الإرشادات

الصف الثالث الثانوى

التفاضل والتكامل

إرشادات الاختبارات

اختبار رقم (١)

١ أ

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2س - \sin س\right) د س$$

$$= \frac{1}{2}س + \frac{1}{4}\sin 2س + \cos س + ث$$

$$\int [س(1-\frac{1}{س})]^9 د س$$

$$= \int (س-1)^9 د س$$

$$= \frac{1}{10}(س-1)^{10} + ث$$

ب

$$ق(س) = 4س^3 + ب س^2$$

$$ق'(س) = 12س^2 + 2ب س$$

$$ق''(س) = 24س + 2ب$$

∴ (1، 2) نقطة انقلاب

∴ ق''(س) = 0 عندما

$$24 \times 1 + 2ب = 0$$

$$∴ ب = -12 \quad \longleftarrow (1)$$

النقطة (1، 2) تحقق معادلة المنحنى

$$4 + ب = 2 \quad \longleftarrow (2)$$

بحل المعادلتين (1)، (2)

$$4 - 12 = 2$$

$$∴ 2 = -8 \quad ∴ 4 = -1$$

$$∴ ب = -8 - 1 = -9$$

$$∴ ق(س) = -س^4 - 3س^2 + 2$$

$$ق'(س) = -4س^3 - 6س$$

$$ق''(س) = -12س^2 - 6$$

∴ ق'(س) = 0 عندما

$$-3س(4س + 2) = 0$$

∴ س = 0 أو $س = -\frac{1}{2}$

عندما س = 0 ∴ ق''(س) < 0

∴ النقطة (0، 2) صغرى محلية

عندما $س = -\frac{1}{2}$ ∴ ق''(س) > 0

∴ النقطة $(-\frac{1}{2}, \frac{37}{16})$ عظمى محلية

ج

∴ الدالة متصلة عند س = 2

$$ق(2^+) = ق(2^-)$$

$$\lim_{س \to 2^+} (4س + 2) = \lim_{س \to 2^-} س^2$$

$$8 + 2 = 4 \quad ∴ 4 = 2$$

$$∴ 4 = 1$$

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 & ، س \leq 2 \\ 4س + 2 & ، س > 2 \end{cases}$$

$$ق'(2^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{ق(2+هـ) - ق(2)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{4(2+هـ) + 2 - 4}{هـ} = 4$$

$$ق'(2^-) = \lim_{هـ \to 0^-} \frac{ق(2+هـ) - ق(2)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0^-} \frac{(2+هـ)^2 - 4}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to 0^-} \frac{4 + 4هـ + هـ^2 - 4}{هـ} = 4$$

$$∴ ق'(2^+) \neq ق'(2^-)$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = 2

د

$$\frac{ص}{س} = \frac{1-س}{2ص - ص^2}$$

$$\int (2ص - ص^2) \cdot د ص = \int (1-س) \cdot د س$$

$$ص^2 - \frac{2}{3}ص^3 = س - \frac{1}{2}س^2 + ث$$

$$1 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + ث$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + ث \quad ∴ ث = -\frac{5}{6}$$

$$∴ ص^2 - \frac{2}{3}ص^3 = س - \frac{1}{2}س^2 - \frac{5}{6}$$

---

٢ أ

$$ق(0^+) = \lim_{س \to 0^+} (\sin \frac{2}{س} + 1)$$

$$= \sin 0 + 1 = 2$$

$$ق(0) = \lim_{س \to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2س}{س}\right)^2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$∴ ق(0^+) = ق(0) = 2$$

ب ∴ د(س) = س³ − ١٢س + ١٠

د(س) = ٣س² − ١٢

∴ د(س) = ٠ عندما

٣(س − ٢)(س + ٢) = ٠

∴ س = ٢ أو س = −٢

س = −٣ د(−٣) = ١٩

س = −٢ د(−٢) = ٢٦

س = ٢ د(٢) = −٦

س = ٦ د(٦) = ١٥٤

القيمة العظمى المطلقة = ١٥٤

وتبلغ عندما س = ٦

القيمة الصغرى المطلقة = −٦

وتبلغ عندما س = ٢

٤ ∴ ص = س جتا٢س + جا س

م ∴ $\frac{دص}{دس}$ = س × −٢ جا٢س + جتا٢س + جتا س

$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٠}$ = ٠ + جتا٠ + جتا٠ = ٢

∴ معادلة العمودى هى :

ص − ٠ = −$\frac{١}{٢}$ (س − ٠)

∴ ٢ص = −س

∴ س + ٢ص = ٠

ن نفرض أن طول ضلع المكعب = س

وحجمه = ح

$\frac{دس}{دن}$ = ٠٫١ × ٣س٢ = ٠٫٣س٢ م/ث

$\frac{دح}{دن}$ = ٠٫٧٥ س٣ م/ث

∴ ح = س٣

∴ $\frac{دح}{دن}$ = ٣س٢ × $\frac{دس}{دن}$

٠٫٧٥ = ٣ × ٠٫١ × س٢

∴ س٢ = ٢٥ ∴ س = ٥سم

٣ = ٦س٢

$\frac{دم}{دن}$ = ٢س × $\frac{دس}{دن}$

= ٢ × ٥ × ٠٫١ = ١٫٠ سم/ث

ه ∴ ص = س$\frac{١}{٢}$ + س$^{-\frac{١}{٢}}$

م $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ − $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ − $\frac{١}{٢س\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{س - ١}{٢س\sqrt{س}}$

وبتربيع الطرفين :

$\left(\frac{دص}{دس}\right)^٢$ = $\frac{(س-١)^٢}{٤س^٣}$

٤س٣ $\left(\frac{دص}{دس}\right)^٢$ = (س − ١)٢

ن نفرض

أ ب

ب ج = ص

ب ت = س

المثلثين أ د و ، ب ج و

$\frac{هـ و}{٨}$ = $\frac{٨\sqrt{١٢} - س}{س}$

∴ هـ و = $\frac{٨(٨\sqrt{١٢} - س)}{س}$

م = م(△ أ د و) + م(و ج ب)

٢ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × $\frac{٨(٨\sqrt{١٢}-س)}{س}$ + $\frac{س^٢ \times (٨\sqrt{١٢}-س)}{٨س}$

$\frac{١}{٤}$ ٢ = س + $\frac{(٨\sqrt{١٢} - س)^٢}{س}$

$\frac{١}{٤}$ $\frac{دم}{دس}$ = ١ + $\frac{س \times ٢(٨\sqrt{١٢}-س) - (٨\sqrt{١٢}-س)^٢}{س^٢}$

$\frac{دم}{دس}$ = ٠ عندما :

٠ = $\frac{-٣س^٢ + ١٦\sqrt{١٢}س - ١٢٨}{س^٢}$

∴ −٣س٢ + ١٦$\sqrt{١٢}$س − ١٢٨ = ٠ ∴ س = ٣٦

∴ س = ٨

∴ طا ى = $\frac{٨}{٨}$ = ١

∴ م(∠ى) = ٤٥°

اختبار رقم (٢)

١ أ

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2س-3)\right]\cos(2س-3)\,د س$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin^2(2س-3)\right]+ث$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2(2س-3)+ث$$

$$= \int \frac{7}{2}(س-1)^{\frac{4}{2}}\,د س$$

$$= \frac{2}{10}(س-1)^{\frac{10}{2}}+ث$$

ب باستخدام التعريف أوجد أ :

$$د(1^+) = ج س = 2$$

$$د(1) = 2$$

$$\therefore د(1^+) = د(1)$$

∴ الدالة متصلة عند س = 1

$$\therefore د(س) = \begin{cases} 2 & ، س < 1 \\ 2س & ، س \geq 1 \end{cases}$$

د(س) = 0 عندما س = 0

الذى لا ينتمى إلى مجال الدالة لأن

س < 1 .

س = −2 ∴ د(−2) = −4 + 3 = −1

س = 2 د(2) = 4 + 4 = 8

لا توجد قيمة عظمى مطلقة = 8

وتبلغ عندما س = 2

توجد قيمة صغرى مطلقة = −1

وتبلغ عندما س = −2

٢ أ

∴ الدالة متصلة عند س = 1

$$\therefore د(1^+) = د(1)$$

$$\lim_{س \to 1^+} (ج س + 2) = \lim_{س \to 1^-} (3س + 1)$$

$$1 + ج = 3 + 1 \quad \therefore ج = 3$$

$$\therefore د(س) = \begin{cases} 3س + 1 & ، س \leq 1 \\ ج س + 3 & ، س > 1 \end{cases}$$

$$د'(1^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{د(1+هـ) - د(1)}{هـ}$$

$$د'(1^+) = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{(1+هـ)^2 + 3 - 4}{هـ} = 2$$

$$د'(1) = \lim \frac{2(1+هـ) + 1 - 4}{هـ} = 3$$

$$\therefore د'(1^+) \neq د'(1)$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = 1

ب

$$ص = \int (3س^2 - 6س - 4)\,د س$$

$$ص = س^3 - 3س^2 - 4س + ث$$

$$1 = 0 + ث \quad \therefore ث = 0$$

$$\therefore ص = س^3 - 3س^2 - 4س + 1$$

$$\frac{د ص}{د س} = 3(س-2)(س-(-1)) = 6(س-1)$$

$$\frac{د ص}{د س} = 0 \quad \text{عندما} \quad س = 1$$

إشارة $\frac{د ص}{د س}$	−	0	+
س		1	

- التحدب لأسفل فى $]1, \infty[$.
- التحدب لأعلى فى $]-\infty, 1[$.

٣ أ

$$\frac{د ص}{د س} = \int (6س - 6)\,د س$$

$$= 3س^2 - 6س + ث_1$$

$$0 = 3 \times 4 - 12 + ث_1$$

$$\therefore ث_1 = 0$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = 3س^2 - 6س$$

$$ص = \int (3س^2 - 6س)\,د س$$

$$= س^3 - 3س^2 + ث_2$$

$$1 = 27 - 27 + ث_2$$

∴ ث = ١

∴ ص = $س^{٣} - ٣س^{٢} + ١$

$\frac{ص}{س}$ = ٠ عندما :

$٣س(س - ٢) = ٠$

∴ س = ٠ أو س = ٢

توجد نقطة صغرى محلية مقدارها

= ٨ − ١٢ + ١ = −٣

عندما س = ٠ ∴ $\frac{ص}{س}$ < ٠

توجد نقطة عظمى محلية = ١

$\frac{ص}{س}$ = ٠ عندما س = ١

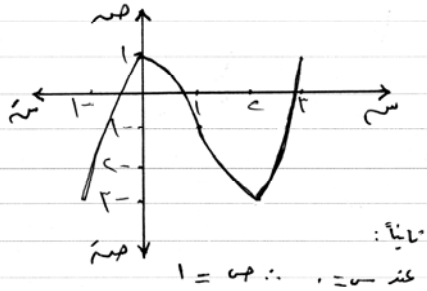
س > ١ ∴ $\frac{ص}{س}$ < ٠

س < ١ ∴ $\frac{ص}{س}$ > ٠

∴ توجد نقطة انقلاب عند س = ١

مقدارها = ١ − ٢ + ١ = −١

س	−١	٠	١	٢	٣
ص	−٣	١	−١	−٣	١
نوع النقطة	ساعة	عظمى	انقلاب	صغرى	ساعة



ثانياً :

عند س = ٠ ∴ ص = ١

$(\frac{ص}{س})$ = ٠ ميل العمودى غير معرف

∴ معادلة العمودى : س = ٠

∴ $ص^{٢} = ٢س^{٣}$

∴ $٢ص \cdot \frac{ص}{س} = ٦س^{٢}$

∴ $ص \cdot \frac{ص}{س} = س^{٢}$

∴ $ص \cdot \frac{ص}{س} + ص(\frac{ص}{س})^{٢} = ١$

وبقسمة الطرفين على ص حيث ص ≠ ٠

$\frac{ص}{س} + ص(\frac{ص}{س})^{٢} = \frac{١}{ص}$

نفرض أن بعدا المستطيل

س ، ص

وأن مساحته م .

$\frac{ل}{٢}$ = $\overline{أد}$

$\overline{هـ ك}$ // $\overline{ب د}$

∴ Δ ب هـ ل ~ Δ ب د ج

∴ $\frac{ب د}{ب ج} = \frac{هـ ك}{ل ج}$ ∴ $\frac{ص}{\frac{ل}{٢}} = \frac{\frac{ل}{٢} - س}{\frac{ل}{٢}}$

∴ ص = $\frac{ل}{٢}$ ($\frac{ل}{٢}$ − س)

∴ م = س ص = س $\frac{ل}{٢}$ ($\frac{ل}{٢}$ − س)

∴ م = $\frac{ل}{٢}س - س^{٢}$

$\frac{دم}{دس} = \frac{ل}{٢} - ٢س$

$\frac{دم}{دس}$ < ٠ عندما $\frac{ل}{٢} - ٢س$ < ٠

تكون مساحة سطح المستطيل أكبر ما يمكنه

عندما : س = $\frac{١}{٤}$ ل

∴ بعدا المستطيل : $\frac{١}{٢}$ ل ، $\frac{ل}{٤}$

م = $\frac{ل}{٢}(\frac{ل}{٢} - \frac{ل}{٤}) = \frac{ل^{٢}}{٨}$

د(٠) = $\lim_{س \to ٠^{+}}$ ظا(٨س + ظاس)

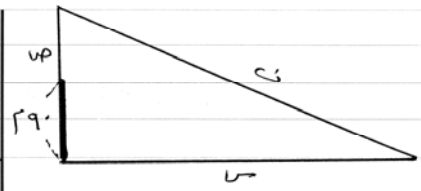
= ٨ + ظا٠ = ٨

د(٠) = $\lim_{س \to ٠^{-}}$ $\frac{ظا ٨س}{س}$ = ٨

∴ د(٠) = د(٠) = ٨

∴ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ٨

ب



بعد ن ثانية يكون :
البعد الرأسى = ٩٠ + ١٥ن
البعد الأفقى = ٢٥ن

ج ∴ ع² = (٢٥ن)² + (٩٠ + ١٥ن)²
عندما ن = ٤
ع² = (١٢٠)² + ٤٠٠ × ٤
∴ ع = ١٣٠ متر

∴ ٢ع × ع/ن = ٢ × ٢٥ن × ٢ن
+ ٢(٩٠ + ١٥ن) × ١٥

∴ ع/ن × ١٣٠ = ٢٥ × ٢
+ ١٥ × ١٢٠

∴ ع/ن = ٢ ٦/١٢ متر/ث

اختبار رقم (٣)

١ ب

$$\int (س-١)^{٥} \times ٢ \, د س$$
$$= \frac{١}{٢} \int (س-١)^{٥} \times ٢ \, د س$$
$$= \frac{١}{٦}(س-١)^{٦} + ث$$

ج

$$\int (جتا^{٢} س + جا^{٢} س - ٢ جا س جتا س) \, د س$$
$$= \int (١ - جا ٢س) \, د س$$
$$= س + \frac{١}{٢} جتا ٢س + ث$$

د ∴ ص = س³ + ٣س² + ب س
∴ ص' = ٣س² + ٦س + ب
ص' = ٦س + ٢٤
ص' = ٠ عندما ٦ × ٣ + ٢٤ + ب = ٠
∴ ٤٢ = ١٨ − ب ∴ ب = −٩
∴ النقطة (٣ ، −٩) تمر بالمنحنى
فهى تحقق معادلته .

ج ∴ د(١⁺) = $\lim_{س \to ١^{+}} \frac{١}{٤}(س+٣)$
= $\frac{١}{٤} \times ٤ = ١$

د(١⁻) = $\lim_{س \to ١^{-}} \frac{٤}{س+٣} = \frac{٤}{٤} = ١$

∴ د(١⁺) = د(١⁻) = ١
∴ $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ١

ب ميل المماس = $\frac{-٦}{١} = -٦$
ميل المنحنى : $\frac{ص}{س} = -٦س$
∴ يوجد نقطة تماس بين المستقيم والمنحنى .
∴ −٦س = −٦ ∴ س = ١
وبالتعويض فى معادلة المستقيم
−٦ − ص = ٠ ∴ ص = −٦
∴ نقطة التماس هى (١ ، −٦)
∴ النقطة (١ ، −٦) تحقق معادلة المنحنى ،
∴ −٦ = ١ × ٣ + ٢ ∴ ٢ = −٣

٣ ب

$$ص = \int (٣ جتا ٢س - ٢س) \, د س$$
$$= \frac{٣}{٢} جا ٢س - س^{٢} + ث$$

ج $\frac{د ص}{د س} = جتا س - جا س \times \frac{د ص}{د س}$

$\frac{د ص}{د ع} = -جا س - (جا ص \times \frac{د ص}{د س})$
$+ (\frac{د ص}{د س})^{٢} \times جتا ص$

∴ $\frac{د ص}{د ع}$ (١ + جا ص) + جا س
+ جتا ص $(\frac{د ص}{د س})^{٢}$

$\therefore 0 = 1 - 1 + ث \quad \therefore ث = 0$

$\therefore ص = س^3 - س^2$

$ص' = 3س^2 - 2س$

$ص'' = 6س - 2$

عندما: $ص' = 0$ $\quad س(3س - 2) = 0$

$\therefore س = 0$ أو $س = \frac{2}{3}$

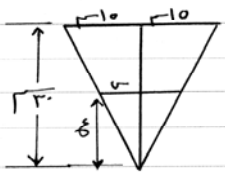
عندما: $س = 0$

$\therefore ص'' < 0$ توجد قيمة عظمى محلية $= 0$

عندما: $س = \frac{2}{3}$

$\therefore ص'' > 0$ توجد قيمة صغرى محلية $= \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27}$

ب



نفرض أن عند أى لحظة زمنية:
حجم الماء $ح$ سم^3
وارتفاعه $ع$ سم

$\frac{دح}{دن} = 60$ سم^3/ث

والمطلوب إيجاد: $\frac{دع}{دن}$

$\therefore \frac{س}{15} = \frac{ع}{30}$ $\quad \therefore س = \frac{1}{2}ع$

$\therefore ح = \frac{1}{2}ع \times ع \times 120 = 60ع^2$

$\therefore \frac{دح}{دن} = 120ع \cdot \frac{دع}{دن}$

$\therefore 60 = 120 \times 10 \times \frac{دع}{دن}$

$\therefore \frac{دع}{دن} = \frac{1}{20}$ سم/ث .

ج

الدالة متصلة عند $س = 2$

$\therefore د(2^+) = د(2^-)$

$\therefore \lim_{س \to 2^+} (أس + 1) = \lim_{س \to 2^-} (س^2 + 1)$

$\therefore 2أ + 1 = 4 + 1$

$\therefore 2أ = 4$ $\quad \therefore أ = 2$

$د(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \leq 2 \\ 2س + 1 & ، س > 2 \end{cases}$

$د'(2) = \lim_{ه \to 0^+} \frac{د(2+ه) - د(2)}{ه}$

$= \lim_{ه \to 0^+} \frac{2(2+ه) + 1 - 5}{ه}$

$= \lim_{ه \to 0^+} \frac{2ه}{ه} = 2$

$د'(2) = \lim_{ه \to 0^-} \frac{(2+ه)^2 + 1 - 5}{ه}$

$= \lim_{ه \to 0^-} \frac{4ه + ه^2}{ه} = 4$

$\therefore د'(2^+) \neq د'(2^-)$

$\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $س = 2$.

د

$\therefore د(س) = س^2 + \frac{ك}{س}$

$\therefore د'(س) = 2س - \frac{ك}{س^2}$

توجد نقطة حرجة للدالة عند $س = 2$

$\therefore 0 = 4 \times 2 - \frac{ك}{4}$

$\therefore \frac{ك}{4} = 4$ $\quad \therefore ك = 16$

$\therefore د(س) = س^2 + \frac{16}{س}$

$س = 1$	$د(1) = 17$
$س = 2$	$د(2) = 12$
$س = 3$	$د(3) = 14\frac{1}{3}$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى مطلقة $= 17$
وتبلغ عند $س = 1$
توجد قيمة صغرى مطلقة $= 12$
وتبلغ عند $س = 2$.

هـ

نفرض أن طول حرف القاعدة $= س$ متر
وارتفاع الصندوق $= ع$ متر

$\therefore ح = س^2 ع$ $\quad \therefore 27 = س^2 ع$

$\therefore ع = \frac{27}{س^2}$ $\quad \rightarrow (1)$

∴ ص = ٤س^٣ + ٢س^٤ ← (٢)

س (١) ، (٢)

∴ ص = ٤س × ٢٧/٤ + ٢س^٤

= ٤ × ٢٧ س^٣ + ٢س^٤

∴ ص = −٤ × ٢٧ س^٣ + ٤س^٤

∴ ص = ٠ عندما: −٤ × ٢٧/٤ + ٤س^٣ = ٠

∴ ٤س^٣ = ٤ × ٢٧ ∴ س^٣ = ٢٧

∴ ص = ٨ × ٢٧ س^٢ + ٤

∴ ص > ٠

∴ عندما س = ٢ تكون الساعة الكلية للهندسة أقل ما يمكن.

وصه (١) ∴ ك = ٢٧/٩ = ٣

∴ أبعاد الصندوق هى:

٢ ، ٣ ، ٣ س الأمتار.

اختبار رقم (٤)

١ أ) ∫ ٣(س+٣) / ٢(س+٣)^{١/٢} د س

= ∫ ٣ (س+٣)^{−١/٢} د س

= ٣ × ٢/١ (س+٣)^{١/٢} + ث

= ٦ (س+٣)^{١/٢} + ث

ب) ∫ (ق^٢ س + ٤ جتا^٢ س − ٤ ق^٢ س جتا^٢ س) د س

= ∫ (ق^٢ س + ٤ (١/٢ + ١/٢ جتا ٢س) − ٤ ق^٢ س جتا^٢ س) د س

= ∫ (ق^٢ س + ٢ جتا ٢س − ٢ ق^٢ س جتا^٢ س) د س

= ظا س + ١/٢ جا ٢س − ٢س + ث

= ظا س + جا س جتا س − ٢س + ث

ج ∴ ص = ٤ − ٢س^٢

∴ ص' = −٣س^٢ − ٦س

ص'' = −٦س − ٦

∴ ص' = ٠ عندما −٣س^٢ − ٦س = ٠

∴ −٣س (س + ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = −٢

عندما س = ٠ ∴ ص < ٠

يوجد عند النقطة (٠ ، ٤)

نهاية عظمى محلية.

عندما س = −٢ ∴ ص > ٠

يوجد عند النقطة (−٢ ، ٨)

نهاية صغرى محلية.

ص' = ٠ عندما س = ١

س < ١ ∴ ص' < ٠

س > ١ ∴ ص' > ٠

∴ ص' تغير إشارتها من سالب إلى موجب عند النقطة س = ١

∴ (١ ، ٢) توجد نقطة انقلاب

د ، م) د(ج) = نهـ (ك − ج^٢) / (س − ج) = ٤ × ٢^{−١} / ١٢

س ← ج

د(ج) = نهـ (١٨ − ٢س^٢)

س ← ج

= ١٨ − ٦ = ١٢

∴ د(ج^+) = د(ج^−) = ١٢

∴ نهـ د(س) = ١٢

س ← ج

ب) ميل المستقيم = −٣/١ = −٣

∴ −١/ك = −٣

∴ ك = ١/٣ ∴ س = ± ١/٢

∴ ص = ± ١/٢ ± ٢ = ± ٥/٢

∴ نقط التماس: (١/٢ ، ٥/٢) ، (−١/٢ ، −٥/٢)

∴ معادلة المماس هى:

ص − ٥/٢ = −٢ (س − ١/٢)

٣س + ص − ٤ = ٠

٢ص + ٥ = −٦ (س + ١/٢)

∴ ٢س + ص + ٤ = ٠

٣ م ∴ ع = ٢ص − ٣

ص = ½ (س + ٣)²

وبالتعويض عن قيمة ص فى العلاقة الثانية :

ص = ٢ × ½ (س + ٣)² − ١

∴ dص/dس = ½ × ٢ (س + ٣) × ٢س

dص/dس = ٢س² + ٦س

dص/dع = ٦ع + ٦

المقدار المطلوب

= س (٦ع + ٦) − ٣ (٢س² + ٦س)

= ١٢س + ٦س² − ٦ع − ١٨س² − ١٢س

= صفراً .

ب ∴ ميل المماس = ٢ص × − ظتاس

∴ ميل العمودى = 1 / (٢ص ظتاس)

∴ dص/dس = ظاس / ٢ص

∴ ٢ص . dص = ظاس . dس

∴ ص² = − جتاس + ث

∴ المنحنى يمر بالنقطة (π/٢ ، ١)

∴ ١ = − جتا π/٢ + ث

∴ ١ = ١ + ث ∴ ث = ٠

∴ معادلة المنحنى هى :

ص² + جتاس − ٢ = ٠

---

٤ م ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

فهى متصلة .

∴ نهـ (أ س² + ب س)

س → ١⁻ = نهـ (أ س² + ب س)

س → ١⁺

∴ ٠ = أ + ب − ١ ∴ ب = ١ − أ

د (س) = { أ س² + ب ، س ≥ ١ ; ١ − ، س < ١ }

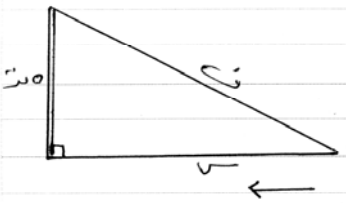
∴ د (١⁻) = د (١⁺)

٢ أ + ب = − ١

٢ أ + ١ − أ = − ١

∴ أ = − ٢ ∴ ب = ٣

ب



نفرض أنه بعد القارب عن قاعدة الصخرة = س وأنه بعد القارب عن الرجل = ف .

من مثلث فيثاغورث :

ف² = س² + ٢٥

وعندما س = ١٢

∴ ف² = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

∴ ف = ١٣ متراً

وبأخذ الاشتقاق بالنسبة للزمن :

∴ ٢ف . dف/dن = ٢س . dس/dن

١٣ × ٤ = ١٢ × dس/dن

∴ dس/dن = − ١٢/٣ متر/ث .

---

٥ م بالاستعانة بالتعريف نجد أن :

د (ج) = ٤ ، د (ج⁺) = ٦

∴ د (ج) ≠ د (ج⁺)

∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

∴ د (س) = { ١٢ − س ، س < ٠ ; ٦ ، ٠ < س < ٢ ; ٢س² − ١٠ ، س > ٢ }

غير معرفة ، س = ٢

∴ د (س) = ٠ عندما س = ٠

حيث ٠ ∉]١٠ ، ٠[

اختبار رقم (٥)

∵ د(س) غير معرفة عند س = ٢
∴ س = ٢ نقطة حرجة

إشارة د	+	+	غير معرف	+	+	٠	−	−	٠	+	+
س			٢			١٠			١٠		

إشارة د كما بالشكل ولذلك توجد قيم عظمى أو صغرى محلية .
د(٠) = ٠ ، د(٢) = ٤٢
د(٧) = ٧٢
• توجد قيمة صغرى مطلقة = ٠
وتبلغ عندما س = ٠
• توجد قيمة عظمى مطلقة = ٧٢
وتبلغ عند س = ١٠

ب ع = ط نق^٢ ع

٦٤ ط = ط نق^٢ ع ∴ ع = ٦٤ / نق^٢

∴ المساحة الجانبية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
∴ ص = ٢ ط نق ع + ط نق^٢ ← (٥)
من (١) ، (٥)
∴ ص = ٢ ط نق × ٦٤/نق^٢ + ط نق^٢

∴ ص = ط (١٢٨ نق^-١ + ٢ نق^٢)
= ٢ ط (٦٤/نق + نق)

∴ ص = ٠ عندما: نق^٣ = ٦٤
∴ نق = ٤ سم
ص = ٢ ط (١٢٨/١٦ + ١)

∴ د(٤) = ٦ ط > ٠
∴ تكون مساحة الصفيح المستخدم أقل ما يمكن عندما نق = ٤ سم
∴ أبعاد العلبة في هذه الحالة :
نق = ٤ سم
ع = ٤ سم .

١ م

∫ ٢ × √((٢س^٢ + ٥س + ٤)/س) . د س

= ∫ ٢ (٢س + ٥ + ٤س^-١)^(١/٢) . د س

= ٢ × ٢/٣ (٢س + ٥ + ٤س^-١)^(٣/٢) + ث

= ٤/٣ (٢س + ٥ + ٤/س)^(٣/٢) + ث

ب ∫ (جاس − جتاس)(جا^٢س + جتا^٢س + جاس جتاس) / (جاس − جتاس) . د س

= ∫ (١ + ١/٢ جا٢س) . د س

= س − ١/٤ جتا٢س + ث

ب د(س) = (س+١)^٢ (س−١)
د(س) = ٣س^٢ − ٣
= ٣ (س − ١)(س + ١)
د(س) = ٦س
د(س) = ٠ عندما س = ± ١
د(١) > ٠ توجد قيمة صغرى محلية = −٤ عند س = ١
د(−١) < ٠ توجد قيمة عظمى محلية = ٠ عندما س = −١
∴ د(س) = ٠ عندما س = ٠
س < ٠ ، د(س) < ٠
س > ٠ ، د(س) > ٠
توجد نقطة انقلاب (٠ ، −٢)

٢ م

د(س) = { ٥ − س^٢ + س ، س ≤ ١ ; ٥ + س^٢ − س ، س > ١ }

د(١^+) = نهـ_{س→١^+} (٥ − س^٢ + س) = ٥
د(١^-) = نهـ_{س→١^-} (٥ + س^٢ − س) = ٥
∴ د(١^+) = د(١^-)
∴ نهـ_{س→١} د(س) = ٥

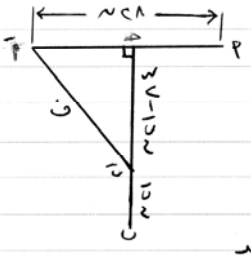
ب
$\therefore s\,ص = ٣$
$\therefore s \times \frac{د ص}{د س} + ص \times ١ = ٠$
$\therefore \frac{د ص}{د س} = -\frac{ص}{س}$
$\therefore ص_٢ - ص_١ = ٢$
$\therefore ٢س - ٢ص \times \frac{د ص}{د س} = ٠$
$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{س}{ص}$
∴ ميل المماس × ميل القاطع = $\frac{س}{ص} \times \frac{ص}{س}$
$= -١$
لإيجاد نقط التقاطع نحل المعادلتين جبرياً :
من المعادلة الأولى : $ص = \frac{٣}{س}$
وبالتعويض من المعادلة الثانية
$س - \frac{٤}{س} = ٢$
$\therefore س^٢ - ٢س - ٤ = ٠$
$(س - ٤)(س + ١) = ٠$
$\therefore س = ٤$ ، $\therefore س = \pm ٢$
$\therefore ص = \frac{\pm ٢}{٢} = \pm ١$
∴ النقط هى : $(٢ ، ١)$ ، $(-٢ ، -١)$

ج ، د
$\therefore ظا ص + ظتا ص = ٠$
$\therefore$ ظتا ص $\times \frac{د ص}{د س} - ٢$ ظا^٢ س $= ٠$
ظتا ص $\times \frac{د^٢ ص}{د س^٢} + \frac{د ص}{د س} \times -$ ظا ص $\times \frac{د ص}{د س}$
$- ٤$ ظتا^٢ س $= ٠$
وبالقسمة على ظتا ص :
$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} - (\frac{د ص}{د س})^٢$ ظا ص $=$
٤ ظتا^٢ س . ظا ص

هـ
$\frac{د ص}{د س} = (٢ + ٢$ ظتا^٢ س$)^{\frac{١}{٢}}$
$= [٢ + ٢(٢$ ظتا^٢ س $- ١)]^{\frac{١}{٢}}$
$= (٤$ ظتا^٢ س$)^{\frac{١}{٢}}$
$= ٢$ ظتا س

ب
∴ الدالة د متصلة :
د(١^+) = د(١^-) = د(١)
$ب - ٢ = ١ + ٢ = -١$
$\therefore ٢ = -٢$ ، $ب = -٣$
$\therefore$ د$(س) = \begin{cases} ٢ - س^٢ & ، س \leq ١ \\ -٣ + ٢س & ، س > ١ \end{cases}$

د$'(١^+) = \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{د(١ + هـ) - د(١)}{هـ}$
$= \lim_{هـ \to ٠^+} \frac{-٣ + ٢(١ + هـ) + ١}{هـ} = ٢$
د$'(١^-) = \lim_{هـ \to ٠^-} \frac{٢ - (١ + هـ)^٢ - ٢ + ١}{هـ} = ٢$
∴ د$'(١^+)$ = د$'(١^-)$ = ٢
∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ١

ب


بعد ن ساعة
تكون ب ف على بعد
مسافة هى بسا وس :
ب ن $= ١٢ - ٨$ سم
$= ٤ - ٣$ سم
جيب $\frac{س}{٤}$ ، وتكون ب ن على بعد
مسافة هى بسا وس
$(٨ - ١٢ س) = ١٢ (٤ - س)$ ، $س < ٤$
$\therefore ع^٢ = ٩٤ (٤ - س)^٢ + ١٤٤ (٤ - س)^٢$
وعندما $س = ١$ ساعة $\therefore ع = ٨\sqrt{٢٧}$ كم/س
$\frac{د ع}{د س} = ٩٨ \times ٤ (٤ - س)$
$- ٨٨ (٤ - س)$
$\frac{د ف}{د س} \times ٨\sqrt{٢٧} = ٩٨ \times ٤ \times ١ - ٨٨ \times ٢$

$\therefore \frac{\text{و ف}}{\text{و س}} = \frac{161}{\pi 64}$

∴ تتقارب المتتالية بمعدل :
$\frac{161}{\pi 64}$ كم / س

ه ق(س) = { ٢س + ٣ ، س < ١ ; ٤ + ٤ ، س ≥ ١ }

باستخدام التعريف أوجد :

ق'(١⁺) = ٢ = ٢

ق'(١⁻) = ٢

∴ ق'(١⁺) = ق'(١⁻)

∴ الدالة ق معرفة عندما س = ١

∴ ق'(س) = { ٢ ، س < ١ ; ٢س ، س > ١ }

ق(س) = ٠ عندما س = ٠

لكن : مجال ق =]-∞ ، ١]

∴ لا توجد قيمة عظمى مطلقة للدالة .

س = -٢ ∴ ق(-٢) = -٤ + ٣ = -١

س = ٢ ∴ ق(٢) = ٤ + ٤ = ٨

• توجد قيمة عظمى مطلقة = ٨
وتبلغ عندما س = ٢

• توجد قيمة صغرى مطلقة = -١
وتبلغ عندما س = -٢

ب نفرض أن عرض المستطيل = ص

∴ طول المستطيل = ٢ص

∴ محيط المستطيل = ٢(ص + ٢ص)

∴ ٣٤ - س = ٦ص

∴ ص = $\frac{1}{6}$ (٣٤ - س)

∴ محيط المربع = س

∴ طول ضلعه = $\frac{1}{4}$ س

∴ ص = $\frac{1}{16}$ س^2 + ٢ص^2

∴ م = $\frac{1}{16}$ س^2 + ٢ × $\frac{1}{36}$ (٣٤ - س)^2

م' = $\frac{1}{8}$ س + $\frac{1}{9}$ (٣٤ - س) × -١

∴ م' = ٠ عندما :

س = $\frac{136}{17}$ = $\frac{24}{9}$

∴ س = ١٦ سم

∴ م' = $\frac{17}{17}$ > ٠

∴ يكون مجموع مساحتي سطحي الشكلين أصغر ما يمكن عندما س = ١٦ سم .

اختبار رقم (٦)

ا ق(س) = { ٢س - ١ ، س < ٢ ; $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$ (٣س - ١)^2 ، س ≥ ٢ }

ق(س) د س = $\frac{1}{2}$ (٢س - ١)^2 د س

= $\frac{1}{2}$ (٤س^2 - ٤س + ١) د س

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{3}$ (٢س - ١)^3 + ث

= $\frac{1}{6}$ (٢س - ١)^3 + ث .

ج $\frac{\text{جا}^2 3\text{س}}{1 - \text{جتا}3\text{س}}$ د س

= $\frac{1 - \text{جتا}^2 3\text{س}}{1 - \text{جتا}3\text{س}}$ د س

= $\frac{(1 - \text{جتا}3\text{س})(1 + \text{جتا}3\text{س})}{1 - \text{جتا}3\text{س}}$ د س

= (١ + جتا٣س) د س

= س + $\frac{1}{3}$ جا٣س + ث

د ق(س) = س^3 - ٦س^2 + ٩س - ١

ق'(س) = ٣س^2 - ١٢س + ٩

= ٣ (س^2 - ٤س + ٣)

= ٣ (س - ٣)(س - ١)

ق''(س) = ٦س - ١٢

∴ ق'(س) = ٠ عندما :

س = ٣ أو س = ١

• عندما س = ٣ ∴ ق''(س) > ٠

توجد قيمة صغرى محلية = -١

• عندما س = ١ ∴ ق''(س) < ٠

توجد قيمة عظمى محلية = ٣

ج م

$\because$ د$'$(س) = ٠ عندما س = ج

س < ج ، د$'$(س) < ٠

س > ج ، د$'$(س) > ٠

$\therefore$ د تقبل إنعكاس من + إلى −

$\therefore$ توجد نقطة إنقلاب = ١

ج م

$$د(س) = \begin{cases} \frac{\text{جا}٢س}{س} & ، س < ٠ \\ ٥ - ٣\text{جتا}س & ، س > ٠ \end{cases}$$

$$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٢س}{س} = ج$$

$$د(٠) = \lim_{س \to ٠^+} (٥ - ٣\text{جتا}س)$$

$$= ٥ - ٣\text{جتا}٠ = ج$$

$\therefore$ د(٠$^-$) = د(٠$^+$)

$\therefore$ $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = ج

د

$\therefore$ س = ص ق^{س}

$\therefore$ ص = $\frac{س}{ق^{س}}$ = س ق$^{-س}$

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س}$ = − س ق$^{-س}$ + ق$^{-س}$

$\therefore$ $\left(\frac{د ص}{د س}\right)_{س = \frac{ط}{٢}}$ = − $\frac{ط}{٢}$ ق$^{-\frac{ط}{٢}}$ + ق$^{-\frac{ط}{٢}}$

= − $\frac{ط}{٢}$

عندما: س = $\frac{ط}{٢}$

$\therefore$ ص = $\frac{ط}{٢}$ ق$^{-\frac{ط}{٢}}$ = ٠

$\therefore$ نقطة التماس ($\frac{ط}{٢}$ ، ٠)

معادلة المماس:

ص − ٠ = − $\frac{٢}{ط}$ (س − $\frac{ط}{٢}$)

$\therefore$ $\frac{٢}{ط}$ س + ص − $\frac{٤}{ط}$ = ٠

$\therefore$ ٢ط س + ٤ص − ط^{٢} = ٠

معادلة العمودى:

ص = $\frac{ط}{٢}$ (س − $\frac{ط}{٢}$)

$\therefore$ $\frac{ط}{٢}$ س − ص − ١ = ٠

$\therefore$ ط س − ٢ط ص − ط = ٠

م ٣

$\therefore$ س ص = $\frac{٩ + ١}{٩} \times \frac{٩}{٩ + ١}$ = ١

$\therefore$ س ص = ١

$\therefore$ س $\times \frac{د ص}{د س}$ + ص $\times$ ١ = ٠

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{- ص}{س}$ ← (١)

وبإشتقاق المعادلة مرة أخرى بالنسبة الى س:

$\therefore$ س $\times \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + $\frac{د ص}{د س}$ + $\frac{د ص}{د س}$ = ٠

$\therefore$ س $\times \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٢ $\times$ $\frac{- ص}{س}$ = ٠

وذلك بالتعويض من (١)

$\therefore$ س $\times \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = $\frac{٢ ص}{س}$

بالقسمة على س

$\therefore$ $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = $\frac{٢ ص}{س^{٢}}$.

د

$$\frac{د ص}{د س} = \left\{ (٦ س - ٨) \cdot د س \right.$$

$\frac{د ص}{د س}$ = ٣ س^{٢} − ٨ س + ث$_{١}$

٤ = ٣ − ٨ + ث$_{١}$ $\therefore$ ث$_{١}$ = ٩

$$\therefore ص = \left\{ (٣ س^{٢} - ٨ س + ٩) \cdot د س \right.$$

ص = س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٩ س + ث$_{٢}$

٠ = ١ − ٤ + ٩ + ث$_{٢}$

٠ = ٦ + ث$_{٢}$ $\therefore$ ث$_{٢}$ = − ٦

$\therefore$ ص = س^{٣} − ٤ س^{٢} + ٩ س − ٦

ج م ٤

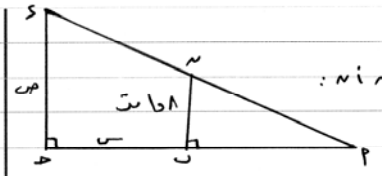
$$د(س) = \begin{cases} - ٣ س^{٢} + ٨ & ، س \leq ٠ \\ ٨ & ، س > ٠ \end{cases}$$

د$'$(٠) = $\lim_{هـ \to ٠}$ $\frac{د(٠ + هـ) - د(٠)}{هـ}$

= $\lim_{هـ \to ٠^-}$ $\frac{- ٣ هـ^{٢} + ٨ - ٨}{هـ}$ = ٠

د$'$(٠$^+$) = $\lim_{هـ \to ٠^+}$ $\frac{٨ - ٨}{هـ}$ = ٠

$\therefore$ د$'$(٠$^+$) = د$'$(٠$^-$) = ٠



نفرض أن :

الصباح عند ب والرجل عند ل ، هـ ك الظل على المبنى حيث ل هـ = س مترا

هـ ك = ص مترا .

المعلوم : $\frac{دس}{دن} = -0,1$ متر/ث

المطلوب : حساب $\frac{دص}{دن}$ عندما س = ١٢م

سند ك به المثلثية :

Δ ل م ن $\sim$ Δ ب ك هـ

$\frac{١٥-س}{١٥} = \frac{١,٨}{ص}$ ∴ $ص = \frac{٢٧}{١٥-س}$

∴ $\frac{دص}{دن} = \frac{٢٧ \times -١}{(١٥-س)^٢} \times \frac{دس}{دن}$

∴ $\frac{دص}{دن} = \frac{-٢٧}{٩} \times ١,٥$

$= -٤,٥$ متر/ث

---

٥ ∴ $د(س) = س^٣ + ٩س^٢ + ب س$

٩ ∴ $ق(س) = ٣س^٢ + ١٨س + ب$

$ق(س) = ٦س + ١٨$

∴ توجد نقطة انقلاب عند (٠،٠)

∴ $١٨ + ب = ٠$ ∴ $ب = -٦$

∴ النقطة (٠،٠) تقع على المنحنى

نوجد بحققه معادلته .

$٨ + ٩ + ب + ج = ٢$

∴ $ب + ج = -٣$

∴ $-٦ + ج = -٣$ ∴ $ج = ٣$

∴ $د(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س$

$ق(س) = ٣س^٢ - ١٢س + ٩$

$= ٣(س-١)(س-٣)$

$ق(س) = ٦س - ١٢$

$\frac{دص}{دس} = ٠$ عندما : $س = ١$ أو $س = ٣$

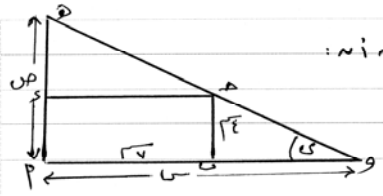
عندما $س = ١$ ∴ $ق(س) < ٠$

توجد قيمة عظمى محلية = ٤

عندما $س = ٣$ ∴ $ق(س) > ٠$

توجد قيمة صغرى محلية = ٠

نفرض أن :



$ب ل = س$ ، $ب ك = ص$

∴ $ط(\Delta ب ل ك) = \frac{١}{٢} س ص$

∴ طاى = $\frac{ص}{س} = \frac{هـ ن}{ل ن}$

∴ $\frac{ص}{س} = \frac{٤}{٧-س}$ ∴ $ص = \frac{٤س}{٧-س}$

∴ $ص = \frac{١}{٢} س \times \frac{٤س}{٧-س} = \frac{٢س^٢}{٧-س}$

∴ $ص = \frac{١ \times ٤(٧-س) - ٢س^٢ \times ٤}{(٧-س)^٢}$

$= \frac{٢٨ - ٨س - ٢س^٢}{(٧-س)^٢}$

∴ ص = ٠ عندما ، $٢س^٢ - ٨س - ٢٨ = ٠$

$(س-١٤)(س+٧) = ٠$

∴ $س = ١٤$ مرفوضة أى : $س = ١٤$م

∴ ص > ٠ ∴ مساحة Δ تكون أصغر ما يمكن عندما $س = ١٤$

∴ $ط_{صغرى}(\Delta ب ل ك) = \frac{١٩٦ \times ٢}{٧} = ٥٦$ م^٢

اختبار رقم (٧)

$\int \frac{٥(٣-س)}{\frac{١}{٣}(٣-س)^٢} د س$

$= \frac{٥}{٢} \int (٣-س)^{-٢} د س$

$= \frac{٥}{٢} \times \frac{١}{-١} (٣-س)^{-١} + ث$

$= \frac{٥}{٢(٣-س)} + ث$

$\int (جتاس - جتاس ظا^٢س) د س$

$= \int (جتاس - ظاس) د س$

$= جاس - طاس + ث$.

ب ∵ $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ج ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ج ب $د(س) = ٣س^{٢} + ٢س^{٣} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ج ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

د ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

هـ ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

و ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ز ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ح ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ط ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ى ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ك ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ل ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

م ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ن ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

س ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ع ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ف ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ص ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ق ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ر ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ش ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ت ب $د(س) = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} - ١٢س + ٥$

$\therefore د'(س) = ٦س^{٢} + ٦س - ١٢$

$= ٦(س^{٢} + س - ٢)$

$= ٦(س + ٢)(س - ١)$

$\therefore د'(س) = ٠$ عندما $س = -٢$ أو ١

$س = -٣$	$\therefore د(-٣) = ١٤$
$س = -٢$	$د(-٢) = ٥$
$س = ١$	$د(١) = -٢$
$س = ٢$	$د(٢) = ٥٠$

القيمة العظمى المطلقة $= ٥٠$ وتبلغ عندما $س = ٢$

القيمة الصغرى المطلقة $= -٢$ وتبلغ عندما $س = ١$.

ث ب $د(٠^{+}) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٤س + ١) = ١$

$د(٠) = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س} - \frac{ط ٤س}{س} \right) = ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

ب لنفرض أن النقطة $(٠، ع)$

$\therefore ص + ع = ٠$

$\therefore ص = -ع$

$\therefore \frac{ص}{س} = -ع$

$\therefore$ ميل المماس $= ط ١٢٠°$ أى $ط ٦٠$

$\therefore -ع = -\sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{ع}$

أو : $٢س = \sqrt{٣}$ $\therefore س = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore ص = -\frac{٣}{٤}$ أو $ص = -\frac{٢}{٤}$

$\therefore$ نقط التماس هى :

$\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٣}{٤} \right)$ أو $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

$\therefore$ معادلة المماس المار بالنقطة $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}، -\frac{٢}{٤} \right)$

وميله $= -\sqrt{٣}$ هى :

$٤\sqrt{٣}س + ٤ص - ٢ = ٠$

وهذا يقطع محور الصادات $(٠، ٢)$

$\therefore ٠ + ٤ع - ٢ = ٠$ $\therefore ع = \frac{٢}{٤}$

$\therefore$ النقطة المطلوبة $(٠، \frac{٢}{٤})$

ث

ب نفرض أن طول ضلع المثلث = ل
ومساحته = م .
∴ $\frac{دل}{دس}$ = ٢ ، س = ٣ سم
المطلوب : $\frac{دم}{دس}$ عندما ل = ٨√٣ سم
م = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ل٢
∴ $\frac{دم}{دس}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل . $\frac{دل}{دس}$
= $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ٨√٣ × ٢
= ٤٨ سم٢/ث

ه ∵ ص = س٣ + ٩س٢ + ب س + ج
∴ ص' = ٣س٢ + ١٨س + ب
∵ النقطة (٢ ، -٩) تنتمي إلى المنحنى :
∴ ٨ + ٣٦ + ٢ب + ج = -٩
∴ ٢ب + ج = -٥٣
∴ ص' = ٣س٢ + ١٨س + ٣٥
ص'' = ٦س + ١٨
ص'' = ٠ عندما س = -٣
عندما: س = -٣ ص' = ٠
عندما: س = -٤ ص'' < ٠
∴ (-٣ ، ٧) عظمى محلية
عندما س = -٥ ص'' > ٠
∴ (-٥ ، ٥) صغرى محلية .

ب ٦ = ق(س + ص)
∴ ص = ٦ - س
م = مساحة المثلث + مساحة المستطيل
م = $\frac{1}{2}$ س٢ + ٢س - س٢
∴ م = ٢س - $\frac{3}{2}$ س٢
∴ م' = ٢ - ٣س = $\frac{3}{2}$ (٤ - س)
م' = ٠ عندما س = ٤
م'' = -$\frac{3}{2}$ < ٠

تسمح النافذة بمرور أكبر كمية من الضوء عندما يكون طول القاعدة = ١ متر .
ومن (١) ∴ محيط المستطيل = $\frac{1}{2}$ (٢ - ٣√٣) م

اختبار رقم (٨)

١ ب) $\int \frac{(س+٣)-٤}{\frac{1}{2}(س+٣)}$. دس

$\int (س+٣)^{\frac{1}{2}}$. دس - $\int 4(س+٣)^{-\frac{1}{2}}$. دس

= $\frac{2}{3}(س+٣)^{\frac{3}{2}}$ - ٨(س+٣)$^{\frac{1}{2}}$ + ث

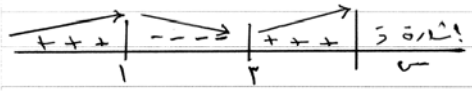
ج) $\int [2 جتا^2(1-جا^2 س)]^{\frac{1}{2}}$. دس

= $\int (2 جتا^2 س)^{\frac{1}{2}}$. دس

= $\int$ ٢ جتا س . دس

= ٢ جا س + ث .

ب د(س) = س٣ - ٦س٢ + ٩س
د'(س) = ٣س٢ - ١٢س + ٩
= ٣(س - ١)(س - ٣)
د''(س) = ٦س - ١٢
د'(س) = ٠ عندما: س = ١ أو س = ٣



تزايدية في]-∞ ، ١[،]٣ ، ∞[
تناقصية في]١ ، ٣[.
العظمى (١ ، ٤) عظمى محلية
" (٣ ، ٠) صغرى محلية .

٢ د(ط) = $\frac{جتا^2 س}{جتا^2 س + جا^2 س}$ ÷ $\frac{جتا^2 س}{جا^2 س}$

= $\frac{جتا^2 س}{1}$ × $\frac{جا^2 س}{جتا^2 س}$

= ٢

ب
$\frac{ص}{س} = \frac{ص^2 + 2س}{س} = \frac{ص^2}{س} + 2$
$\therefore د(ت) = ت^2 + 2$
$\therefore د(ت) = د(2)$ ∴ $\lim_{س \to 2} د(س) = 6$

ب
بجعل معادلة المنحنى جبرياً :
$ص^2 + س + 1 = س^3$
$\therefore س^3 - ص^2 - س - 1 = 0$
$(س+1)^2 (س-2) = 0$ ∴ $س = -1$
$\therefore ص = 1 + 1 = 2$
∴ نقطة التماس هى $(-1، 2)$
$\therefore \frac{د ص}{د س} = 3س^2 - 1$ عندما $س = -1$
$\therefore \frac{د ص}{د س} = 3 - 1 = 2$
$\therefore ص - 2 = 2(س+1)$
$2س + ص + 1 = 0$

ب
$\frac{د ص}{د س} = 2ص$ ، $\frac{د ص}{د ن} = 5$
$\therefore \frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ن}$
$= \frac{1}{2ص} \times 5 = \frac{5}{2ص}$
$\therefore \frac{د^2 ص}{د ن^2} = \frac{-2}{ص^3} \times \frac{5}{2ص} \times \frac{د س}{د ص}$
$= \frac{-5}{2ص^4} \times \frac{1}{2ص}$
$= \frac{-5}{9} \times \frac{1}{18} = \frac{-5}{81 \times 18} = -18$

ب
$\frac{د ص}{د س} \neq 0$ ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{ل}{ع}$
حيث ل ثابت $\neq 0$
$\therefore ص = \int ل ع . د س$
$ص = -\frac{ل}{ع} س + ث$
∴ المنحنى يمر بالنقطتين :
$(1، 5)$ ، $(2، 1)$
$5 = -\frac{ل}{ع} + ث$
$1 = -\frac{ل}{ع} + ث$ وبالطرح

ج
$د(س) = \frac{ص}{س} = \frac{س^3 + 2س}{س} = س^2 + 2$
$\therefore د(ت) = ت^2 + 2$
$\therefore د(2) = د(ت)$ ∴ $\lim_{س \to ت} د(س) = 6$
$= 6$

ج
$\frac{د ص}{د س} = 3س^2 - 2س + 1$
$\therefore ص = \int (3س^2 - 2س + 1) د س$
$ص = س^3 - س^2 + س + ث$
∴ المنحنى يمر بالنقطتين :
$(1، 5)$ ، $(2، 1)$
$5 = 1 - 1 + 1 + ث$
$1 = 8 - 4 + 2 + ث$ وبالطرح

ج
$\frac{د ص}{د س} = 2ص$ ، $\frac{د ص}{د ن} = 5$
$\therefore \frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ن}$
$= \frac{1}{2ص} \times 5 = \frac{5}{2ص}$
$\therefore \frac{د^2 ص}{د ن^2} = \frac{-2}{ص^3} \times \frac{5}{2ص} \times \frac{د س}{د ص}$
$= \frac{-5}{2ص^4} \times \frac{1}{2ص}$
$= \frac{-5}{9} \times \frac{1}{18} = \frac{-5}{81 \times 18} = -18$

ج
$\frac{د ص}{د س} \neq 0$ ∴ $\frac{د ص}{د س} = \frac{ل}{ع}$
حيث ل ثابت $\neq 0$
$\therefore ص = \int ل ع . د س$
$ص = -\frac{ل}{ع} س + ث$
∴ المنحنى يمر بالنقطتين :
$(1، 5)$ ، $(2، 1)$
$5 = -\frac{ل}{ع} + ث$
$1 = -\frac{ل}{ع} + ث$ وبالطرح

د
$\therefore 4 = -\frac{ل}{ع} + ث$ ∴ $ل = -8$
، $1 = 4 + ث$ ∴ $ث = -3$
$\therefore ص = \frac{8}{س} - 3$

د
م $(ق) = 3 = \frac{د(5) - د(1)}{4}$
$\therefore 3 = \frac{(25 + 5ه) - (1 + ب + ه)}{4}$
$\therefore 5ه - ب = 16$ ← (1)
$د(س) = \begin{cases} ه & ، س \geq 2 \\ ب + ه س + س^2 & ، س < 2 \end{cases}$
$\therefore د(2^+) = د(2^-)$
$\therefore ه - ب = 4$ ← (2)
∴ الدالة قابلة للاشتقاق
فهى متصلة عند $س = 2$
$\therefore 2ه + 2ب = 8 + ب$
$\therefore 2ه + ب = 8$ ← (3)
بحل المعادلات (1) ، (2) ، (3)
$\therefore ه = \frac{12}{4}$ ، $ب = -\frac{2}{4}$ ، $ه = -1$

ب
نفرض أن مساحة المستطيل = م
$\therefore م = س ص = 8$ ∴ $س = \frac{8}{ص}$
$\therefore \frac{د م}{د ن} = -8ص^{-2} \times \frac{د ص}{د ن}$
$\therefore 40 = \frac{-8}{ص^2} \times (-5، 0)$
$\therefore ص = 1$ ∴ $ص = 1$ ∴ المرصد = 1م

ه
$\therefore د(س) = س^3 - 3س^2 + ب س + 10$
$د'(س) = 3س^2 - 6س + ب$
∴ لا توجد قيمة عظمى محلية .
$\therefore 0 = 3 - 6 + ب$
$\therefore ب - 6 = -3$ ← (1)
∴ النقطة $(1، 3)$ تمر بالمنحنى فهى تحقق معادلته .
$\therefore 1 - 3 + ب + 10 = 3$
$\therefore ب - 3 = -8$ ← (2)
$ب = -5$ ∴ $ب = -15$

∴ د(س) = س³ + ٥س² − ١٢س + ١٠

د'(س) = ٣س² + ١٠س − ١٢

= (٣س + ١٢)(س − ١)

∴ س = −١٢/٣ أو س = ١

س = −١ د(−١) = ٢٧

س = ١ د(١) = ٣ صغرى م

س = ٤ د(٤) = ١٠٢ عظمى م

ب نفرض أن الساحة = م

∴ م = س ص = ٢٠٠ ∴ ص = ٢٠٠/س

طول السور = ل = ٢س + ص

∴ ل = ٢س + ٢٠٠/س

∴ ل' = ٢ − ٢٠٠/س²

∴ ل' = ٠ عندما س = ١٠

ل'' = ٤٠٠/س³ > ٠ صغرى مطلقة

∴ س = ١٠ تحقق المطلوب ∴ ص = ١٠

∴ بعدا المستطيل : ١٠ متر ، ٢٠ متر

اختبار رقم (٩)

١ أ ∫ [(س+١) − ١](س+١)^٧ د س

∫ [(س+١)^٨ − (س+١)^٧] د س

= ١/٩ (س+١)^٩ − ١/٨ (س+١)^٨ + ث

ب ∫ (جتا²س + جا²س)(جتا²س − جا²س) د س

= ∫ ١ × جتا ٢س د س

= ١/٢ جا(٢س) + ث

ب ∴ ص = ٢س³ + ب س² + جـ س + د

∴ ص' = ٦س² + ٢ب س + جـ

ص'' = ١٢س + ٢ب

∴ توجد نقطة انقلاب

∴ ص'' = ٠ عندما س = ٢

∴ ٢٤ + ٢ب = ٠ ← (١)

∴ يوجد ماس أفقي:

∴ ص' = ٠ عندما س = ١

∴ ٣ + ٢ب + جـ = ٠ ← (٢)

∴ النقطتان (٠، ٢٢) ، (٢، ٤٢) من تحقق معادلته .

∴ د = ٢

∴ ٨ + ٤ب + ٢جـ + د = ٤

∴ ٤ + ٢ب + جـ = −١ ← (٣)

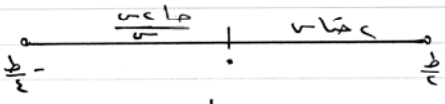
وبطرح (٢) من (٣)

∴ أ = ١

وبالتعويض في (١) ∴ ب = −٦

وبالتعويض في (٢) ∴ جـ = ٩

ج ٢ أ



* عندما: س → π/٢

د(π/٢) = lim (س → π/٢) جتا س = ٠

* عندما: س → ٠

د(٠) = lim (س → ٠) جتا س = ١

د(٠) = lim (س → ٠) جا س / س = ج

∴ د(٠⁺) = د(٠⁻) = ١

∴ lim (س → ٠) د(س) = ١

ب عندما س = π/٢

∴ ص = π/٢ جا π/٢ − جتا² π/٢

= π/٢ + ١

∴ dص/dس = س جتا س + جا س + ٢ جا س جتا س

= ٠ + ١ + ٢ × ٠ = ١

∴ معادلة المماس ص:

ص − (π/٢ + ١) = ١(س − π/٢)

∴ س − ص + ١ + π/٢ = ٠

٣ م

$\frac{ص}{س} = -س جا س + جتا س - جتا س$

$\frac{ص}{س} = -(س جتا س + جا س) + ٠$

$= -(\frac{ط}{٢} جتا \frac{ط}{٢} + جا \frac{ط}{٢})$

$= -(٠ + ١) = -١$

ب ∴ لكى تقطع ∫ المنحنى عند (١، ١)

$٠ = ب + ا$ ∴ $ب = -ا$

$\frac{ص}{س} = ∫ (ا س^٢ - ا) ٥ س$

∴ $\frac{ص}{س} = \frac{١}{٣} ا س^٣ - ا س + ث_١$

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٠، -١)

∴ $-١ = ٠ - ٠ + ث_١$ ∴ $ث_١ = -١$

∴ $ص = \frac{١}{٣} ا س^٣ - ا س - ١$

∴ المنحنى يمر بالنقطة (١، ١)

∴ $١ = \frac{١}{٣} ا - ا - ١$ ∴ $ا = ٦$

∴ $ص = ٢ س^٣ - ٦ س - ١$

ج ∴ لكى تقطع ∫ المنحنى عند (٠، -١)

∴ $-١ = ٠ + ٠ + ث_٢$ ∴ $ث_٢ = -١$

∴ $ص = ∫ (٦ س^٢ - ٦ س) ٥ س$

$ص = ٢ س^٣ - ٣ س^٢ + ث_٢$

∴ المنحنى يمر بالنقطة (١، ١)

∴ $١ = ٢ - ٣ + ث_٢$ ∴ $ث_٢ = ٢$

∴ $ص = ٢ س^٣ - ٣ س^٢ + ٢$

---

٤ م

∴ $د(-٢) = ج$

∴ $-٢ ا + ٤ = ج$ ∴ $ا = -٣$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق :

∴ $د(س) = \begin{cases} ٦ - ٢ س & ، س \leq ١ \\ ٣ س + ب & ، س > ١ \end{cases}$

∴ $د(١^+) = د(١^-)$

∴ $٣ + ب = ٦ - ٢$

∴ $-٣ - ٣ = ب + ٣$ ∴ $ب = -٧$

وتكون الدالة أيضا متصلة .

$د(١^+) = د(١)$

∴ $\lim_{س \to ١^+}$ (ا $س^٢$ + ب س + ج) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٦ - ٢ س)

ب نفرض أن الطول = س

وطول القطر = ٥ س

وعرضه فيثاغورث :

∴ العرض = $\frac{٣}{٥}$ س

∴ المساحة م :

م = $\frac{٣}{٥}$ س × س = $\frac{٣}{٥}$ $س^٢$

∴ $\frac{د م}{د س} = \frac{٣}{٥} \times ٢ س \times \frac{د س}{د ن}$

∴ $٣٠ = \frac{٣}{٥} \times ١٠ \times س$ ∴ س = ٥

∴ $م = \frac{٣}{٥} \times ٤ = ٣$ م^٢

ج

س	$-\infty$		-١		١		∞
إشارة $د'$	+ + +		- - -		+ + +		

∴ $د'(س) = ٣ س^٢ - ٣$

$= ٣(س - ١)(س + ١)$

∴ $د'(س) = ٠$ عندما س = ١ أو س = -١

المقرب لأعلى فى] $-\infty$، -١ [،] ١، ∞ [

المقرب لأسفل فى] -١، ١ [

النقط : (-١، ٥) ، (١، ١) نقط انقلاب .

ب $ج = \frac{٤}{٣} ط (س + ٤)^٣ - \frac{٤}{٣} ط (٤)^٣$

∴ $\frac{د ج}{د ن} = \frac{٤}{٣} ط \times ٣ (س + ٤)^٢ \times \frac{د س}{د ن}$

∴ $-١٠ = ٤ ط (س + ٤)^٢ \times \frac{د س}{د ن}$

∴ $\frac{د س}{د ن} = -\frac{٥}{٨ ط}$ عندما س = -٣ ، ن = ٠

$٣ = ٤ ط (س + ٤)^٢$

∴ $\frac{د ٣}{د ن} = ٦ ط \times ٢ (س + ٤) \times \frac{د س}{د ن}$

$= ٨ ط (٢ + ٤) \times -\frac{٥}{٨ ط} = -\frac{١٥}{٢}$ سم/ث

اختبار رقم (١٠)

١ م

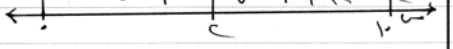
$\int [(س+1)-1][(س+1)^{5}]^{5} \cdot د س$

$= \int [(س+1)^{6} - (س+1)^{5}] \cdot د س$

$= \frac{1}{7}(س+1)^{7} - \frac{1}{6}(س+1)^{6} + ث$

ب

$د(س) = س^{3} - 6س^{2} + 12س + 1$



باستخدام التعريف نجد أن :

$د'(ج^{+}) = 6 \neq د'(ج) = 24$

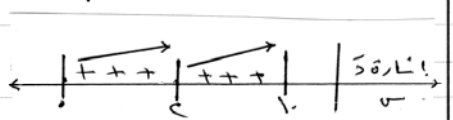
$\therefore د'(ج^{+}) \neq د'(ج)$

$\therefore$ الدالة غير معرفة عند $س = ج$

$د'(س) = \begin{cases} 12س & ، \ 0 \leq س < 2 \\ 6 & ، \ 2 < س \leq 10 \end{cases}$

$\because د'(س) = 0$ عندما $س = 0$

$\therefore س = 0 ، س = ج$ نقط حرجة للدالة



الدالة تزايدية فى $]0 ، ج[،]ج ، 10[$

$س = 0$ $د(0) = 0$ صغرى محلية

$س = ج$ $د(ج) = 24$

$س = 10$ $د(10) = 76$ عظمى محلية

ج م

$د(+) = \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{2س+1} - 1}{س} \times \frac{\sqrt{2س+1} + 1}{\sqrt{2س+1} + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2س+1-1}{س(\sqrt{2س+1}+1)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{\sqrt{2س+1}+1} = \frac{1}{2}$

$د(-) = \lim_{س \to 0} \frac{هـا س}{2س} = \frac{1}{2}$

$\therefore د(0^{+}) = د(0^{-}) = \frac{1}{2}$

ب

$\because ص = ظا س \quad \therefore \frac{د ص}{د س} = قا^{2} س$

$\therefore$ ميل المستقيم $= 2$

$\therefore \frac{1}{جتا^{2} س} = 2$

$\therefore جتا^{2} س = \frac{1}{2} \quad \therefore جتا س = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore س \in]0 ، 2ط[$

$\therefore س = \frac{ط}{4}$ او $س = \frac{3ط}{4}$

$\therefore$ النقط هى :

$(\frac{ط}{4} ، 1) \quad ، \quad (\frac{3ط}{4} ، -1)$

٣ م

$\because ص = \sqrt{هـا س}$

$\therefore ص^{2} = هـا س$

بأخذ التفاضل بالنسبة الى س

$2ص \cdot \frac{د ص}{د س} = هـا س$

وبأخذ التفاضل مرة أخرى :

$ص \cdot \frac{د^{2} ص}{د س^{2}} + (\frac{د ص}{د س})^{2} = -هـا س$

$\therefore ص \cdot \frac{د^{2} ص}{د س^{2}} + (\frac{د ص}{د س})^{2} + ص = 0$

$\therefore ص_{3} = هـا س$ معطى

$ص \cdot \frac{د^{2} ص}{د س^{2}} + (\frac{د ص}{د س})^{2} + ص ص_{3} = 0$

ب

$\therefore \frac{د^{2} ص}{د س^{2}} = 12س$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \int 12س \cdot د س$

$\frac{د ص}{د س} = 6س^{2} + ث_{1}$

$\because$ المنحنى $ص_{1}$ صغرى محلية

$\therefore 0 = 24 + ث_{1}$

$\therefore ث_{1} = -24$

$\frac{د ص}{د س} = 6س^{2} - 24$

$\therefore ص = \int (6س^{2} - 24) \cdot د س$

∴ ص = س⁴ − ٤س + ث

∴ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ ٢ = ١ − ٤ + ث

∴ ث = ٥

∴ ص = س⁴ − ٤س + ٥

٤ ب

باستخدام التعريف ... ميل أ م :

ق′(٢⁺) = ٦ − ٢ق

= ٦ − ٤ = ق ،

ق′(ق) = −٤ = ٨

∴ ق′(٢⁺) ≠ ق′(ق)

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢ .

∴ س = ٢ نقطة حرجة للدالة .

، ق′(س) = ٠ عندما :

٦ − ٢س = ٠ ∴ س = ٣

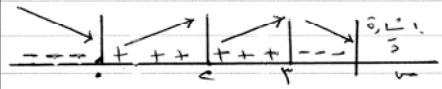
س = ٣ ∈]٢ ، ∞[

، ٤س = ٠ ∴ س = ٠

س = ٠ ∈]−∞ ، ٢[.

∴ النقط الحرجة هى :

س = ٢ أو س = ٠ أو س = ٣



من الشكل المرسوم :

(٠ ، ٠) صغرى محلية

(٣ ، ٩) عظمى محلية .

ب بعد ز من ثانية س دقيقة :

طول الضلع الأول = ٨ − ½ س

طول الضلع الثانى = ٦ + ٢س

ونبرهن أن المساحة = م

∴ م = ½ (٨ − ½ س)(٦ + ٢س)

∴ د م / د س = ½ (٨ − ½ س) − ¼ (٦ + ٢س)

د م / د س = ٠ عندما :

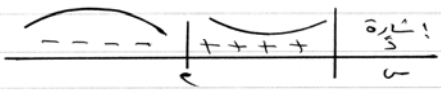
٥ ب

∴ ق′(س) = ٦ − ٤س

∴ ق″(س) = −٤ < ٠

∴ ق(س) = ٣س² − س⁴ + ١٨س − ٤

ق′(س) = ٠ نجعل س = ٢

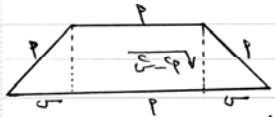


∴ النقطة (٢ ، ٠) نقطة انقلاب حيث

التحدب لأعلى فى]−∞ ، ٢[

التحدب لأسفل فى]٢ ، ∞[

ب



نفرض أن م = مساحة شبه المنحرف

وطول كل من س = م

∴ ص = ½ (٢م + ٢س) √(م² − س²)

∴ ص² = (م + س)² (م − س)

∴ م أكبر ما يمكن ∴ د ص² / د س = ٠

∴ ٢م × د م / د س = ٢ (م + س)² (م − س) − (م + س)³

= (م + س)² (٣م − ٤س)

∴ م × د م / د س = (م + س)² (م − س)

∴ د م / د س = ٠ عندما :

م = ٢س أو س = ½ م

عندما : س < ½ م ∴ د م / د س > ٠ ،

س > ½ م ∴ د م / د س < ٠

∴ عند س = ½ م تكون م قيمة عظمى

ومن هذه الحالة تكون :

طول القاعدة الكبرى = ٢م