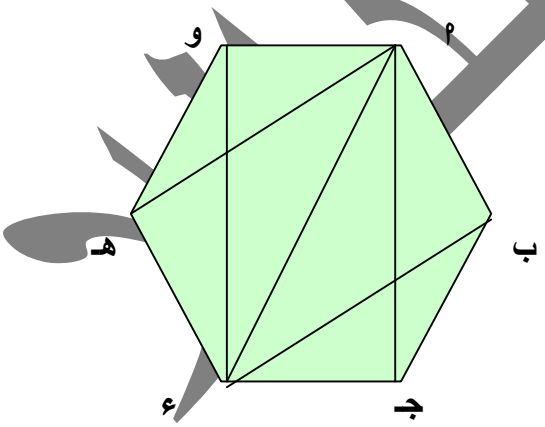
بالجمع

$\therefore \overrightarrow{ن س} + \overrightarrow{ن ص} + \overrightarrow{ن ع} + \overrightarrow{ن ل} = ٤ \overrightarrow{ن م}$

٥- م ب جـ د هـ و مسدس منتظم ٠ أثبت أن

$\overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{م جـ} + \overrightarrow{م هـ} + \overrightarrow{م و} = ٢ \overrightarrow{م د}$

الحل



بالشكل م ب د هـ مستطيل

$\therefore \overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{م هـ} = \overrightarrow{م د}$

∵ الشكل م جـ ء و مستطيل

$\therefore \overrightarrow{م جـ} + \overrightarrow{م و} = \overrightarrow{م د}$

بالجمع

$\therefore \overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{م جـ} + \overrightarrow{م هـ} + \overrightarrow{م و} = ٢ \overrightarrow{م د}$

ملحوظة هامة : اذا كان $\overrightarrow{ب} = ك \overrightarrow{جـ}$ فإن $\overrightarrow{ب} // \overrightarrow{جـ}$ وفى اتجاه واحد عندما ك = عدد موجب

وفى اتجاهين متضادين عندما ك = عدد سالب

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

تمارين

١- فى أى شكل رباعى س ص ع ل ، أثبت ان ل $\overrightarrow{ص}$ + ص $\overrightarrow{ع}$ = ل $\overrightarrow{س}$ + س $\overrightarrow{ع}$

٢- م ب جـ د شكل رباعى فيه س منتصف م بـ ، ص منتصف $\overline{جـ ء}$ أثبت أن
م $\overrightarrow{د}$ + ب $\overrightarrow{جـ}$ = ٢ س $\overrightarrow{ص}$

٣- م ب جـ مثلث ، ٢ د $\overrightarrow{ب}$ = ٣ $\overrightarrow{جـ د}$ ، أثبت أن
٢ م $\overrightarrow{ب}$ + ٣ م $\overrightarrow{جـ}$ = ٥ م $\overrightarrow{د}$

---

٤ - اذا كانت م = (١ ، ـ ٢) ، ب = (ـ ٣ ، ٢) فاوجد || م $\overrightarrow{ب}$ ||

٥- اذا كان ن $\overrightarrow{و}$ = (٣ ، ٥) ، ن = (ـ ٤ ، ١) فاوجد احداثى و

٦- أوجد متجه الوحدة فى اتجاه المتجة $\overrightarrow{م}$ = (٣ ، ـ ٤)

٧- اذا كان $\overrightarrow{ب}$ = ٣ س $\overrightarrow{ن}$ + ٥ ص $\overrightarrow{ن}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ = ٤ ص $\overrightarrow{ن}$ ـ س $\overrightarrow{ن}$ فاوجد || ٢ $\overrightarrow{ب}$ ـ ٣ $\overrightarrow{جـ}$ ||

٨- م ب جـ د متوازى أضلاع فيه م= (٧ ، ٤) ، ب = (٣ ، ٨) ، جـ = (ـ ٣ ، ٠)
أوجد احداثى نقطة د

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com