الاحتمال

التجربة العشوائية :

التجربة العشوائية هي كل تجربة نستطيع أن نحدد مقدما جميع نواتجها ولكننا لا نعرف أي من هذه النواتج سوف يتحقق

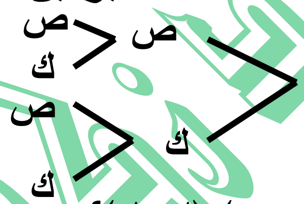
فضاء (فراغ) العينة أو فضاء النواتج (ف):

هو جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية.

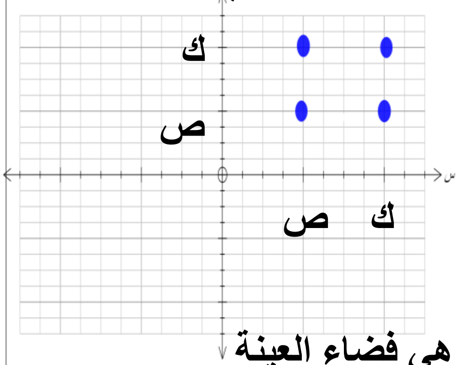
س: كيف يمكن حساب فضاء العينة؟

مثال: في تجربة القاء قطعتي عملة متمايزتين أوجد فضاء العينة؟

١) بطريقة الشجرة:



ف= {(ص ،ص)،(ص، ك)،(ك، ص)،(ك، ك)}



٢) بطريقة الشبكة البيانية: النقط المبينة بالشبكة هي فضاء العينة

٣) الضرب الديكارتي: س={ص، ك}،ص={ص، ك}

٤) ويكون فضاء العينة = س× ص={ص، ك}×{ص، ك}

∴ ف = {(ص ،ص)،(ص، ك)،(ك، ص)،(ك، ك)}

الحدث: هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة.

أنواع الأحداث:

١) **الحدث المؤكد:** هو حدث واجب الحدوث = ف

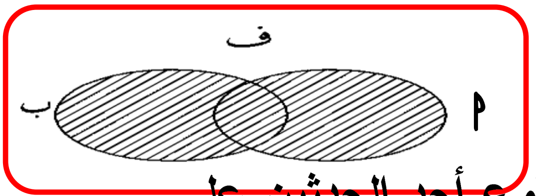
٢) **الحدث المستحيل:** هو حدث مستحيل أن يحدث = ϕ

٣) الحدث الأولى (البسيط): هو حدث يتكون من عنصر واحد فقط.

٤) الحدثان المتنافيان : هما حدثان لا توجد بينهما عناصر مشتركة

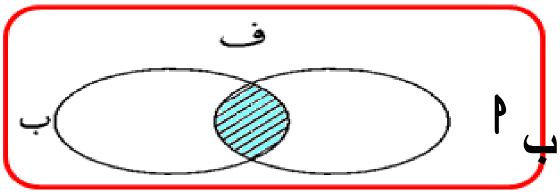
إذا كان أ، ب حدثين من ف فإن أ، ب حدثان متنافيان إذا كان أ $\cap$ ب $= \phi$.

العمليات على الأحداث :



١) الاتحاد ($\cup$= أو):

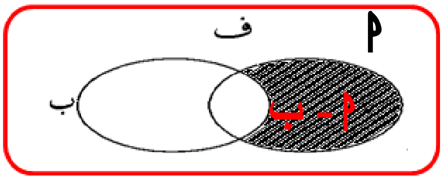
الجزء المظلل يمثل(أ $\cup$ ب) يعبر عن وقوع أحد الحدثين على الأقل ـ وقوع الحدث أ أو ب ـ إصابة الهدف



(٢) التقاطع ($\cap$ وقوع الحدثين معا)

الجزء المظلل يمثل أ $\cap$ ب = أ و ب

(٣) الفرق(–) عناصر أ فقط

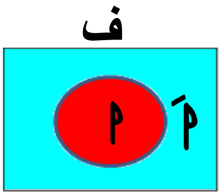


أ – ب = أ$\cap$بَ

يعنى وقوع الحدث أ فقط،

وكذلك يعنى وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب .

(٤)الحدث المكمل أَ



الجزء الملون باللون الأزرق يمثل أَ

ويسمى بالحدث المكمل للحدث أ

، وكذلك يعنى عدم وقوع الحدث أ=أَ= ف – أ

مثال(١) :في تجربة القاء قطعتي عملة متمايزتين مرة واحدة وملاحظة تتابع الصور والكتابات .اكتب فضاء العينة لهذه التجربة وعين الأحداث الآتية:

أ = ظهور كتابة واحدة على الأقل.

ب =ظهور كتابة واحدة على الأكثر.

ج =ظهور صوره واحدة بالضبط.

د =عدم ظهور كتابات.

هـــ =ظهور صورتين على الأقل.

الحل

ف={ (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

أ = {(ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

ب ={ (ص، ك)، (ك، ص)، (ص، ص)}

ج ={(ص، ك)، (ك، ص)}

د ={(ص، ص)} حدث بسيط

هـــ ={(ص، ص)} حدث بسيط

مثال ٢ :فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه العلوى، عين الأحداث الآتية:

ا = مجموع العددين على الوجهين الظاهرين أكبر من ١١

ب = مجموع العددين على الوجهين الظاهرين أقل من ٥

جــ = مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يقبل القسمةعلى٤

د = الفرق المطلق بين العددين على الوجهين الظاهرين ٣

هــ = الحصول على عدد أولى فى أحد الرميتين على الأقل.

الحل

الثانية						
٦	(١، ٦)	(٢، ٦)	(٣، ٦)	(٤، ٦)	(٥، ٦)	(٦، ٦)
٥	(١، ٥)	(٢، ٥)	(٣، ٥)	(٤، ٥)	(٥، ٥)	(٦، ٥)
٤	(١، ٤)	(٢، ٤)	(٣، ٤)	(٤، ٤)	(٥، ٤)	(٦، ٤)
٣	(١، ٣)	(٢، ٣)	(٣، ٣)	(٤، ٣)	(٥، ٣)	(٦، ٣)
٢	(١، ٢)	(٢، ٢)	(٣، ٢)	(٤، ٢)	(٥، ٢)	(٦، ٢)
١	(١، ١)	(٢، ١)	(٣، ١)	(٤، ١)	(٥، ١)	(٦، ١)
	١	٢	٣	٤	٥	٦

الرمية الأولى

ف = { (١،١) ، (١،٢) ، (١،٣) ، ......، (٦، ٦) }

ا = { (٦،٦)}

ب = {(١،١) ، (٢،١) ، (٣،١) ، (١،٣) ، (١،٢) ، (٢،٢) }

جـ = { (١،٣) ، (٢،٢) ، (٦،٢) ، (٣،١) ، (٣،٥) ،(٤،٤) ،
(٥،٣) ، (٢،٦) ، (٦،٦) }

د = { (١،٤) ، (٢،٥) ،(٣،٦) (٤،١) ، (٥،٢) ، (٦،٣) }

هـ = { (٢،١) ،(٢،٢) ،(٢،٣) ،(٢،٤) ،(٢،٥) ،(٢،٦)
،(٣،١) ،(٣،٢) ،(٣،٣) ،(٢،١) ،(١،٣) ،(١،٥) ،(٤،٢)
،(٤،٣) ،(٤،٥) ،(٦ ،٣) ،(٦،٢) ،(٦،٥) ، (٣،٤) ،(٣،٥)
،(٣،٦) ،(٥،١) ،(٥،٢) ،(٥،٣) ،(٥،٤) ،(٥،٥) ،(٥،٦)}

احتمال وقوع الحدث أ=ل(أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$

مسلمات الاحتمال:

١) ل(أ) ∋ [٠،١]　　　٢) ل(ϕ) = صفر

٣) ل(ف)=١　　　٤) ل(أ ∪ب) = ل(أ) + ل(ب)،أ، ب متنافيان

قوانين الاحتمال:

١) ل(أ′) = ١ – ل(أ) احتمال عدم وقوع الحد ث أ

٢) ل(أ∪ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل(أ ∩ ب) حيث أ ، ب حدثين من ف.

احتمال وقوع أ أو ب = وقوع أحد الحدثين على الأقل =احتمال إصابة الهدف

٣) ل(أ – ب) = ل(أ ∩ ب′) = ل(أ) – ل(أ ∩ ب)احتمال وقوع أ فقط

٤) ل (أ′ ∪ ب′) =ل(أ∩ب)′= ١ – ل(أ∩ ب)احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر (٤ ، ٥ قوانين دي مورجان)

٥) ل (أ′∩ب′) =ل(أ∪ب)′= ١ – ل(أ∪ب)

٦) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط = ل[(أ – ب) ∪ (ب – أ)]

=ل(أ∪ب) – ل(أ ∩ب)

٧) ل (أ∪ب)′ = ل(ب)′ + ل(أ∩ ب)احتمال وقوع أ أو عدم وقوع ب

ملحوظة هامة: ١) إذا كان ف = { أ$_{١}$، أ$_{٢}$، أ$_{٣}$، ...... أ$_{ن}$}

حيث أ$_{١}$، أ$_{٢}$، أ$_{٣}$، ......أ$_{ن}$ أحداث بسيطة متنافية فإن:

ل(أ$_{١}$) + ل(أ$_{٢}$) +......+ل(أ$_{ن}$) = ١

٢) اذا كان أ ⊂ ب فإن ل (أ∪ب)= ل(أ) ، ل(أ∩ ب) = ل(ب)

مثال١:سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من بين ٤٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٤٠

أوجد احتمال أن البطاقة المسحوبة تحمل رقماً فردياً

أولاً :يقبل القسمة على٥ ثانياً :يقبل القسمة على ٧

ثالثاً :يقبل القسمة على ٥ أو٧

الحل

(ن) ف= ٤٠عنصر

أولاً :أ= { ٥، ١٥، ٢٥، ٣٥} ∴ ل(أ) = $\frac{٤}{٤٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

ثانياً :ب= {٧، ٢١، ٣٥} ∴ ل(ب) = $\frac{٣}{٤٠}$

ثالثا: جـ =أ∪ب = {٥، ١٥، ٢٥، ٣٥، ٧، ٢١}

ل(جـ) = $\frac{٦}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

مثال٢ :حقيبة بها ٣٥ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٣٥ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من الحقيبة، احسب احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة (١) :فردياً. (٢) زوجيا أو يقبل القسمة على٣

الحل

ن(ف)= ٣٥ عنصر

(١)أ= { ١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ١٥، ١٧، ١٩، ٢١، ٢٣، ٢٥، ٢٧،

٢٩، ٣١، ٣٣، ٣٥} ∴ ل(ﻫ) = $\frac{١٨}{٣٥}$

(٢) ب = { ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠، ٢٢ ،٢٤، ٢٦،

٢٨، ٣٠، ٣٢، ٣٤، ٣، ٩، ١٥، ٢١، ٢٧، ٣٣} ∴ ل(ب) = $\frac{٢٣}{٣٥}$

مثال ٣: من مجموعة الأرقام{٣،٢،١،٠}، كون عددا مكونا من رقمين مختلفين، وأحسب احتمال أن يكون الحدث عدداً زوجياً أو رقم العشرات فردى.

الحل

ف={ ١٠، ٢٠، ٣٠، ٢١، ٣١، ١٢، ٣٢، ١٣، ٢٣ }

ﻫ = {١٠، ٢٠، ٣٠، ١٢، ٣٢ } (العدد زوجي)

ب = {١٠، ٣٠، ٣١، ١٢، ٣٢، ١٣}(رقم العشرات فردى)

ﻫ ∪ب = {١٠، ١٣، ٣٠، ١٢، ٣٢، ٢٠، ٣١}

ل (ﻫ∪ب) = $\frac{٧}{٩}$

مثال ٤ :**ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد على الوجه العلوى فى كل مرة .اوجد احتمال(١)أن يكون مجموع العددين ≥ ١٠**

(٢)أن يكون أحد العددين ٤ والمجموع أقل من ٩

(٣) أن يكون مجموع العددين زوجيا.

الحل

ف = {(١،١)، (١،٢)،.......، (٦،٦)} ،ن (ف) = ٣٦

١) نفرض أن ﻫ هو حدث أن يكون مجموع العددين أكبر من أو يساوي ١٠

ﻫ= {(٤،٦)،(٦،٤)،(٥،٥)،(٥،٦)،(٦،٥)،(٦،٦)}

$\text{ل}(\text{أ}) = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(٢) نفرض أن ب هو حدث أحد العددين ٤ والمجموع أقل من ٩

ب = {(٤،١)،(٤،٢)،(٤،٣)،(٤،٤)،(١،٤)،(٢،٤)،(٣،٤)}

$\text{ل}(\text{ب}) = \frac{٧}{٣٦}$

(٣) نفرض أن جـ هو حدث أن يكون مجموع العددين زوجيا.

$\text{ل}(\text{جـ}) = \frac{١٨}{٣٦} = \frac{١}{٢}$

مثال ٥ : إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان

$\text{ل}(\text{أ}) = \frac{١}{٦}$ ، $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{١}{١٨}$ ، $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \frac{٤}{٩}$

أوجد (١) $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}^{/})$ (٢) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

(٣) $\text{ل}(\text{أ}^{/} \cup \text{ب}^{/})$ (٤) $\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}^{/})$ (٥) $\text{ل}(\text{ب}^{/})$

الحل

$\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$\frac{٤}{٩} = \frac{١}{٦} + \text{ل}(\text{ب}) - \frac{١}{١٨}$ $\therefore$ $\text{ل}(\text{ب}) = \frac{١}{٣}$ $\therefore$ $\text{ل}(\text{ب}^{/}) = ١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

(١) $\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}^{/}) = \text{ل}(\text{أ}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \frac{١}{٦} - \frac{١}{١٨} = \frac{١}{٩}$

(٢) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط $= \text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})$

$= \frac{٤}{٩} - \frac{١}{١٨} = \frac{٧}{١٨}$

(٣) $\text{ل}(\text{أ}^{/} \cup \text{ب}^{/}) = ١ - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = ١ - \frac{١}{١٨} = \frac{١٧}{١٨}$

(٤) ل(أ ∪ ب/) = ل(ب/) + ل(أ ∩ ب)

$$\frac{٢}{٣} + \frac{١}{١٨} = \frac{١٣}{١٨}$$

مثال ٦ : فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العددين على الوجهين الظاهرين أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:

أ = مجموع العددين على الوجهين الظاهرين أكبر من ١١

ب = مجموع العددين على الوجهين الظاهرين أقل من ٥

ج = مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يقبل القسمة على ٤

د = الفرق المطلق بين العددين على الوجهين الظاهرين ٣

الحل

ف = {(١،١)،(١،٢)،.........،(٦،٦)} ∴ ن (ف) =٣٦

أ = { (٦،٦)}

ب = {(١،١) ، (١،٢) ، (١،٣) ، (٣،١) ، (٢،١) ، (٢،٢) }

ج = { (١،٣) ، (٢،٢) ، (٦،٢) ، (٣،١) ، (٣،٥)، (٤،٤) ، (٥،٣) ، (٢،٦) ، (٦،٦) }

د = { (١،٤) ، (٢،٥) ،(٣،٦) (٤،١) ، (٥،٢) ، (٦،٣) } (١،٥)، (٤،٥)، (٦،٥)}

∴ ل (أ) = $\frac{١}{٣٦}$ ، ل(ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$ ،ل(جـ)= $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$ ،ل(د)= $\frac{١}{٤}$

مثال ٧ :إذا كان ل(أ) = ل(أ/) ، ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(أ ∩ ب/) = $\frac{٥}{١٢}$ أوجد

كلا من (١) ل(أ) (٢)ل(أ ∪ ب) (٣) ل(أ − ب)

الحل

(١)ل(أ/) = ١ − ل(أ) ∴ ل(أ) = ١ − ل(أ/)

∵ ل(أ)=ل(أ$'$) ∴ ٢ ل(أ) = ١ ∴ ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ = ل(أ$'$)

(٢) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ - $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{٥}{١٢}$

(٣) ل(أ − ب) = ل(أ) - ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{١}{١٢}$

مثال٨:إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة فى تجربة عشوائية ،وكان ل(أ)= ٢٦,٠ ، ل(ب)= ٣٣,٠ , أوجد:

١) ل(أ$'$∪ ب$'$)   ٢) ل(أ$'$∩ ب$'$)

الحل

ل(أ∪ ب)= ل(أ)+ ل(ب) (لأن الحدثان متنافيان) فيكون ل (أ ∩ ب) = صفر

= ٢٦,٠ + ٣٣,٠ = ٥٩,٠

∴ ل(أ$'$ ∪ ب$'$) = ١- ل(أ ∩ ب) = ١ − صفر = ١

ل(أ$'$∩ ب$'$) = ١- ل(أ ∪ ب) = ١- ٥٩,٠ = ٤١,٠

مثال٩ : ٣ أشخاص أ، ب، جـ يتنافسون فى سباق، فإذا كان احتمال فوز ب =ضعف احتمال فوز أ ، و احتمال فوز جـ = ثلاثة أمثال احتمال فوز أ. وأن شخصاً واحداً سيفوز فى السباق، اوجد (١) احتمال فوز أ (٢) احتمال فوز ب أو جـ بالسباق

الحل

نفرض أن احتمال فوز(أ) = س ∴ ل(ب) =٢س ، ل(جـ)=٣س

∵ الأحداث متنافية لأن متسابق واحد فقط سيفوز بالسباق

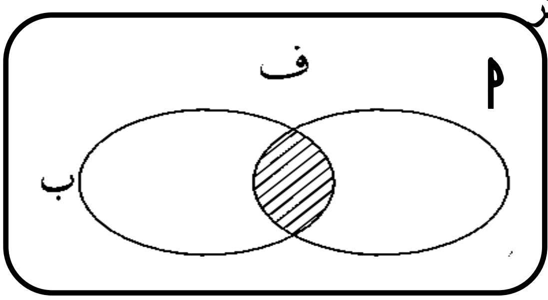
∴ مجموع الاحتمالات = ١

∴ س +٢س+٣س = ١ ∴ ٦س =١ ∴ س = $\frac{١}{٦}$

∴(١) ل (أ)= $\frac{١}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (جـ) = $\frac{١}{٢}$

(٢) ل (ب ∪ جـ) = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{٦}$

مثال١٠ :فصل به ٤٠ طالب من بينهم ٣٠ طالب يدرسون الفلسفة ، ٢٤ طالب يدرسون التاريخ ، ٢٠ طالب يدرسون المادتين معا اختير طالب عشوائيا
اوجد احتمال أن يكون الطالب : (١) يدرس الفلسفة　　　(٢) يدرس التاريخ
(٤) لا يدرس الفلسفة　(٤) يدرس الفلسفة فقط
(٥) يدرس إحدى المادتين على الأقل
(٦) يدرس إحدى المادتين على الأكثر
(٧) يدرس إحدى المادتين فقط
(٨) لا يدرس أي من المادتين



الحل

ف = عدد الطلاب = ٤٠

(١)نفرض عدد الطلاب الذين يدرسون الفلسفة = م　∴ل(م) = $\frac{٣٠}{٤٠}$

(٢) وعدد الطلاب الذين يدرسون التاريخ = ب　∴ ل(ب) = $\frac{٢٤}{٤٠}$

ل (م ∩ ب) = $\frac{٢٠}{٤٠}$

(٣)ل (م/) = ١ − $\frac{٣٠}{٤٠}$ = $\frac{١}{٤}$

(٤)ل(م − ب) = $\frac{٣٠}{٤٠}$ − $\frac{٢٠}{٤٠}$ = $\frac{١}{٤}$

(٥)ل(م ∪ ب) = $\frac{٣٠}{٤٠}$ + $\frac{٢٤}{٤٠}$ − $\frac{٢٠}{٤٠}$ = $\frac{١٧}{٢٠}$

(٦)ل(م/ ∪ ب/) = ١ − $\frac{٢٠}{٤٠}$ = $\frac{١}{٢}$

(٧)ل(يدرس إحدى المادتين فقط) = $\frac{١٧}{٢٠}$ − $\frac{٢٠}{٤٠}$ = $\frac{٧}{٢٠}$

(٨)ل(م/ ∩ ب/) = ١ − $\frac{١٧}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

تمارين على الباب الأول

*) إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان

ل(ٲ)= ,٦ ، ل(ب) = ,٥ ، ل(ٲ $\cap$ب) = ,٢

أوجد (١)ل (ٲ $\cap$ ب$'$) ٢) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

٣) ل (ٲ$'$ $\cup$ ب$'$) ٤) ل(ٲ $\cup$ب$'$) ٥) ل(ب$'$)

٦) ل(ٲ $\cap$ب)$'$ ٧) ل(ٲ $\cup$ ب)$'$ ٨) ل(ٲ $-$ ب)$'$

*) إذا كان ٲ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة فى تجربة عشوائية

،وكان ل(ٲ)=٥٦, ، ل(ب)= ٣٦ , أوجد:

١)ل(ٲ$'$$\cup$ ب$'$)$'$ ٢)ل(ٲ$'$$\cap$ ب$'$) ٣) ل(ٲ $\cup$ب$'$)

٤) ل(ٲ $-$ ب)$'$ ٥) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

*)صندوق يحتوى على ٢٠ بطاقة مرقمة من ١ : ٢٠ سحبت بطاقة واحدة

عشوائيا أوجد احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة :

١) يقبل القسمة على ٣ و ٥ ٢) يقبل القسمة على ٣ أو ٥

٣) يقبل القسمة على ٣ فقط ٤) يقبل القسمة على أحد العددين على الأكثر

٥) يقبل القسمة على أحد العددين فقط

*) إذا كان احتمال أن يكون الجو عاصف = ,٧ وأن يكون الجو ملبد بالغيوم

= ,٤ وأن يكون الجو عاصف وملبد بالغيوم = ,٢

اوجد احتمال أن يكون الجو : ١)عاصف أو ملبد بالغيوم

٢) عاصف فقط ٣) جميل

*)إذا كان احتمال نجاح طالب في مادة الأحصاء=$\frac{٩}{١٠}$ واحتمال نجاحه فى

الاقتصاد = $\frac{٧}{١٠}$ واحتمال نجاحه فى إحدى المادتين على الأقل =$\frac{١}{٢}$أوجد

١) احتمال نجاحه فى المادتين معا

٢) احتمال نجاحه في الأحصاء فقط

٣) احتمال نجاحه في إحدى المادتين على الأكثر

٤) احتمال نجاحه في إحدى المادتين فقط

٥) احتمال رسوبه

*) إذا كان ﺃ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان

ل(ﺃ)= $\frac{3}{4}$، ل(ب′) = $\frac{1}{3}$، ل(ﺃ∩ب) = $\frac{1}{2}$أوجد:

ل(ﺃ − ب) ، ل(ﺃ′ ∪ ب′)، ل(ﺃ ∪ب′)

*) من مجموعة الأرقام{٢،٣،٤،٥}، كون عددا من رقمين مختلفين أحسب

احتمال أن يكون ١) العدد رقم آحاده أولياً و رقم العشرات زوجي

٢)العدد رقم آحاده أولياً أو رقم العشرات زوجي

*) يصوب لاعبانﺃ، ب نحو هدف ثابت فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب

ﺃ الهدف = $\frac{1}{4}$ واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف = $\frac{1}{3}$واحتمال أن

يصيب اللاعبان الهدف معا = $\frac{1}{6}$ أوجد احتمال:

١) إصابة الهدف   ٢) إصابة الهدف من اللاعب ب فقط

٣) احتمال إصابة الهدف من أحد اللاعبين دون الآخر

٤) احتمال عدم إصابة الهدف

*) إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان ا ،ب حدثين من ف

وكان ل(ﺃ∪ ب) =$\frac{5}{6}$ ، ل(ب) = $\frac{5}{12}$،و كان عدد النواتج التي تؤدى لوقوع

الحدث ﺃ= ١٣ وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة=٢٤ أوجد :

١) احتمال وقوع ا ، ب معا   ٢) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط

*) إذا كان ﺃ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية وكان

ل(ﺃ)= $\frac{1}{4}$، ل(ب) = س، ل(ﺃ∪ ب)=$\frac{7}{8}$ أوجد قيمة س في كل من الحالتين

١) ﺃ ، ب حدثان متنافيان   ٢) ﺃ ⊃ ب

*) إذا كان ﺃ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية وكان

ل(ﺃ∩ب) = $\frac{1}{4}$، ل(ﺃ − ب) = $\frac{7}{20}$ ، ل(ب − ﺃ) = $\frac{1}{12}$ أوجد ل(ﺃ) ، ل(ب)

، ل(ﺃ ∪ب/) ، احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر

الباب الثانى

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الإحتمالية

المتغير العشوائى إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن المتغير العشوائى هو دالة من ف ← ح

المتغير العشوائى المتقطع : يتكون مداه من مجموعة من الأعداد الحقيقية

المتغير العشوائى المتصل: ويتكون مداه من فترة مفتوحة أو مغلقة

التوزيع الاحتمالى هو مجموعة من الأزواج المرتبة (س ر، د(س ر))

وتوضع بجدول يسمى جدول التوزيع الاحتمالى كما يلى:

س ر	س$_1$	س$_2$	.....	س ن
د(س ر)	د(س$_1$)	د(س$_2$)	.....	د(س ن)

وشروط تحقيق التوزيع الاحتمالى هي

١) د(س ر) ≥ صفر لجميع قيم ر =١، ٢ ، ٣، ..... ، ن

٢) د(س$_1$) + د(س$_2$) + ... + د(س ن) = ١

الوسط الحسابي (التوقع)(μ) ، التباين (σ^2)

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي(σ)

قوانين هامة

اذا كان س متغيراً عشوائيَّ متقطعاً يأخذ القيم س$_1$،س$_2$،......س$_ن$

باحتمالات د(س$_1$)،د(س$_2$)،....د(س$_ن$) على الترتيب فإن

١)التوقع (الوسط الحسابي) = μ ∴ μ = مجـ$_{ر=١}^{ن}$ س$_ر$. د(س$_ر$)

٢)التباين = $\sigma^٢$ ∴ $\sigma^٢$ = م ـ $\mu^٢$

٣)الانحراف المعياري = σ = $\sqrt{\sigma^٢}$

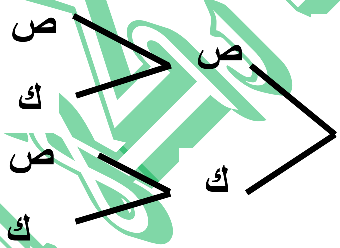
٤) معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}}$ × ١٠٠

ولإيجاد μ ، σ ،..... نكون جدول من أربعة أعمدة

وهى س$_ر$، د(س$_ر$)، س$_ر$. د(س$_ر$)، س$_ر$ ^{٢} .د(س$_ر$)

مثال١: في تجربة القاء قطعة عملة مرتين متتاليتين وكان المتغير العشوائى س يعبر عن " عدد الصور " أوجد التوزيع الاحتمالى

الحل



عدد الصور ٢ ١ ١ ٠

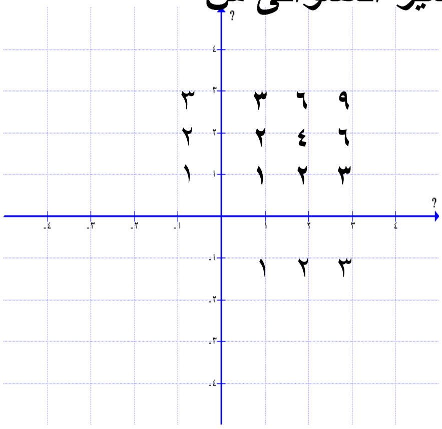
ف= { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) }

س$_ر$ = { ٠ ، ١ ، ٢ } مدى المتغير العشوائى (متقطع)

س$_ر$	٠	١	٢
د(س$_ر$)الاحتمالات	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

لاحظ أن مجموع الاحتمالات = ١

مثال٢ :صندوقان بكل منهما ٣ كرات مرقمة من ١ : ٣ سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق وعرف المتغير العشوائى س بأنه " حاصل ضرب العددين على الكرتين المسحوبتين " أوجد التوزيع الأحتمالى للمتغير العشوائى س

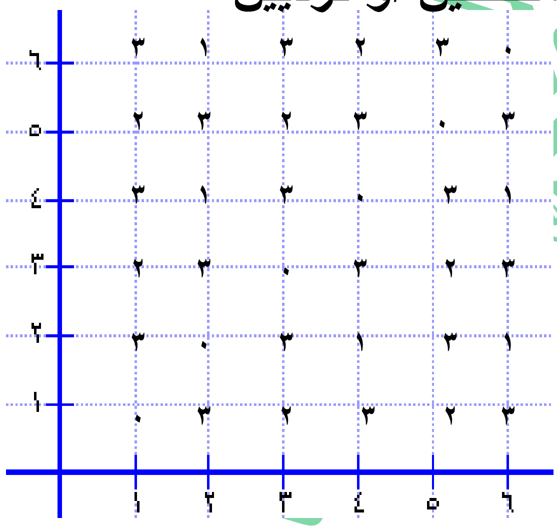


الحل

$س_ر = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٩\}$

$س_ر$	١	٢	٣	٤	٦	٩
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

مثال٣: في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين كان المتغير العشوائى س يأخذ القيم ٠،١،٢،٣حسب كون العددين الظاهرين متساويين أو زوجيين مختلفين أو فرديين مختلفين أو أحدهما زوجى والآخر فردى على الترتيب أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س



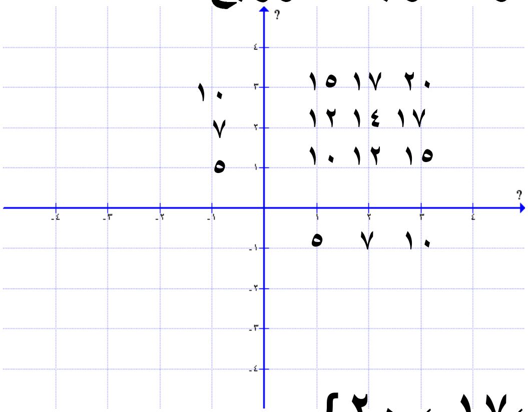
الحل

$س_ر = \{٠ ، ١ ، ٢ ، ٣\}$

التوزيع الاحتمالى

$س_ر$	٠	١	٢	٣
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٢}$

مثال٤: توجد ثلاث طرق تصل بين منزل طالب ومدرسته فإذا كان الطريق ﺃ يستغرق ٥ دقائق والطريق ب يستغرق ٧ دقائق والطريق ﺣ يستغرق ١٠ دقائق وكان المتغير العشوائى س يعبر عن مجموع زمنى الذهاب والعودة أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير س



الحل

ف = {(ﺃ،ﺃ)، (ﺃ،ب)،(ﺃ،ﺣ)، (ب،ﺃ)، (ب،ب)،(ب،ﺣ)، (ﺣ،ﺃ)،(ﺣ،ب)،(ﺣ،ﺣ)}

$س_ر$ = {١٠ ، ١٢ ، ١٤، ١٥ ،١٧ ، ٢٠}

$س_ر$	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧	٢٠
د($س_ر$)	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

مثال٥:في مثال ١ أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى ومعامل الاختلاف

الحل

$س_ر$	د($س_ر$)	$س_ر$. د($س_ر$)	$س_ر^٢$. د($س_ر$)
٠	$\frac{١}{٤}$	٠	٠
١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$
٢	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١
	المجموع=١	μ = ١	م = $\frac{٣}{٢}$

الوسط الحسابى = التوقع = μ = ١

التباين = $\sigma^٢$ = م − $\mu^٢$ = $\frac{٣}{٢}$ − ١ = $\frac{١}{٢}$

الانحراف المعيارى= σ = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{\frac{١}{٢}}$ = ٠,٧٠٧ ٠

معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}}$ = $\frac{\sigma}{\mu}$ × ١٠٠ =

$\frac{٠,٧٠٧}{١}$ × ١٠٠ = ٧٠,٧٪

مثال٦:إذا كان التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع س معطى

بالجدول التالى: **أوجد قيمة ك ومعامل الاختلاف**

$س_ر$	٠	١	٢	٣	٤
د($س_ر$)	$\frac{١}{١٢}$	ك	$\frac{١}{٦}$	ك	$\frac{١}{١٢}$

الحل

∵ مجموع الاحتمالات = ١ ∴ ٢ك + $\frac{١}{١٢}$ + $\frac{١}{١٢}$ + $\frac{١}{٦}$ = ١

∴ ٢ك = ١ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ك = $\frac{١}{٣}$

$س_ر$	د($س_ر$)	$س_ر$. د($س_ر$)	$س_ر^٢$. د($س_ر$)
٠	$\frac{١}{١٢}$	٠	٠
١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$
٢	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٢}{٣}$
٣	$\frac{١}{٣}$	١	٣
٤	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٤}{٣}$
	المجموع= ١	μ = ٢	م = $\frac{١٦}{٣}$

الوسط الحسابى = التوقع = μ = ٢

التباين = $\sigma^{٢}$ = م − $\mu^{٢}$ = $\frac{١٦}{٣}$ − ٤ = $\frac{٤}{٣}$

الانحراف المعيارى = σ = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{\frac{٤}{٣}}$ = ١,٥١٤

معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}}$ = $\frac{\sigma}{\mu}\times ١٠٠$ =

= $\frac{١,٥١٤}{٢}$ × ١٠٠ = ٥٧,٧٪

مثال ٧: إذا كان س متغير عشوائى متقطع توزيعه الاحتمالى

$س_ر$	٠	٢	أ	٤
$د(س_ر)$	ك	٢ك	$\frac{١}{٣}$	٥ك

فإذا كان الوسط الحسابى μ = ٣ أوجد ك ، أ

الحل ∵ مجموع الاحتمالات = ١ ∴ ٨ك + $\frac{١}{٣}$ = ١

∴ ٨ ك = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ك = $\frac{١}{١٢}$

∵ μ = ٠ × ك + ٢ × ٢ ك + أ × $\frac{١}{٣}$ + ٤ × ٥ ك = ٣

∴ $\frac{١}{٣}$ أ + ٢٤ك = ٣ ∴ $\frac{١}{٣}$ أ + ٢٤ × $\frac{١}{١٢}$ = ٣

∴ $\frac{١}{٣}$ أ = ١ ∴ أ = ٣

مثال ٨: أغسطس ٩٨ : إذا كان س متغير عشوائى متقطع توزيعه

الاحتمالى يحدد بالدالة د(س) = $\frac{أ + س}{١٥}$ حيث س = −٢، −٢، ٠، ١

أوجد قيمة أ والتوزيع الاحتمالى ومعامل الاختلاف

الحل

د(−٢) = $\frac{أ − ٢}{١٥}$ ، د(−١) = $\frac{أ − ١}{١٥}$

$د(٠) = \frac{أ}{١٥}$ ، $د(٢) = \frac{أ+٢}{١٥}$

∵ مجموع الاحتمالات = ١ ∴ $\frac{أ-٢}{١٥} + \frac{أ-١}{١٥} + \frac{أ}{١٥} + \frac{أ+٢}{١٥} = ١$

∴ $٤أ - ١ = ١٥$ ∴ $أ = ٤$

∴ $د(-٢) = \frac{٢}{١٥}$ ، $د(-١) = \frac{٣}{١٥}$ ، $د(٠) = \frac{٤}{١٥}$ ، $د(٢) = \frac{٦}{١٥}$

∴ التوزيع الاحتمالى

$س_ر$	−٢	−١	٠	٢
$د(س_ر)$	$\frac{٢}{١٥}$	$\frac{٣}{١٥}$	$\frac{٤}{١٥}$	$\frac{٦}{١٥}$

تمارين على المتغير العشوائى المتقطع

*في تجربة إلقاء قطعة عملة ثلاث مرات كان المتغير العشوائى س يعبر عن عدد الكتابات أوجدد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س ثم أوجد معامل الاختلاف

*في التمرين السابق إذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن عدد الصور عدد الكتابات أوجد التوزيع الاحتمالى والانحراف المعيارى

*كيس يحتوى على خمس كرات مرقمة من ١ :٥ سحبت من الكيس كرتان عشوائيا الواحدة بعد الاخرى مع الاحلال وكان المتغير العشوائى س يعبر عن أكبر العددين على الكرتين المسحوبتين أوجد الوسط الحسابى ومعامل الاختلاف

*في تجربة القاء حجر نرد مرتين متتاليتين كان المتغير العشوائى س يعبر عن مجموع العددين على الوجهين الظاهرين أوجد التوزيع الاحتمالى

﴿في التمرين السابق إذاكان المتغير العشوائى س يعبر عن الفرق المطلق بين العددين على الوجهين الظاهرين أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغيرالعشوائى س

﴿يلعب لاعب اللعبة الآتية يلقى قطعتى عملة متمايزتين مرة واحدة وعند حصوله على صورة واحدة يكسب جنيها وعند حصوله على صورتان يكسب جنيهان أما عندما لاتظهر أى صورة يخسر ثلاثة جنيهات أوجد التوزيع الاحتمالى ومعامل الاختلاف

﴿ إذا كان التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع س معطى بالجدول التالى: أوجد قيمة ك ومعامل الاختلاف

$س_ر$	٠	١	٢	٣	٤
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٦}$	ك	$\frac{١}{١٢}$

﴿ إذا كان س متغير عشوائى متقطع توزيعه الاحتمالى يحدد بالدالة د(س) = $\frac{ا + س}{١٦}$ حيث س = −٢، −١، ٣، ٤

أوجد قيمة ا والتوزيع الاحتمالى ومعامل الاختلاف

﴿: إذا كان س متغير عشوائى متقطع توزيعه الاحتمالى

$س_ر$	١	٢	ا	٦
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٦}$	٢ك

فإذا كان الوسط الحسابى μ = $\frac{٤٩}{١٢}$ أوجد ك ، ا ($\frac{١}{٢}$،٤)

﴿ إذا كان μ= ١,٤ أوجد ا، ب للتوزيع الاحتمالى :

$س_ر$	−٢	−١	١	٣	٤
$د(س_ر)$	ا	,١	,٢	,٣	ب

المتغير العشوائى المتصل (دالة الكثافة)

المتغير العشوائى المتصل يكون مداه فترةويكون

ل(ᒥ ≤س≤ب)= مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوق

محور السينات من ᒥ الى ب

ملاحظات:١) مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$(القاعدة × الارتفاع)

٢) مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه

٣) مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

مثال١ :س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

د (س) = $\begin{cases} \frac{س+٤}{٢٤} & \text{حيث } ٠ \le س \le ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$

أثبت أن ١) ل(٠ ≤س≤ ٤) = ١

٢)أوجد ل(٠ ≤س≤ ٣) ٣) اوجد ل (س ≥٢)

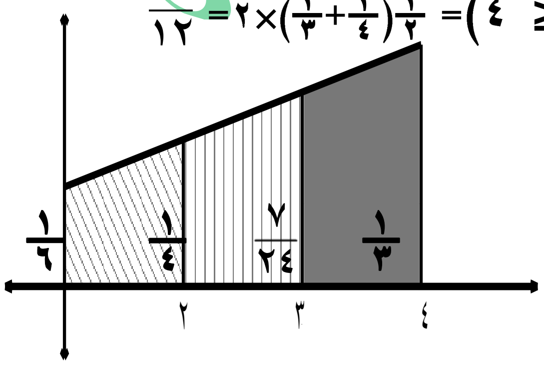
الحل

د(٠) = $\frac{١}{٦}$ ، د(٢)= $\frac{١}{٤}$ ، د(٣)= $\frac{٧}{٢٤}$ ، د(٤) =$\frac{١}{٣}$

١) ل(٠ ≤س≤ ٤) = $\frac{١}{٢}$($\frac{١}{٦}$+ $\frac{١}{٣}$)× ٤ = ١

٢) ل(٠ ≤س≤ ٣) = $\frac{١}{٢}$($\frac{١}{٦}$+$\frac{٧}{٢٤}$)× ٣ = $\frac{١١}{١٦}$

٣) ل (س ≥٢) = ل(٢ ≤س≤ ٤)= $\frac{١}{٢}$($\frac{١}{٤}$+$\frac{١}{٣}$)×٢= $\frac{٧}{١٢}$



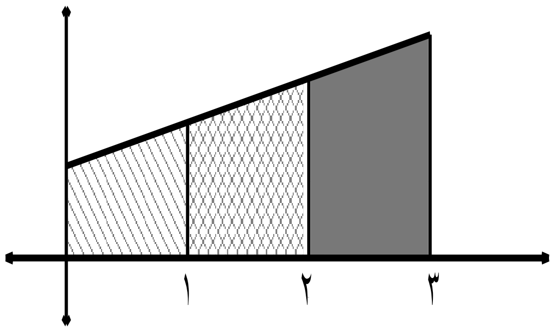
مثال٢:س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

د (س) = { $\frac{٢س+١}{١٢}$ حيث ٠ ≤س ≤ ٣
 صفر فيما عدا ذلك

أثبت أن ١) ل(٠ ≤س ≤ ٣) = ١

٢)أوجد ل(١ ≤س ≤ ٣) ٣) اوجد ل (س ≥٢)

الحل



د(٠) = $\frac{١}{١٢}$ ، د(١) = $\frac{١}{٤}$ ، د(٢)= $\frac{٥}{١٢}$ ، د(٣) =$\frac{٧}{١٢}$

١) ل(٠ ≤س ≤ ٣) =$\frac{١}{٢}$($\frac{١}{١٢}$+ $\frac{٧}{١٢}$)× ٣= ١

٢) ل(١ ≤س ≤ ٣) = $\frac{١}{٢}$($\frac{١}{٤}$+$\frac{٧}{١٢}$)× ٢ = $\frac{٥}{٢٤}$

٣) ل(س ≥٢) = ل(٢ ≤س ≤ ٣)= $\frac{١}{٢}$($\frac{٥}{١٢}$+$\frac{٧}{١٢}$)×١= $\frac{١}{٢}$

مثال٣:س متغير عشوائى متصل وكانت:

د (س) = { $\frac{س+١}{٨}$ حيث ٢ ≤س ≤ ٤
 صفر فيما عدا ذلك

أثبت أن ١) الدالة د دالة كثافة احتمال

٢)أوجد ل(١ ≤س ≤ ٣) ٣) اوجد ل (٣≤س ≤٧)

الحل

د(٢)= $\frac{٣}{٨}$، د(٣)= $\frac{١}{٢}$ ، د(٤) =$\frac{٥}{٨}$

١) ل(٢ ≤س ≤ ٤) = $\frac{١}{٢}$($\frac{٣}{٨}$+ $\frac{٥}{٨}$)× ٢ = ١

٢) ل(٢ ≤ س ≤ ٣) = $\frac{١}{٢}(\frac{٣}{٨}+\frac{١}{٢})\times ١ = \frac{٧}{١٦}$

٣) ل(٣ ≤ س ≤ ٤) = $\frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}+\frac{٥}{٨})\times ١ = \frac{٩}{١٦}$

مثال٤ :س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

د (س) = { $\frac{\text{أس} + ١}{١٢}$ حيث ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

أوجد قيمة أ ثم :

١)أوجد ل(١ ≤ س ≤ ٣)　　٢) اوجد ل (س ≤ ٢)

الحل

∵ د دالة كثافة ∴ ل(٠ ≤ س ≤ ٣) = ١

د(٠) = $\frac{١}{١٢}$ ، د(١) = $\frac{٣أ+١}{١٢}$

$\frac{١}{٢}(\frac{١}{١٢}+\frac{٣أ+١}{١٢})\times ٣ = ١$ ∴ $\frac{٣أ+٢}{٨} = ١$

∴ ٣أ + ٢ = ٨ ∴ ٣أ = ٦ ∴ أ = ٢ ثم أكمل ....

مثال٤ :س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

د (س) = { $\frac{\text{أ} - ٢\text{س}}{١٨}$ حيث ٢ ≤ س ≤ ٥ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

أوجد قيمة أ ثم :

١)أوجد ل(٤ ≤ س ≤ ٦)　　٢) اوجد ل (س ≤ ٣)

الحل

د(٢) = $\frac{أ - ٤}{١٨}$　　د(٥) = $\frac{أ - ١٠}{١٨}$

∵ د دالة كثافة ∴ل(٢ ≤ س ≤ ٥) = ١

$\therefore \frac{١}{٢}\left(\frac{أ-٤}{١٨}+\frac{أ-١٠}{١٨}\right)\times ٣ = ١ \quad \therefore \frac{٢أ-١٤}{١٢} = ١$

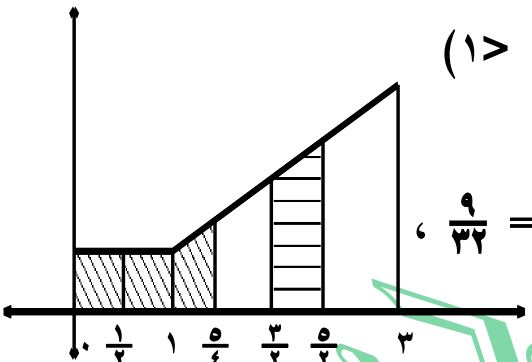
$\therefore ٢أ - ١٤ = ١٢ \quad \therefore ٢أ = ٢٦ \quad \therefore أ = ١٣$ ثم أكمل .....

مثال٥: س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} & \text{حيث } ٠ \le س \le ١ \\ \frac{س+١}{٨} & \text{حيث } ١ < س \le ٣ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد ١) أوجد ل$(س \le \frac{٥}{٤})$　　٢) ل$(\frac{٣}{٢} < س < \frac{٥}{٢})$

٣) ل$(\frac{١}{٢} < س < ١)$



الحل

$د(٠) = \frac{١}{٤}$ ، $د(١) = \frac{١}{٤}$ ، $د(\frac{٥}{٤}) = \frac{٩}{٣٢}$ ،

$د(\frac{٣}{٢}) = \frac{٥}{١٦}$ ، $د(\frac{٥}{٢}) = \frac{٧}{١٦}$

$ل(س \le \frac{٥}{٤}) = ل(٠ \le س \le ١) + ل(١ \le س \le \frac{٥}{٤})$

$= \frac{١}{٤}\times ١ + \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٤}+\frac{٩}{٣٢}\right)\times\frac{١}{٤} = \frac{٨١}{٢٥٦}$

٢) $ل(\frac{٣}{٢} < س < \frac{٥}{٢}) = \frac{١}{٢}\left(\frac{٥}{١٦}+\frac{٧}{١٦}\right)\times ١ = \frac{٣}{٨}$

مثال٦: س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

$$د(س) = \begin{cases} س & \text{حيث } ٠ \le س \le ١ \\ أ - س & \text{حيث } ١ < س \le ٢ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة ١) أ　　٢) ل$(\frac{١}{٢} < س < \frac{٣}{٢})$

الحل

$د(٠) = ٠$ ، $د(١) = ١$ ، $د(٢) = أ - ٢$ $\because$ د دالة كثافة

∴ ل(٠ ≤س≤ ١) + ل(١ > س ≥ ٢) = ١

∴ $\frac{١}{٢}$(٠ + ١) × ١ + $\frac{١}{٢}$ (١ + م - ٢) × ١ = ١

∴ م = ٢

د($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ ، د(١) = ١ ، د ($\frac{٣}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$

∴ ل($\frac{١}{٢}$ > س > $\frac{٣}{٢}$) = ل($\frac{١}{٢}$ > س > ١) + ل(١ > س > $\frac{٣}{٢}$)

= $\frac{١}{٢}$($\frac{١}{٢}$ + ١) × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$(١ + $\frac{١}{٢}$) × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

تمارين على المتغير العشوائى المتصل (دالة الكثافة)

* س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

د (س) = { $\frac{٢س - ١}{٦}$ حيث ١ ≤س≤ ٣ ، صفر فيما عدا ذلك

أثبت أن ١) ل(١ ≤س≤ ٣) = ١

٢)أوجد ل(١ ≤س≤ ٢)　　٣) اوجد ل (س ≤٢)

* س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

د (س) = { ٢س حيث ٠ ≤س≤ ١ ، صفر فيما عدا ذلك

أثبت أن ١) ل(٠ ≤س≤ ١) = ١

٢)أوجد ل($\frac{١}{٢}$ ≤س≤ $\frac{٣}{٤}$)　　٣) اوجد ل (س ≤$\frac{١}{٢}$)

* س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

د (س) = { $\frac{٢س + ٣}{٢٤}$ حيث ١ ≤س≤ ٤ ، صفر فيما عدا ذلك

أثبت أن ١) ل(١ ≤ س ≤ ٤) = ١

٢)أوجد ل(٢ ≤ س ≤ ٥) ٣) اوجد ل (س ≥ ٣)

* س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

$$د(س) = \begin{cases} أس + \frac{١}{٨} & \text{حيث } ١ \le س \le ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجدقيمة أ ثم أوجد ل(٠ ≤ س ≤ ٣)

* س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١٣ - ٢س}{أ} & \text{حيث } ٢ \le س \le ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة أثم :

١)أوجد ل(٣ ≤ س ≤ ٧) ٢) اوجد ل (س ≥ ٤)

* س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١٥ - أس}{٣٠} & \text{حيث } ٢ \le س \le ٧ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة أثم :

١)أوجد ل(٢ ≤ س ≤ ٤) ٢) اوجد ل (س ≥ ٥)

* س متغير عشوائى متصل دالة كثافة الاحتمال له:

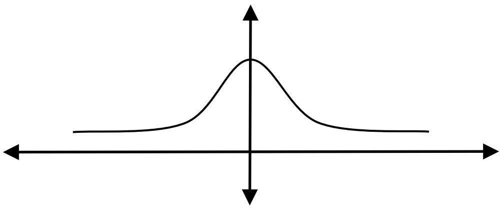
$$د(س) = \begin{cases} \frac{أس - ١}{٤٤} & \text{حيث } ٢ \le س \le ٦ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد قيمة أثم أوجد ل(٤ ≤ س ≤ ٦)

التوزيع الطبيعى

المتغير الطبيعى العشوائى هومتغير متصل مداه]-∞،∞[وتمثل دالة كثافة الاحتمال له بمنحنى الجرس (جاوس)

خواص المنحنى الطبيعى:

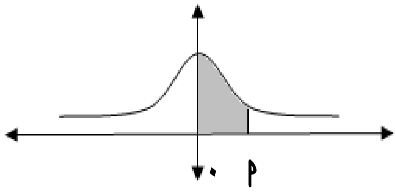


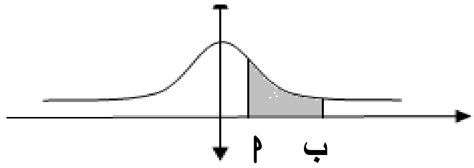
*له قمة واحدة وطرفاه يمتدان الى∞

*له محور تماثل عند س = μ

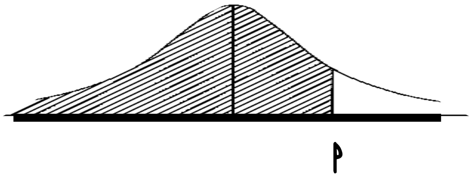
* مساحة المنطقة تحت المنحنى الطبيعى وفوق محور السينات = ١

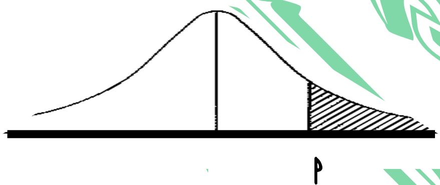
حسا ب الاحتمالات لمتغير طبيعى (معيارى) : μ=٠ ، σ = ١





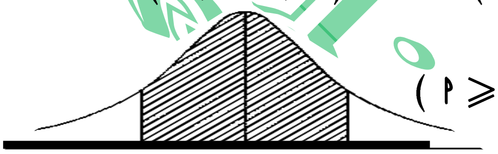
ل(٠≤ص≤ ا) من الجدول مباشرة ل (ا≤ص≤ ب) = ل(٠≤ص≤ ب)- ل(٠≤ص≤ ا)





ل(ص ≤ ا)= ٠,٥+ ل(٠≤ص≤ ا)، ل (ص ≥ ا) = ٠,٥- ل(٠≤ص≤ ا)

ل(-ا≤ص≤ ب) = ل(٠≤ص≤ ب)+ ل(٠≤ص≤ ا)



مثال١:إذا كان ص متغيراً عشوائياً طبيعيا معياريا فأوجد:

١) ل(ص≥٢)　　　　٢) ل(ص ≤٢)

٣) ل(-٢,٧٥< ص <١,٦٤)　　　　٤) ل(- ٢,١٧≤ ص ≤ -١)

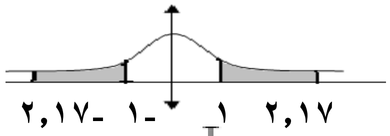
٥) ل(-٢,٣٤ ≤ ص≤ ٢,٣٤)　　　　٦) ل(١≤ص≤ ٢)

الحل

١) ل(ص≥٢) = ٠,٥ − ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

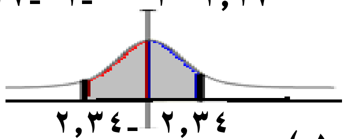
٢)ل(ص ≤٢) = ٠,٥ + ٠,٤٧٧٢ =٠,٩٧٧٢

٣) ل(−٢,٧٥< ص <١,٦٤) =٠,٤٤٩٥ +٠,٤٩٧٠= ٠,٩٤٦٥



٤)ل(− ٢,١٧ ≤ص ≤ −١) = ل(١ ≤ ص ≤ ٢,١٧)

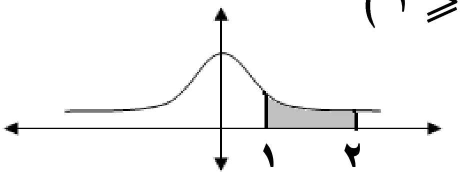
٥) ل(−٢,٣٤ ≥ ص≥ ٢,٣٤) = ٢ل(٠≥ ص ≥ ٢,٣٤)



= ٢× ٠,٤٩٠٤ = ٠,٩٨٠٨

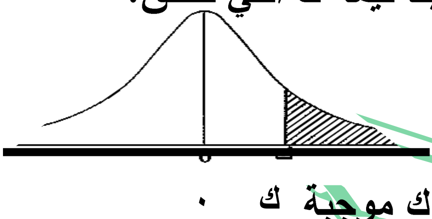
٦) ل(١≤ص≤٢) = ل(٠≤ص≤ ٢) − ل(٠≤ص≤ ١)

= ٠,٤٧٧٢ − ٠,٣٤١٣ = ٠,١٠٥٩



مثال٢: إذا كان ص متغير عشوائياً طبيعيا معياريا، فأوجد قيمة ك التي تحقق:

١−ل(ص ≥ ك)= ٠,١٢٥٦



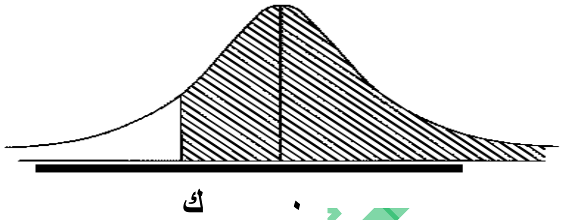
الحل

إذا كانت علامة التباين > والمساحة < ٠,٥ ∴ ك موجبة

ل(صفر ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥ − ٠,١٢٥٦ = ٠,٣٧٤٤ ومن جدول المساحات

∴ ك = ١,١٥

٢−ل(ص > ك) = ٠,٧١٨٤

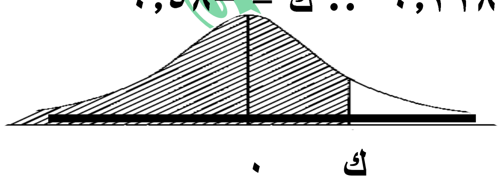


الحل

إذا كانت علامة التباين > والمساحة > ٠,٥ ∴ ك سالبة

ل(صفر <ص < ك) = ٠,٧١٨٤ − ٠,٥ = ٠,٢١٨٤ ∴ ك = −٠,٥٨

٣−ل(ص< ك) = ٠,٩٧٧٢



الحل

إذا كانت علامة التباين < والمساحة > ٠,٥ ∴ ك موجبة

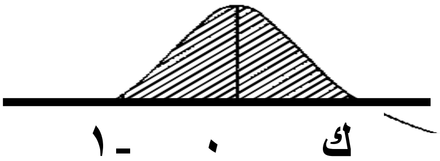
ل(صفر < ص< ك) = ٠,٩٧٧٢ − ٠,٥ = ٠,٤٧٧٢ ∴ ك = ٢

٤− ل(−١ < ص< ك) = ٠,٦١٨٧

الحل

ل (صفر < ص< ك) = ٠,٦١٨٧ − ل(٠ < ص < ١)

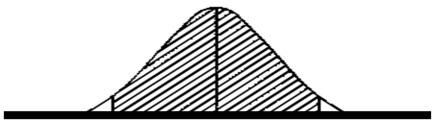
= ٠,٦١٨٧ − ٠,٣٤١٣ ∴ ك = ٠,٧٦



٥− ل(− ك < ص < ك) = ٠,٦٨٢٦

ل (− ك < ص < ك) = ٢ل (٠ < ص < ك)

ل(صفر < ص < ك) = ٠,٣٤١٣ ∴ ك = ١



حساب الاحتمالات للمتغير الطبيعي غير المعياري

للتحويل من متغير طبيعي غير معياري لمتغير طبيعي معياري

نستخدم العلاقة الآتية : $\boxed{ص = \frac{س - \mu}{\sigma}}$

مثال ١ : إذا كان س متغير طبيعى وسطه الحسابى μ وإنحرافه المعيارى σ

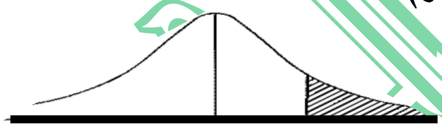
اوجد :أ − ل(س > μ). ب − ل(س> $\mu + ٢\sigma$)

جـ − ل($\mu + \sigma$ < س < $\mu + ٢\sigma$)

الحل

أ − ل (س> μ) = ل (ص> $\frac{\mu - \mu}{\sigma}$) = ل(ص> صفر) = ٠.٥

ب − ل(س> $\mu + ٢\sigma$) = ل (ص > $\frac{\mu + ٢\sigma - \mu}{\sigma}$)

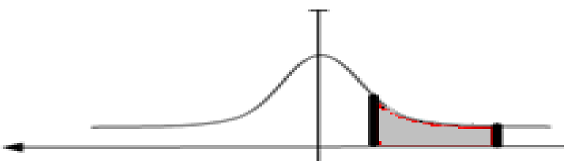


= ل(ص > ٢)= ٠,٥ − ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

جـ − ل($\mu + \sigma$ < س < $\mu + ٢\sigma$) = ل ($\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}$ < ص < $\frac{\mu + ٢\sigma - \mu}{\sigma}$)

= ل(١ ≤ ص ≤ ٢) = ل(٠≤ص≤ ٢) − ل(٠≤ص≤ ١)

= ٠,٤٤٧٢ − ٠,٣٤١٣ = ٠,١٠٥٩



مثال٢: إذا كانت أوزان الطلاب فى أحدى الكليات تتبع توزيعا طبيعياً وسطه الحسابي μ = ٦٨ كجم، تباينه ٤ كجم^{٢}.

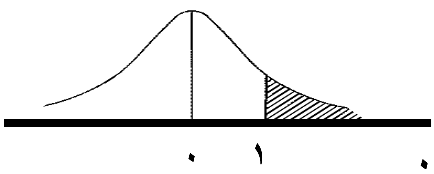
فأوجد ١ – احتمال أن يكون الوزن أكبر من ٧٠ كجم.

ب- النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٥ كجم، ٧٢ كجم.

ج- عدد الطلاب الذين يزيد وزنهم عن ٦٦ كجم إذا كان عدد طلاب الكلية = ٢٠٠٠ طالب.

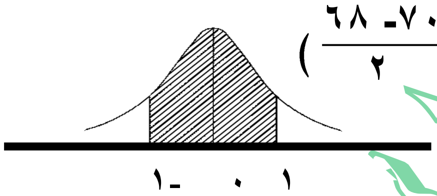
الحل

μ = ٦٨ ، التباين = ٤ ∴ σ = ٢



١) ل (س > ٧٠) = ل (ص > $\frac{٧٠-٦٨}{٢}$)

= ل (ص >١) = ٠,٥ – ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧

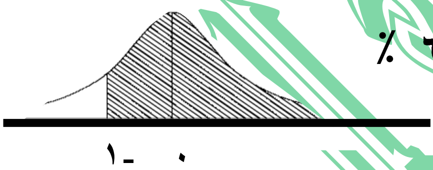


٢) ل (٦٥ < س < ٧٠) = ل ($\frac{٦٦-٦٨}{٢}$ < ص < $\frac{٧٠-٦٨}{٢}$)

= ل(-١< ص < ١) = ٢ ل(٠ < ص < ١)

=٢ × ٠,٣٤١٣= ٠,٦٨٢٦

∴النسبة المئوية = ٠,٦٨٢٦×١٠٠ = ٦٨,٢٦ ٪



٣) ل(س > ٦٦) = ل (ص > $\frac{٦٦-٦٨}{٢}$)

= ل (ص > – ١) = ٠,٥ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨٤١٣

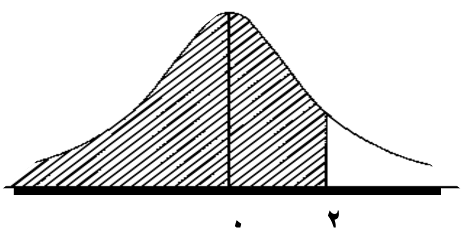
∴عدد الطلاب = ٠,٨٤١٣× ٢٠٠٠ = ١٦٨٢,٦ =١٦٨٣ طالب

مثال ٣: إذا كان الدخل الشهري لمجموعة مكونة من ١٠٠٠ عامل يتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي ٤٠٠ جنيها وانحرافه المعيارى ٥٠ جنيها فأوجد عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ٥٠٠ جنيه.

الحل

μ = ٤٠٠ σ = ٥٠

ل(س < ٥٠٠) = ل (ص < $\frac{٥٠٠-٤٠٠}{٥٠}$)

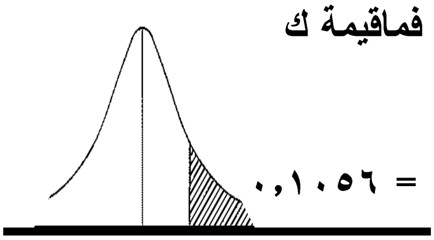


ل (ص < ٢) = ٠,٥ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٩٧٧٢

∴ عددالعمال = ٠,٩٧٧٢ × ١٠٠٠ = ٩٧٧ عامل

مثال ٤ :إذا كان س متغير عشوائى طبيعى وسطه الحسابى μ =٨

وانحرافه المعيارى σ= ٢ وكان ل(س ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ فماقيمة ك



٠　أ

الحل

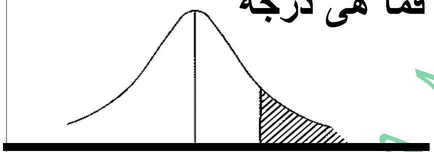
∵ ل(س ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ ∴ل (ص ≤ $\frac{\text{ك - ٨}}{\text{٢}}$) = ٠,١٠٥٦

∴ل (ص ≤ أ) = ٠,١٠٥٦ ∴أ موجبة

ل(صفر < ص< ك) = ٠,٥ − ٠,١٠٥٦ = ٠,٣٩٤٤ ∴ك = ١,٢٥

∴ $\frac{\text{ك - ٨}}{\text{٢}}$ = ١,٢٥ ∴ ك = ١٠,٥

مثال٥:إذا كانت درجات إمتحان ما تتبع توزيع طبيعى بتوقع ٧٦وانحراف معيارى ١٥فإذا علم أن ١٥٪ من الطلاب حصلوا على إمتياز فما هى درجة الامتياز



٠　أ

الحل

نفرض أن درجة الامتياز = ك

ل (س > ك) = ٠,١٥ ∴ ل (ص > $\frac{\text{ك - ٧٦}}{\text{١٥}}$) = ٠,١٥

∴ ل (ص > أ) = ٠,١٥ ∴ أ موجبة

∴ ل (٠ < ص < أ) = ٠,٥ − ٠,١٥ = ٠,٣٥ومن الجدول

∴أ = ١,٠٦٦ ∴ $\frac{\text{ك - ٧٦}}{\text{١٥}}$ = ١,٠٦٦

∴ك = ١,٠٦٦×١٥ + ٧٦ = ٩٢ درجة

مثال ٦: إذا كان س متغير عشوائى طبيعى وسطه الحسابى μ =٥٥

وانحرافه المعيارى σ وكان ل(س ⩽ ٤٥) = ٠,٠٢٢٨ فماقيمة σ

الحل

∵ ل(س ⩽ ٤٥) = ٠,٠٢٢٨ ∴ل (ص ⩽ $\frac{\text{٤٥ - ٥٥}}{\sigma}$) = ٠,٠٢٢٨

∴ل (ص ⩽ أ) = ٠,٠٢٢٨ ∴ أ سالبة

∴ل (٠⩽ ص ⩽ أ) = ٠,٥ − ٠,٠٢٢٨ = ٠,٤٧٧٢

من الجدول ∴ م = −٢ ∴ $\frac{٤٥ - ٥٥}{\sigma}$ = −٢

∴ ٢σ = ١٠ ∴ σ = ٥ ∴ التباين = ٢٥

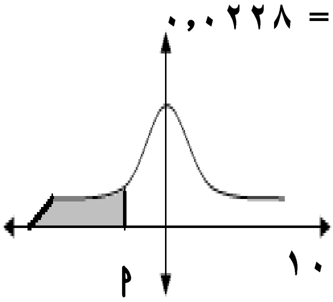
مثال ٧: إذا كان س متغير عشوائى طبيعى وسطه الحسابى μ وانحرافه المعيارى σ = ٥ وكان ل(س ⩽ ٤٥) = ٠,٠٢٢٨ فماقيمة μ

الحل

∵ ل(س ⩽ ٤٥) = ٠,٠٢٢٨ ∴ ل (ص ⩽ $\frac{٤٥ - \mu}{٥}$) = ٠,٠٢٢٨

∴ ل (ص ⩽ م) = ٠,٠٢٢٨ ∴ م سالبة

∴ ل (٠ ⩽ ص ⩽ م) = ٠,٥ − ٠,٠٢٢٨ = ٠,٤٧٧٢



من الجدول ∴ م = −٢ ∴ $\frac{٤٥ - \mu}{٥}$ = −٢ ∴ ٤٥ − μ = −١٠

∴ μ = ٥٥

مثال ٨ : وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره ٥٠ سم وانحراف معياري σ . فإذا علم أن أطوال ١٠,٥٦٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم. فأوجد التباين لأطوال هذا النبات.

الحل

ل (س < ٤٥) = ٠,١٠٥٦

∴ ل (ص < $\frac{٤٥ - ٥٠}{\sigma}$) = ٠,١٠٥٦

∴ ل (ص < م) = ٠,١٠٥٦ ∴ م سالبة

∴ ل (٠ > ص > م) = ٠,٥ ـ ٠,١٠٥٦ = ٠,٣٩٤٤ ومن الجدول

∴ م = ـ ١,٢٥ ∴ $\frac{٤٥ - ٥٠}{\sigma}$ = ـ ١,٢٥

∴ ـ ١,٢٥σ = ـ ٥ ∴ σ = ٤ ∴ التباين = ١٦

تمارين على التوزيع الطبيعى

* إذا كان ص متغيراً عشوائياً طبيعيا معياريا فأوجد:

١) ل(ص≤١,٥) ٢) ل(ص ⩾ ٢,٣٩)

٣) ل(-٢,١٥< ص< ١,٧٥) ٤) ل(- ٢,٩٧ ⩾ ص ⩾ -٢)

٥) ل(-١,٥٤ ≤ ص ≤ ١,٥٤)

*: إذا كان س متنغير طبيعى وسطه الحسابى μ وإنحرافه المعيارى σ

اوجد :أ) ل(س< $\mu + \sigma$). ب) ل(س> $\mu - ٢\sigma$)

جـ) ل($\mu - \sigma$ < س < $\mu + ٣\sigma$)

*: إذا كان الدخل الشهري لمجموعة مكونة من ٢٠٠٠ عامل يتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي ١٠٠جنيها وانحرافه المعيارى ١٠ جنيهات فأوجد عدد العمال الذين يزيد دخلهم عن ٢٥٠ جنيه.

*: إذا كانت أوزان الطلاب فى أحدى الكليات تتبع توزيعا طبيعياً وسطه الحسابي μ = ٧٠ كجم، تباينه ٥كجم.

فأوجد ١ – احتمال أن يكون الوزن أكبر من ٧٥ كجم.

ب – النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٥ كجم، ٨٠ كجم.

ج– عدد الطلاب الذين يقل وزنهم عن ٦٠ كجم إذا كان عدد طلاب الكلية = ١٠٠٠ طالب.

* إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعيا وسطه الحسابي μ = ١٧، انحرافه المعيارى σ = ٢ أوجد أ) ل(١٥< س < ٢٠) ب) ل(س⩾١٩)

* إذا كانت درجات الطلاب فى إحدى الامتحانات تتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره٧٥ درجة وانحراف معياري= ١٥ فإذا كان ١٩ ٪ يحصلون على تقدير ممتاز .فأوجد أقل درجة لكى يحصل الطالب على تقدير ممتاز.

* إذا كان س متغيراً عشوائياً وسطه الحسابي μ = ٤٥ وانحرافه المعيارى σ = ٤ فأوجد قيمة ك إذا كان: ل(س> ك) = ٠.١٥٨٧.

* إذا كان ارتفاع مياه الأمطار خلال شهر ما يتبع توزيع طبيعي وسطه الحسابي μ = ٥ سم، تباينه = ٤سم². أوجد احتمال أن يكون ارتفاع الأمطار فى مثل هذا الشهر فى العام التالي :أ) أكبر من ٧ سم.   ب) بين ١سم، ٩سم.

* إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه= ٢٠ وانحرافه المعيارى =٤ أوجد قيمة ك بحيث :أ) ل(س ≥ ك) = ٠,٠٢٢٨   ب) ل(س< ك) = ٠,٩٧٧٢

الارتبـــــاط

تعريف الارتباط

الارتباط هو علاقة بين متغيرين ،أو أكثر ،ويقاس الارتباط بمعامل الارتباط "ر" حيث -١ ⩽ ر ⩽ ١

أنواع الارتباط

طردي: عندما تكون ر>صفـر ، عكسي:عندما تكون ر < صفر

ملاحظات :

١- إذا كان ر = صفر   لا يوجد ارتباط

٢- إذا كان ر = ١   ارتباط طردي تام

٣- إذا كان ر =-١   ارتباط عكسي تام

درجة الارتباط

تام	متوسط	لايوجد	متوسط	تام
١	٠,٥	٠	-٠,٥	-١

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

فى هذه الطريقة نوجد معامل الارتباط بين رتب القيم

(١)نرتب كل من قيم س ، قيم ص (تنازلياً معاً أو تصاعدياًّ معاً)

و إذا اشترك شخصان أو أكثر فى رتبة يعطى لكلًّ منهما المتوسط الحسابي لهذه الرتب.

٢) نكون جدولاً من ستة أعمدة وهى س ،ص، رتب س، رتب ص، ف، ف^{٢}

حيث ف = رتب س – رتب ص.

٣) نستخدم القانون:

$$\boxed{ر = ١ - \frac{٦ \text{مجـ} ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}}$$

مثال١: من بيانات الجدول الآتي أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه ودرجته:

س	١٦	١٤	١٧	١٥	١٣
ص	١٥	١٤	١٦	١٢	١١

الحل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^{٢}
١٦	١٥	٢	٢	٠	٠
١٤	١٤	٤	٣	١	١
١٧	١٦	١	١	٠	٠
١٥	١٢	٣	٤	١−	١
١٣	١١	٥	٥	٠	٠
					مجـف^{٢}=٢

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{مجـ} ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ٢}{٥(٢٥ - ١)}$$

ر = ٠,٩ طردي قوى

مثال ٢ :من بيانات الجدول الآتي:

س	ممتاز	جيد	جيد جدا	مقبول	ضعيف	جيد
ص	جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد جدا	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص.

الحل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^٢$
ممتاز	جيد	١	٣	٢−	٤
جيد	ضعيف	٣,٥	٦	٢,٥−	٦,٢٥
جيد جدا	مقبول	٢	٤,٥	٢,٥−	٦,٢٥
مقبول	ممتاز	٥	١	٤	١٦
ضعيف	جيد جدا	٦	٢	٤	١٦
جيد	مقبول	٣,٥	٤,٥	١−	١
					مجـ $ف^٢$=٤٩,٥

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦\,\text{مجـ}\,\text{ف}^٢}{\text{ن}\,(\text{ن}^٢ - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ٤٩,٥}{٦\,(٣٦ - ١)}$$

ر = − ٠,٤١ عكسي ضعيف

مثال٣: من بيانات الجدول الآتي أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه ودرجته

س	٤	٨	٢٠	١٦	٢٤	٢٨	١٢
ص	١٢	٩	٥	٦	٣	٢	٨

الحل

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^2$
٤	١٢	٧	١	٦	٣٦
٨	٩	٦	٢	٤	١٦
٢٠	٥	٣	٥	٢−	٤
١٦	٦	٤	٤	٠	٠
٢٤	٣	٢	٦	٤−	١٦
٢٨	٢	١	٧	٦−	٣٦
١٢	٨	٥	٣	٢	٤
					مجـ$ف^2$=١١٢

$$ر = ١ - \frac{٦ مجـ ف^2}{ن(ن^2 - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ١١٢}{٧(٤٩ - ١)}$$

∴ ر = ١ طردى تام

معامل الارتباط الخطى لبيرسون

معامل الارتباط الخطى لبيرسون

$$ر = \frac{ن\ \text{مجـ}\ س\ ص - \text{مجـ}\ س\ \text{مجـ}\ ص}{\sqrt{ن\ \text{مجـ}\ س^{٢} - (\text{مجـ}\ س)^{٢}}\ \sqrt{ن\ \text{مجـ}\ ص^{٢} - (\text{مجـ}\ ص)^{٢}}}$$

مثال١ :من بيانات الجدول الأتى أوجد معامل الأرتباط الخطى لبيرسون وحدد نوعه:

س	٥	١٠	٣	٨	٦	٧
ص	٤	٨	٢	٦	٤	٥

الحل

س	ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$	س ص
٥	٤	٢٥	١٦	٢٠
١٠	٨	١٠٠	٦٤	٨٠
٣	٢	٩	٤	٦
٨	٦	٦٤	٣٦	٤٨
٦	٤	٣٦	١٦	٢٤
٧	٥	٤٩	٢٥	٣٥
مجـ س=٣٩	مجـ ص =٢٩	مجـ $س^{٢}$=٢٨٣	مجـ $ص^{٢}$=١٦١	مجـس ص =٢١٣

$$ر = \frac{ن\ \text{مجـ}\ س\ ص - \text{مجـ}\ س\ \text{مجـ}\ ص}{\sqrt{ن\ \text{مجـ}\ س^{٢} - (\text{مجـ}\ س)^{٢}}\ \sqrt{ن\ \text{مجـ}\ ص^{٢} - (\text{مجـ}\ ص)^{٢}}}$$

$$\therefore ر = \frac{٦\times٢١٣ - ٣٩\times٢٩}{\sqrt{٦\times٢٨٣-(٣٩)^{٢}}\ \sqrt{٦\times١٦١-(٢٩)^{٢}}} = ٠,٩٨٨$$

طردى قوى

مثال ٢: من بيانات الجدول الآتى أوجد معامل الأرتباط الخطى لبيرسون وحدد نوعه:

س	٦	٩	١١	٧	٩	٨
ص	٦	٩	١٣	٨	١١	١٠

الحل

س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
٦	٦	٣٦	٣٦	٥٤
٩	٩	٨١	٨١	٨١
١١	١٣	١٢١	١٦٩	١٤٣
٧	٨	٤٩	٦٤	٥٦
٩	١١	٨١	١٢١	٩٩
٨	١٠	٦٤	١٠٠	٨٠
٥٠	٥٧	٤٣٢	٥٧١	٤٩٥

$$ر = \frac{٦ \times ٤٩٥ - ٥٠ \times ٥٧}{\sqrt{٦ \times ٤٣٢ - (٥٠)^٢}\ \sqrt{٦ \times ٥٧١ - (٥٧)^٢}} = ٠,٩٤$$

طردى قوى

مثال٣: أوجد معامل الأرتباط الخطى لبيرسون وحدد نوعه

إذاكان مجـ س = ٢٨،مجـ ص = ١٦٧،مجـس^{٢}=١٤١،

مجـص^{٢}=٥١٧٩ ، مجـ س ص = ٨٤٩ ، ن=٧

الحل

$$ر = \frac{٧ \times ٨٤٩ - ٢٨ \times ١٦٧}{\sqrt{٧ \times ١٤١ - (٢٨)^{٢}}\ \sqrt{٧ \times ٥١٧٩ - (١٦٧)^{٢}}} = ٠,٢٣$$

طردى ضعيف

تمارين على الإرتباط

*** : من بيانات الجدول الآتى أوجد معامل الأرتباط الخطى لبيرسون**

وحدد نوعه وكذلك معامل إرتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه

س	٣	٩	٤	٣	٩	٩
ص	٦	٩	٦	٦	٩	٦

*** : من بيانات الجدول الآتى معامل إرتباط الرتب لسبيرمان وحدد**

نوعه:

س	٦	٦	٥	٦	٥	٥
ص	جيد	ممتاز	جيد جدا	مقبول	جيد	ممتاز

*** : من بيانات الجدول الآتى أوجد معامل الأرتباط الخطى لبيرسون**

وحدد نوعه وكذلك معامل إرتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه ودرجته:

س	٣	٦	٧	٨	٧	٧
ص	٩	٦	٨	٥	٤	٨

* أوجد معامل الأرتباط الخطى لبيرسون وحدد نوعه

إذاكان مجـ س = ٣٣، مجـ ص = ٢٣، مجـس^{٢}=١٣٩،

مجـص^{٢}=١٢٥ ، مجـ س ص = ١٦٥ ، ن=٥

ملحوظة: إذا أضيفت أو طرحت من قيم س أو ص

أوكلاهما مقدار ثابت لا تتغيرقيمة معامل الأرتباط

الأنحدار

معادلة خط الأنحدار هى العلاقة الرياضية بين المتغيرين

معادلة خط إنحدار ص على س هى : ص = ٲ س + ب حيث

ٲ = بسط بيرسون / ما تحت الجذر الأول لبيرسون ، ب = (مجـ ص − ٲ مجـ س) / ن

معادلة خط إنحدار س على ص هى : س = حـ ص + ء حيث

حـ = بسط بيرسون / ما تحت الجذر الثانى لبيرسون ، ء = (مجـ س − حـ مجـص) / ن

مثال ١: في مثال ١ على بيرسون أوجد معادلة خط إنحدار

ص على س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٧

الحل

ٲ = بسط بيرسون / ما تحت الجذر الأول لبيرسون = ١٤٧ / ١٧٧ = ١ ٣ ٨ ,٠

ب = (مجـ س − حـ مجـص) / ن = (٢٩ − ١ ٣ ٨ ,٠ × ٣٩) / ٦ = − ١ ٦ ٥ ,٠

∴ معادلة خط إنحدار ص على س هى : ص = ٲ س + ب

∴ص = ٠,٨٣١ س – ٠,٥٦١ وعندما س = ٩

∴ ص = ٠,٨٣١ × ٩ – ٠,٥٦١ = ٦,٩١٨

مثال ٢: مصر ٢٠٠٣ دور أول

الجدول التالى يوضح سعر السلعة بالجنيه وعدد الوحدات المطلوبة ص من سلعة ما

سعر الوحدة س	٢	٤	٥	٣	١١
عدد الوحدات ص	٦	٥	٣	٤	٢

(ٲ) أحسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون

(ب)أوجد معادلة خط انحدار ص على س ثم قدر عدد الوحدات المطلوبة من السلعة إذا كان سعر الوحدة ٦ جنيهات

الحل

س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
٢	٦	٤	٣٦	١٢
٤	٥	١٦	٢٥	٢٠
٥	٣	٢٥	٩	١٥
٣	٤	٩	١٦	١٢
١١	٢	١٢١	٤	٢٢
٢٥	٢٠	١٧٥	٩٠	٨١

$$ر = \frac{٥ \times ٨١ - ٢٥ \times ٢٠}{\sqrt{٥ \times ١٧٥ - (٢٥)^٢}\ \sqrt{٥ \times ٩٠ - (٢٠)^٢}} =$$

$$ر = \frac{-٩٥}{\sqrt{٢٥٠}\ \sqrt{٥٠}} = -٠,٨٥$$ عكسى قوى

لإيجاد معادلة خط انحدار ص على س :

$$\text{ɐ} = \frac{-٩٥}{٢٥٠} = -٠,٣٨ \quad ، \quad \text{ب} = \frac{٢٠ + ٠,٣٨ \times ٢٥}{٥} = ٥,٩$$

∴معادلة خط انحدار ص على س هى : ص = − ٠,٣٨س + ٥,٩

وعندما س = ٦ ∴ ص = ٣,٦٢

مثال٣ : مصر ٢٠٠٢ د ور أول

إذاكان مجـ س = ٣٣، مجـ ص = ٢٤، مجـ $\text{س}^{٢}$ =١٩٦،

مجـ $\text{ص}^{٢}$ =١٠٦ ، مجـ س ص = ١٣٥ ، ن=٦

(ɐ) أوجد معادلة خط انحدار س على ص ثم قدر قيمة س عندما ص = ٧

(ب) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص واستنتج قيمة معامل الارتباط بين $\tilde{\text{س}}$، $\tilde{\text{ص}}$ حيث $\tilde{\text{س}}$ = س−٥، $\tilde{\text{ص}}$ = ص−٤

الحل

لإيجاد معادلة خط انحدار س على ص :

$$\text{حـ} = \frac{\text{بسط بيرسون}}{\text{ما تحت الجذر الثانى لبيرسون}} = \frac{١٨}{٦٠} = ٠,٣$$

$$\text{ء} = \frac{\text{مجـ س} - \text{حـ مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{٣٣ - ٠,٣ \times ٢٤}{٦} = ٤,٣$$

∴ معادلة خط انحدار س على ص هى: س = حـ ص + ء

∴س = ٠,٣ ص + ٤,٣ وعندما ص = ٧

∴ س = ٦,٤

ولإيجاد معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص

$$ر = \frac{٦\times١٣٥ - ٣٣\times٢٤}{\sqrt{٦\times١٩٦ - (٣٣)^{٢}}\ \sqrt{٦\times١٠٦ - (٢٤)^{٢}}} =$$

$$ر = \frac{١٨}{\sqrt{٨٧}\ \sqrt{٦٠}} = ٠,٢٥$$ طردى قوى

ويكون معامل الارتباط بين س، ص = ٠,٢٥ أيضا

العلاقة بين معامل الارتباط ومعاملي الانحدار

$\boxed{ر^{٢} = أ\ حـ}$ حيث " ر " تأخذ نفس إشارة كل من أ ، حـ.

مثال١: إذا كان معامل انحدار ص على س هو −٠.٢٥، معامل انحدار س على ص هو −٠.٨١. أوجد معامل الارتباط الخطى بين س، ص وحدد نوعه.

الحل

أ = −٠.٢٥ ، حـ = −٠.٨١

$ر^{٢} = أ\ حـ = -٠.٢٥ \times -٠.٨١ = ٠.٢٠٢٥$

$\therefore ر = \sqrt{٠,٢٠٢٥} = -٠,٤٥$ **لاحظ الاشارة سالبة لأن معاملي الانحدار سالبين**

مثال٢: إذا كان معامل انحدار س على ص هو ٠,٤، معامل الارتباط الخطى بين س، ص هو ٠,٨ أوجد معامل انحدار ص على س.

الحل

حـ = ٠,٤ ، ر = ٠,٨

$\because ر^{٢} = أ\ حـ \quad \therefore أ = \frac{ر^{٢}}{حـ} = \frac{٠,٦٤}{٠,٤} = ١,٦$

تمارين على الانحدار

*** من بيانات الجدول الآتى أوجد معامل الأرتباط الخطى لبيرسون وحدد نوعه:**

س	١	٣	٦	٤	٥	٥
ص	٢	٥	٧	٤	٨	٩

١) أوجد معادلة خط انحدار ص على س واوجد قيمة ص عندما س = ٧

٢) أوجد معادلة خط انحدار س على ص واوجد قيمة س عندما ص = ٦

*** من بيانات الجدول الآتى:**

س	٢	١	٦	٤	٣	٨
ص	٧	٤	٥	٨	٦	٧

١) احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

٢) باستخدام خط انحدار مناسب قدر قيمة ص عندما س = ٥

***من بيانات الجدول الآتى:**

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠

٣) احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

٤) باستخدام خط انحدار مناسب قدر قيمة ص عندما س = ٩

* إذاكان **مجـ** س =١٤، **مجـ** ص = ٩، **مجـ**س^{٢}=٢٥٢،

مجـص^{٢}=١٧١ ، **مجـ** س ص = ١٩٢ ، ن=٧

(أ) أوجد معادلة خط انحدار س على ص ثم قدر قيمة س عندما ص = ٧

(ب) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص واستنتج قيمة معامل الارتباط بينس~، ص~حيث س~ = س−٦، ص~ = ص−٧

* إذاكان مجـ س = ٣٠، مجـ ص = ٢٠، مجـ س^{2}=١٩٢،

مجـ ص^{2}=٨٢ ، مجـ س ص = ٩٠ ، ن=٦

(أ) أوجد معامل انحدار س على ص

(ب) أوجد معامل انحدار ص على س

(حـ) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص باستخدام معاملى الانحدار

(ء) باستخدام خط انحدارمناسب قدر قيمة ص عندما س = ٨

***إذا كان معامل انحدار ص على س هو –٠,٢، معامل انحدار س على ص هو –٣,٢ أوجد معامل الارتباط الخطى بين س، ص وحدد نوعه**

***إذا كان معامل انحدار ص على س هو –٠,٣ معامل الارتباط الخطى بين س، ص هو –٠,٩أوجد معامل انحدار س على ص**

مع أطيب تمنياتى بالنجاح والتوفيق

أ/ زكى محمد زكى العجمى

مدرسة العطار الثانوية بنات

إدارة شبرا التعليمية

محافظة القاهرة

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2} \cdot \sqrt{(\text{ن مجـ ص}^2) - (\text{مجـ ص})^2}}$$

*** معادلة خط انحدار ص على س (لتقدير قيمة ص عند أى قيمة لـــ س)**

ص = أ س + ب حيث أ ميل المستقيم (معامل انحدار ص على س)،

ب هو طول الجزء الذى يقطعه المستقيم من المحور الرأسي

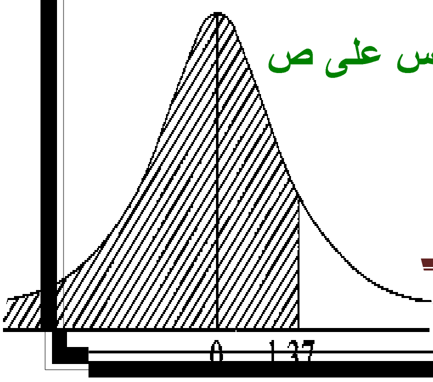
$$\text{حيث أ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ ص} - \text{أ مجـ س}}{\text{ن}}$$

معادلة خط انحدار س على ص

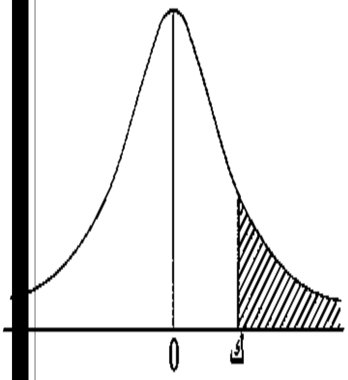
(لتقدير قيمة س عندأى قيمة لـــ ص

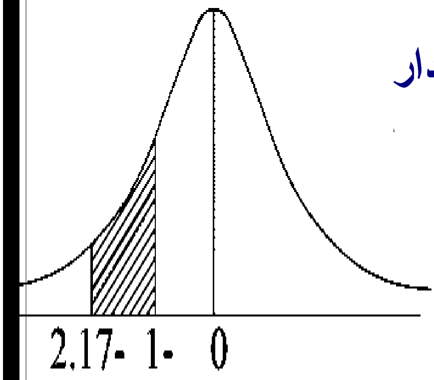
س = جـ ص + د



$$\text{حيث جـ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}$$

$$\text{حيث جـ} = \frac{\text{مجـ س} - \text{جـ مجـ ص}}{\text{ن}}$$





العلاقة بين معامل الارتباط ومعاملى الانحدار

$\text{ر}^{٢} = \text{أجـ}$

حيث " ر " تأخذ نفس إشارة كل من أ ، جـ.

ملحوظة

عند إيجاد معادلات الانحدار، نكون جدولاً من ٥ أعمدة وهى س، ص، س ص، س٢ ، ص٢ .

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ ف}^{٢}}{\text{ن}(\text{ن}^{٢}-١)}$$