تمارين (١)

١. ما عدد المستويات التي تمر بكل مما يأتي :-

(أ) نقطة معلومة   (ب) نقطتين معلومتين   (جـ) ثلاث نقاط معلومة

الحل:

عدد المستويات التي تمر بكل من :

			عدد المستويات
(أ)	نقطة معلومة		عدد لانهائي
(ب)	نقطتين معلومتين		عدد لانهائي
(جـ)	ثلاث نقط معلومة	على استقامة واحدة	عدد لانهائي
		ليست على استقامة واحدة	واحد فقط

....

٢. ضع علامة (√) أمام التكملة الصائبة وعلامة (×) أمام التكملة الخاطئة فيما يلي :-

أولاً : يتقاطع المستويان في ....

(أ) نقطة   (ب) مستقيم   (جـ) مستو

ثانياً : س ، ص مستويان متوازيان ، ل مستقيم ، أ نقطة فيكون ......

(أ) س ∩ ص = ل

(ب) س ∩ ص = { أ }

(جـ) س ∩ ص = Φ

الحل:

أولا : يتقاطع المستويان في

(أ) نقطة (×)

(ب) مستقيم (√)

(ج) مستوى (×)

ثانيا :

(أ) س ⋂ ص = ل (×)

(ب) س ⋂ ص = { أ } (×)

(ج) س ⋂ ص = Φ (√)

....

٣. ضع علامة (√) أمام التكملة الصائبة وعلامة (×) أمام التكملة الخاطئة فيما يلي :-

بفرض أن ل مستقيم ، س مستوى ، أ نقطة

(أ) إذا كان : ل ∩ س ={ أ } فإن ل ⊂ س

(ب) إذا كان : ل ∩ س = Φ فإن ل// س

(ج) إذا كان ل ⊂ س فإن ل ∩ س = Φ

(د) إذا كان : ل يوازى س فإن ل∩ س = { أ }

الحل:

(أ) إذا كان ل ⋂ س = { أ } فإن ل ⊂ س (×)

(ب) إذا كان ل ⋂ س = Φ فإن ل // س (√)

(ج) إذا كان ل ⊂ س فإن ل ⋂ س = Φ (×)

(د) إذا كان ل // س فإن ل ⋂ س = { أ } (×)

....

٤.

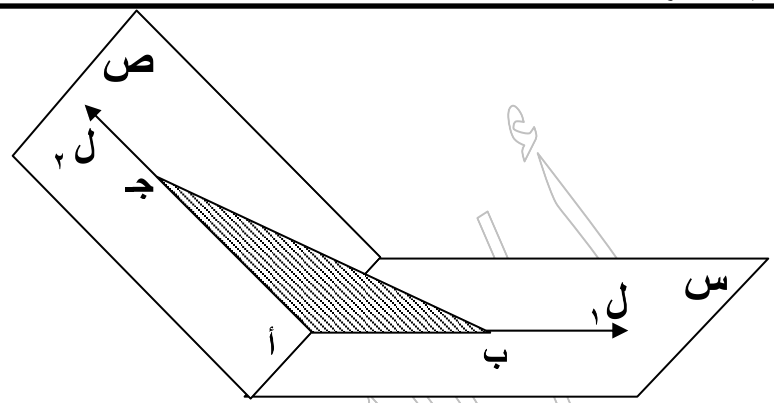
إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين مختلفين متقاطعين في نقطة أ ، $ل_١$ ⊂ المستوى س ، $ل_٢$ ⊂ مستوى آخر ص وتوجد نقطة اخرى ب تقع على $ل_١$ وتنتمى للمستوى س وتوجد نقطة اخرى جـ تقع على $ل_٢$ وتنتمى للمستوى ص .

فارسم شكلا يبين ذلك ثم اكمل :

(أ) المستوى ب أجـ ⋂ ص = ...

(ب) المستوى جـ أ ب ∩ س = ...

(جـ) س ∩ ص ∩ المستوى ب أ جـ = ...



الحل:

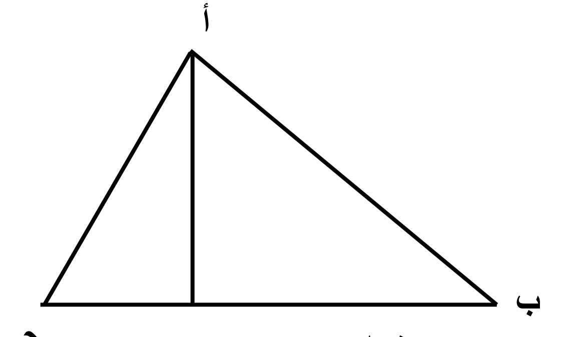
(أ) المستوى ب أ جـ $\cap$ ص = $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$

(ب) المستوى جـ أ ب $\cap$ س = $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(جـ) س $\cap$ ص $\cap$ المستوى ب أ جـ = { أ }

....

٥.



شكل (٢٢)

اعد رسم الشكل المبين على قطعة من الورق المقوى . اقطع المثلث أ ب جـ واطوى هذا المثلث عند $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ لتحصل على مثلثين أ ب ء ، ا جـ ء غير مستويين ثم ضعهما بهذة الصورة على نضد افقى سطحة يمثل المستوى س بحيث تقع النقط ب ، ء ، جـ فى المستوى س .

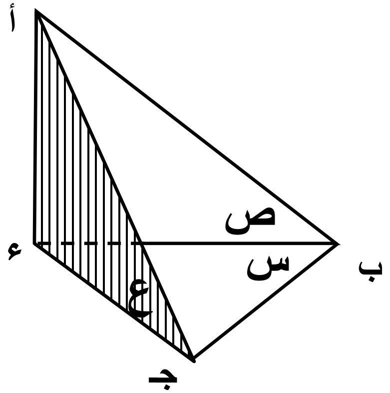
فإذا رمزنا للمستوى الذى تعينة النقط أ ، ب ، ء بالرمز ص ، وللمستوى الذي تعينه النقط أ ، ء ، جـ بالرمز ع فإرسم شكلا يمثل المستويات الثلاثة س ، ص ، ع واكمل :

(أ) ص $\cap$ س =.......... (ب) ع $\cap$ س = ...

(جـ) ص $\cap$ ع = ... (د) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ $\cap$ س = ...

(هـ) $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ $\cap$ س = ... (و) $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ $\cap$ ع = ...

(ز) (ص $\cap$ ع) $\cap$ س =.........



الحل:

(أ) ص $\cap$ س = $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ (ب) ع $\cap$ س = $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

(جـ) ص $\cap$ ع = $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ (ء) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ $\cap$ س = { ب }

(هـ) $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ $\cap$ س = { ء } (و) $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ $\cap$ ع = $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$

(ز) (ص $\cap$ ع) $\cap$ س = { ء }

....

٦. المستويان س ، ص متقاطعان فى $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ شكل (٢٣)

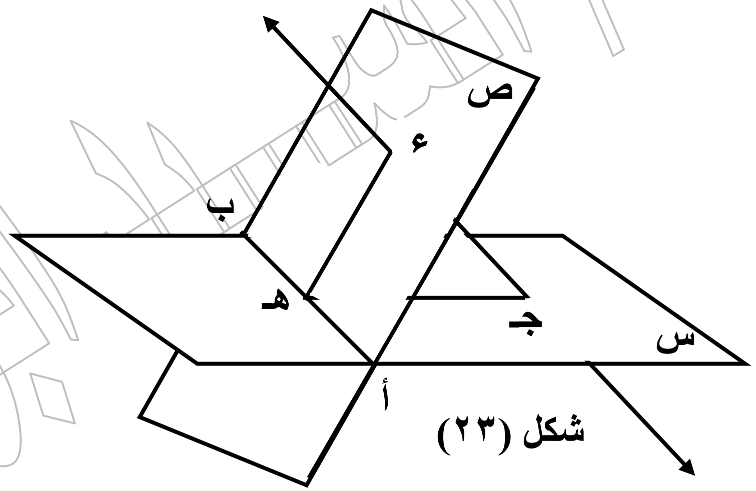
انقل هذا الرسم فى كراستك واضف إليه مستقيما يقطع المستوى س فى نقطة جـ ∌ أب ويقطع المستوى ص فى نقطة د ∌ أب . ارسم المستوى جـ د هـ حيث هـ ∈ أب . ثم اكمل العبارات الاتية :

(أ) المستوى س ⋂ المستوى جـ ء هـ = ...

(ب) المستوى جـ ء هـ ⋂ المستوى ص = ...

(جـ) المستوى جـ ء هـ ⋂ أب = ...

(ء) المستوى س ⋂ المستوى ص ⋂ المستوى حـ ء هـ = ...



شكل (٢٣)

الحل:

(أ) المستوى س ⋂ المستوى جـ ء هـ = جـهـ

(ب) المستوى جـ ء هـ ⋂ المستوى ص = ءهـ

(جـ) المستوى جـ ء هـ ⋂ أب = { هـ }

(ء) المستوى س ⋂ المستوى ص ⋂ المستوى حـ ء هـ = { هـ }

تمارين (٢)

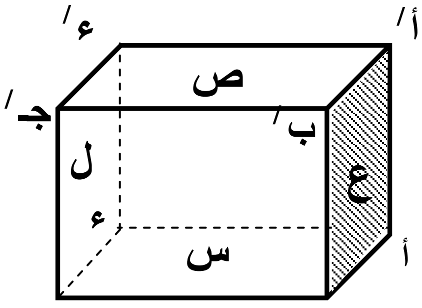
في شكل (٣٦) : أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ متوازي مستطيلات

أجب عن الأسئلة (١) ، (٢) ، (٣)

١. ما العلاقة بين كل زوج من المستويات الآتية ؟ مع تعيين خط التقاطع في حالة تقاطع مستويين .

(أ) س ، ص (ب) س ، ع

(جـ) ص ، ل (ء) ع ، ل



شكل (٣٦)

الحل:

(أ) س ، ص متوازيان (ب) س ، ع متقاطعان في أب

(جـ) ص ، ل متقاطعان في جـ/ء/ (ء) ع ، ل متوازيان

....

٢. أكمل :

(أ) أب ⊂ المستوى .... ، أب ⊂ المستوى ....

(ب) ء جـ // كل من المستويين .... ، .... ويقطع المستوى .... في جـ

(جـ) المستوى ص ∩ المستوى .... = أ/ ء/ ، المستوى ع ∩ المستوى ل = ...

(ء) أء ...... المستوى س ، ويقطع المستوى ع في النقطة ....

الحل:

من الرسم السابق

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊂ س ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊄ ع

(ب) $\overleftrightarrow{\text{ءجـ}}$ // كل من المستويين ص ، ع ويقطع المستوى ب جـ جـ/ ب/ في جـ

(جـ) المستوى ص ∩ المستوى أ ء ء/ أ/ = $\overleftrightarrow{\text{أ/ ء/}}$

، المستوى ع ∩ المستوى ل = Φ

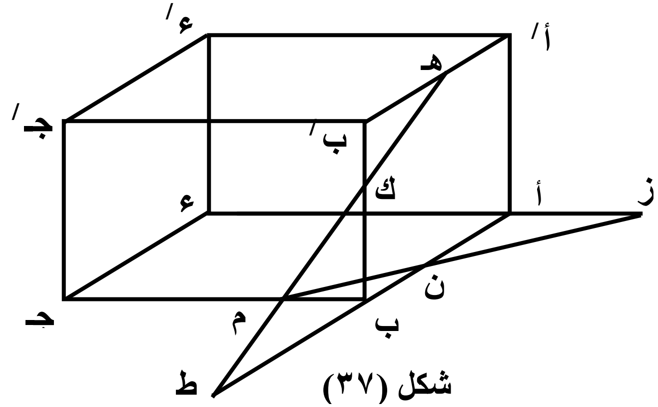
(ء) $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ⊂ المستوى س ، ويقطع المستوى ع في النقطة أ

....

٣. انقل شكل (٣٧) في كراستك :

(أ) خذ نقطة م ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، نقطة مثل ن ∈ $\overline{\text{أب}}$ ثم بين بالرسم أين يتقاطع $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ والمستوى أ أ/ ء/ ء .

(ب) خذ نقطة هـ ∈ $\overline{\text{أ/ ب/}}$ ، نقطة ك ∈ $\overline{\text{ب ب/}}$ ثم بين بالرسم أين يتقاطع $\overleftrightarrow{\text{هـ ك}}$ والمستوى أ ب جـ ء .



شكل (٣٧)

الحل:

(أ) $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ∩ المستوى أ أ/ ء/ ء = { ز }

(ب) $\overleftrightarrow{\text{هـ ك}}$ ∩ المستوى أ ب جـ ء = { ط }

....

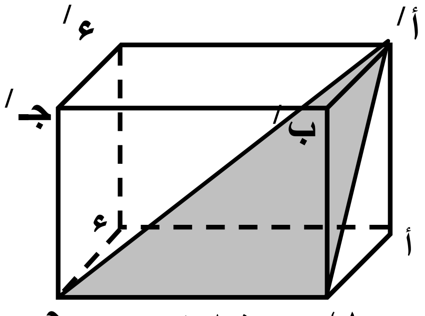
٤. في شكل (٣٨) : أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ مكعب اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين (متقاطعان – متطابقان – متوازيان) لكل من الأزواج الآتية

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ/ب/}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

(ب) المستويان أ/ ب/ جـ/ ء/ ، أ ب جـ ء

(جـ) المستويان أ/ ب/ جـ/ ء/ ، أ/ ب/ جـ/

(ء) المستويان أ/ ب جـ ، أ ب جـ ء



شكل(٣٨)

الحل:

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ/ب/}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ متوازيان

(ب) المستويان أ/ ب/ جـ/ ء/ ، أ ب جـ ء متوازيان

(جـ) المستويان أ/ ب/ جـ/ ء/ ، أ/ ب/ جـ/ متطابقان

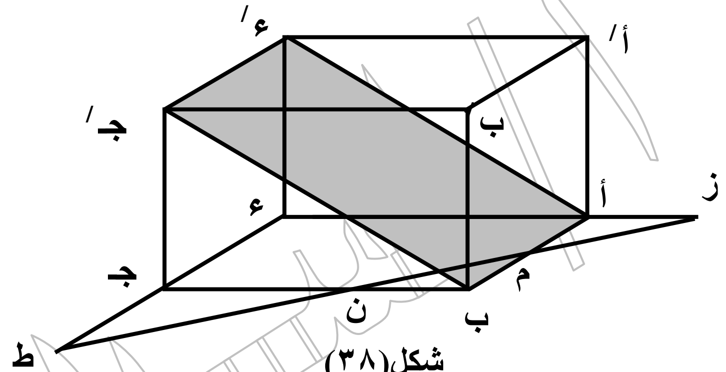
(ء) المستويان أ/ ب جـ ، أ ب جـ ء متقاطعان

....

٥. انقل المكعب شكل (٣٨) في كراستك

(أ) خذ نقطة م ∈ أ ب ، ن ∈ ب جـ ثم بين بالرسم أين يتقاطع م ن مع كل من المستويين ء/ ء حـ حـ/ ، أ/ أ ء ء/

(ب) بين بالرسم أين يقطع جـ ب المستوى أ ب جـ/ ء/



شكل(٣٨)

الحل:

(أ) م ن ∩ المستوى ء ء/ جـ جـ/ = { ط }

، م ن ∩ المستوى أ/ أ ء ء/ = { ز }

(ب) جـ ب ∩ المستوى أ ب جـ/ ء/ = { ب }

....

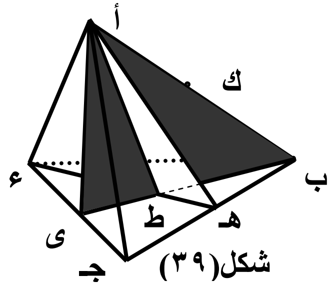
٦. أ ب جـ ء هرم ثلاثي ، هـ ، ى ، ك منتصفات ب جـ ، جـ ء ، ب أ على الترتيب انقل الرسم في كراستك .

عين بالرسم المستقيم الذي يتقاطع فيه كل من :

(أ) المستويين أ ب ى ، أ ء هـ

(ب) المستويين أ ب ى ، جـ ء ك

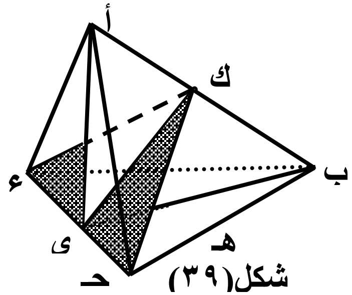
الحل:



شكل(٣٩)

المستوى أ ب ى ∩ المستوى أ ء هـ = أ ط

حيث ط هي نقطة تقاطع هـ ء مع ب ى



شكل(٣٩)

المستوى أ ب ى ∩ المستوى جـ ء ك = ك ى

....

٧. في شكل (٤٠) : أ ب جـ أ/ ب/ جـ/ يسمى هرما ثلاثيا ناقصا متوازي القاعدتين وقاعدتاه أ ب جـ ، أ/ ب/ جـ/ متوازيان . س ترمز للمستوى الذي يحوي الوجه الجانبي أ/ ب/ ب أ ، ص ترمز للمستوى الذي يحوي الوجه ب/ جـ/ جـ ب ، ع ترمز للمستوى الذي يحوي الوجه أ/ أ جـ جـ/ .

أكمل :

(أ) (أ) س ∩ ع = ...

(ب) س ∩ ص = ...

(جـ) ص ∩ ع = ...

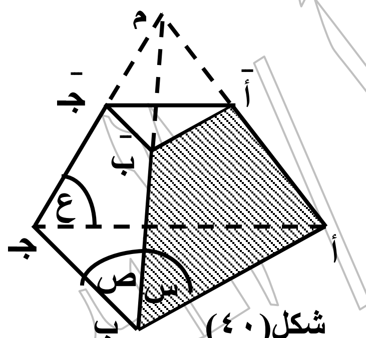
(ء) س ∩ ص ∩ ع = ...

(هـ) س ∩ المستوى أ ب جـ = ...

(و) ص ∩ المستوى أ/ ب/ جـ/ = ...

(ز) أ/ب/ ∩ ب جـ = ...

(ح) المستوى أ/ب/جـ/ ∩ المستوى أ ب جـ = ...



شكل(٤٠)

الحل:

(أ) س ∩ ع = أأ/

(ب) س ∩ ص = ب ب/

(جـ) ص ∩ ع = جـ جـ/

(ء) س ∩ ص ∩ ع = { م }

(هـ) س ∩ المستوى أ ب جـ = أب

(و) ص ∩ المستوى أ/ب/جـ/ = ب/جـ/

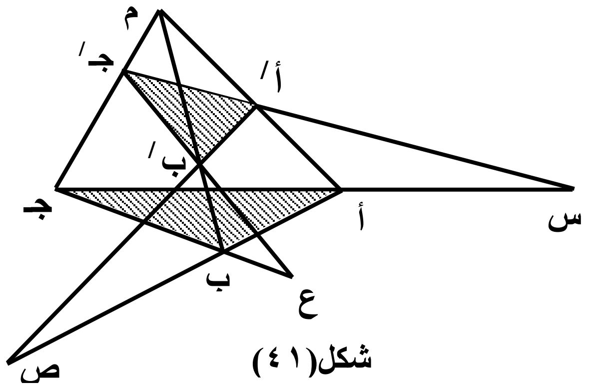
(ز) أ/ب/ ∩ ب جـ = Φ

(ح) المستوى أ/ب/جـ/ ∩ المستوى أ ب جـ = Φ

....

٨. في شكل (٤١)

م أ ب جـ هرم ثلاثي ، المستوى أ/ب/جـ/ يقطع أحرفه م أ ، م ب ، م جـ في النقط أ/ ، ب/ ، جـ/ فإذا كان أجـ ∩ أ/جـ/ = { س } ، أب ∩ أ/ب/ = {ص} ، جـ ب ∩ جـ/ب/ = { ع } فأثبت أن : س ، ص ، ع تنتمي لمستقيم واحد هو خط تقاطع المستويين أ ب جـ ، أ/ب/جـ/



شكل(٤١)

الحل:

∵ س ∈ أجـ ⊂ المستوى أ ب جـ ⇐ س ∈ المستوى أ ب جـ

س ∈ أ/جـ/ ⊂ المستوى أ/ب/جـ/ ⇐ س ∈ المستوى أ/ب/جـ/

س ∈ كل من المستوين أ ب جـ ، أ/ب/جـ/

∴ س ∈ خط تقاطع المستوين أ ب جـ ، أ/ب/جـ/ .... (١)

بالمثل يمكن اثبات أن

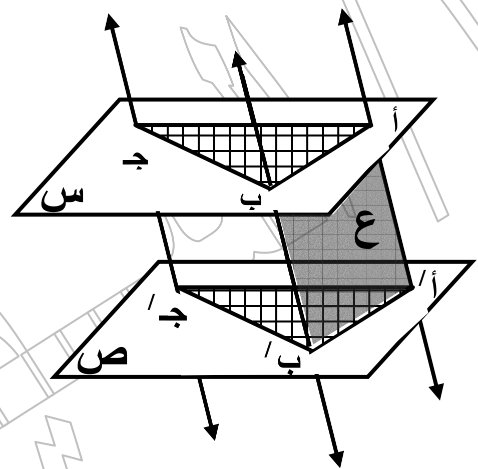
ص ∈ خط تقاطع المستوين أ ب جـ ، أ/ب/جـ/ .... (٢)

ع ∈ خط تقاطع المستوين أ ب جـ ، أ/ب/جـ/ .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن س ، ص ، ع ∈ إلى خط مستقيم واحد وهو خط تقاطع المستوين أ ب جـ ، أ/ب/جـ/

تمارين (٣)

١. أأ/ ، بب/ ، جـجـ/ ثلاثة مستقيمات متوازية ليست في مستو واحد ، قطعها المستوى س في النقط أ ، ب ، جـ ، وقطعها المستوى ص في النقط أ/ ، ب/ ، جـ/ على الترتيب اثبت أن
Δ أ ب جـ ≡ Δ أ/ ب/ جـ/



الحل:

∵ أأ/ // بب/ .... (١)

∴ فهما يعينان مستويا وليكن ع

∵ المستوى ع قطع المستويين المتوازيين س ، ص في أب ، أ/ ب/

∴ أب // أ/ ب/ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

أ ب ب/ أ/ متوازي أضلاع

∴ أ ب = أ/ ب/ .... (٣)

بالمثل ب جـ = ب/ جـ/ .... (٤)

، أ جـ = أ/ جـ/ .... (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) ينتج أن Δ أ ب جـ ≡ Δ أ/ ب/ جـ/

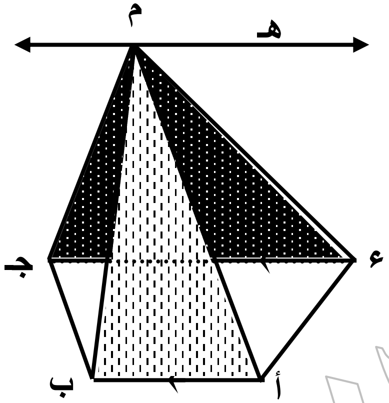
....

٢.

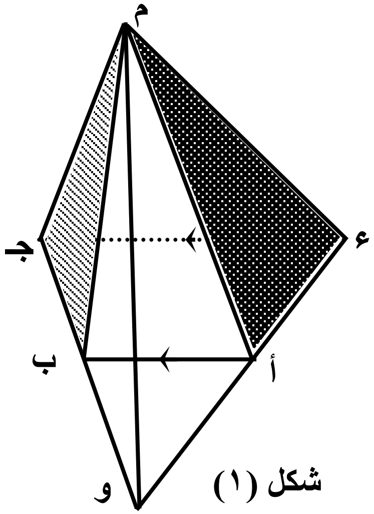
م أ ب جـ ء هرم رباعي قاعدته أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أب // ء جـ

أوجد : (أ) خط تقاطع المستويين م أ ء ، م ب جـ

(ب) خط تقاطع المستويين م أ ب ، م ء جـ مع تفسير الحل



شكل (٢)



شكل (١)

الحل:

(أ) في شكل (١) المستوى م أ ء ∩ م ب جـ = م و

(ب) في شكل (٢) المستوى م أ ب ∩ م ء جـ = م هـ

حيث م هـ // أ ب // ء جـ

تفسير الحل :

أ ب // ء جـ ، أ ب ⊂ المستوى أ م ب ، ء جـ ⊂ المستوى ء م جـ

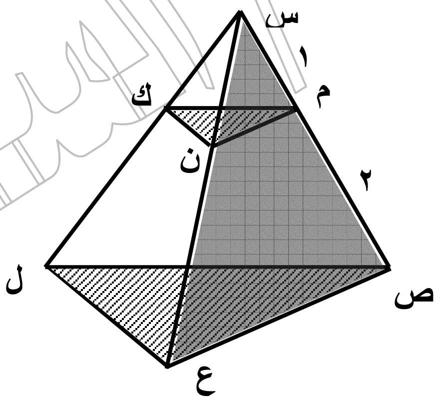
خط تقاطع المستويين أ م ب ، ء م جـ هو المستقيم م هـ يوازي كل من المستقيمين أ ب // ء جـ

٣.

س ص ع ل هرم ثلاثي رأسه س ، أخذت نقطة م ∈ س ص بحيث س م : م ص = ١ : ٢ ورسم مستوى يمر بالنقطة م موازيا المستوى ص ع ل ويقطع س ع في ن ، س ل في ك اثبت أن :

(أ) Δ م ن ك ~ Δ ص ع ل

(ب) إذا كانت مـ (Δ ص ع ل) = ٢٧٠ سم^{٢} فاحسب مـ (Δ م ن ك)



الحل:

∵ المستوى س ص ع يقطع المستويين المتوازيين م ن ك ، ص ع ل

في م ن ، ص ع ⟸ م ن // ص ع

بالمثل ن ك // ع ل

، م ك // ص ل

في Δ س ص ع ∵ م ن // ص ع

∴ Δ س م ن ~ Δ س ص ع

$\frac{\text{م ن}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{س م}}{\text{س ص}} = \frac{١}{٣}$

بالمثل $\frac{\text{ن ك}}{\text{ع ل}} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{\text{م ك}}{\text{ص ل}} = \frac{١}{٣}$

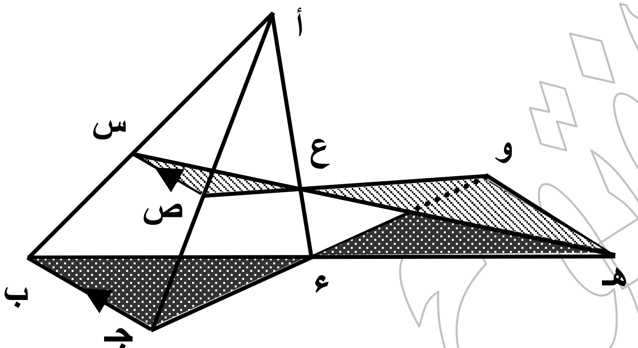
$\frac{\text{م ن}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ن ك}}{\text{ع ل}} = \frac{\text{م ك}}{\text{ص ل}} = \frac{١}{٣}$

∴ Δ م ن ك ~ Δ ص ع ل ومن التشابه ينتج أن

(ب) $\frac{\text{مـ}(\Delta\ \text{م ن ك})}{\text{مـ}(\Delta\ \text{ص ع ل})} = \left(\frac{\text{ن ك}}{\text{ع ل}}\right)^{٢} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$

$\frac{\text{مـ}(\Delta\ \text{م ن ك})}{٢٧٠} = \frac{١}{٩}$ ⟸ مـ (م ن ك) = ٣٠ سم^{٢}

٤. أ ب جـ ء هرم ثلاثي ، س ∈ أب ، ص ∈ أجـ ، ع ∈ أء فإذا كان س ص // ب جـ وكان س ع يقطع ب ء في هـ ، ص ع يقطع جـ ء في و أثبت أن : هـ و // س ص



الحل:

∵ س ص // ب جـ

والمستوى س ص هـ و يحوي س ص ، المستوى ب جـ هـ و يحوي ب جـ

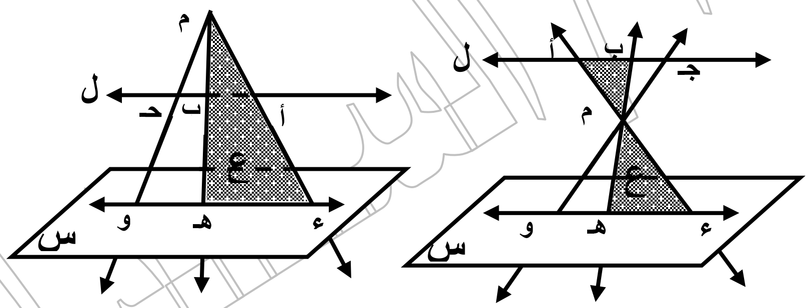
و خط تقاطع المستويين هو هـ و

∴ هـ و // س ص // ب جـ

....

٥.

أ ، ب ، جـ ثلاث نقط مختلفة تنتمي إلى مستقيم واحد ل يوازي مستوى مثل س ، م ∉ س ، م ∉ ل ، المستقيمات م أ ، م ب ، م جـ تقطع المستوى س في النقط ء ، هـ ، و على الترتيب . أثبت أن : $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$



الحل:

∵ أ ء ، ب هـ متقاطعان ⟸ فهما يعينان مستو وليكن ع

∵ المستقيم ل // المستوى س ، والمستوى ع يحوي ل ويقطع المستوى س في ء هـ

ل // ء هـ ⟸ أ ب // ء هـ

∴ Δ م أ ب ~ Δ م ء هـ

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م هـ}}$ .... (١)

بالمثل ل // هـ و ⟸ ب جـ // هـ و

∴ Δ م ب جـ ~ Δ م هـ و

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م هـ}}$ .... (٢)

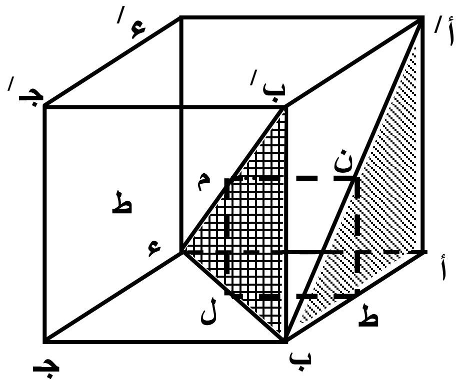
من (١) ، (٢) ينتج أن

$\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}$ ⟸ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{هـ و}}$

....

٦.

أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ متوازي سطوح ، م نقطة تقاطع أقطاره ، ط ، ل ، هـ منتصفان أ ب ، ب ء ، أ/ ب على الترتيب . أثبت أن : الشكل ن م ل ط متوازي أضلاع .



الحل:

في Δ ب أ أ/

ط ن قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي الضلعين ب أ ، ب أ/

ط ن // أ أ/ ، ط ن = $\frac{١}{٢}$ أ أ/ .... (١)

في Δ ء ب ب/

م ل قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي الضلعين ء ب ، ء ب/

م ل // ب ب/ ، م ل = $\frac{١}{٢}$ ب ب/ .... (٢)

من خواص متوازي الأضلاع أ ب ب/ أ/

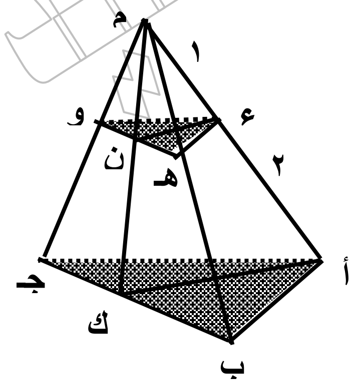
أ أ/ // ب ب/ ويساويه في الطول .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن
ط ن // م ل ويساويه في الطول
الشكل ن م ل ط متوازي أضلاع

تمارين (٤)

١. م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط ء ، هـ ، و على الأحرف م أ ، م ب ، م جـ على الترتيب بحيث كان : $\frac{\text{م ء}}{\text{ء أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{\text{م و}}{\text{و جـ}} = \frac{١}{٢}$ أثبت أن :

المستوى ء هـ و // المستوى أ ب جـ



الحل:

$\frac{\text{م ء}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}}$

∴ ء هـ // أ ب .... (١)

بالمثل هـ و // ب جـ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

المستوى ء هـ و // المستوى أ ب جـ

....

٢. في التمرين السابق إذا أخذنا نقطة ك ∈ ب جـ ورسمنا م ك فقطعت هـ و في ن فأثبت أن : أولاً : ء ن // أ ك   ثانياً : أ ك = ٣ ء ن

الحل :

∵ المستوى م أ ك يقطع المستويين المتوازيين ء هـ و ، أ ب جـ في ء ن ، أ ك ⟸ ء ن // أ ك

Δ م ء ن ~ Δ م أ ك

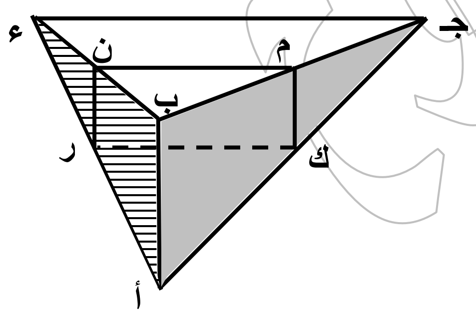
$\frac{\text{ء ن}}{\text{أ ك}} = \frac{\text{م ء}}{\text{م أ}}$ ⟸ $\frac{\text{ء ن}}{\text{أ ك}} = \frac{١}{٣}$ أ ك = ٣ ء ن

....

٣. أ ب جـ ء هرم ثلاثي ، م ∈ ب جـ رسم المستوى س يمر بالنقطة م ويوازي كلاً من أ ب ، جـ ء فقطع ب ء في نقطة ن ، أ جـ في نقطة ك ، أ ء في نقطة ر . أثبت أن :

أولاً : الشكل م ن ر ك متوازي أضلاع

ثانياً : إذا كان أ ب = جـ ء ، م منتصف ب جـ فإن الشكل م ن ر ك يكون معيناً .



الحل:

المستوى م ن ر ك هو المستوى س

∵ أ ب // المستوى س ، المستوى أ ب جـ يحوى أ ب ويقطع المستوى س في م ك

∴ أ ب // م ك .... (١)

بالمثل ن ر // أ ب .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

م ك // ن ر .... (٣)

∵ جـ ء // المستوى س ، المستوى ب جـ ء يحوى جـ ء ويقطع المستوى س في م ن

∴ جـ ء // م ن .... (٤)

بالمثل جـ ء // ك ر .... (٥)

من (٤) ، (٥) ينتج أن

م ن // ك ر .... (٦)

من (٣) ، (٦) ينتج أن الشكل م ن ر ك متوازي أضلاع

ثانيا :

في Δ جـ أ ب

ك ، م منتصفي الضلعين جـ أ ، جـ ب ⇐ ك م = $\frac{١}{٢}$ أ ب

بالمثل م ن = $\frac{١}{٢}$ جـ ء

∵ أ ب = جـ ء

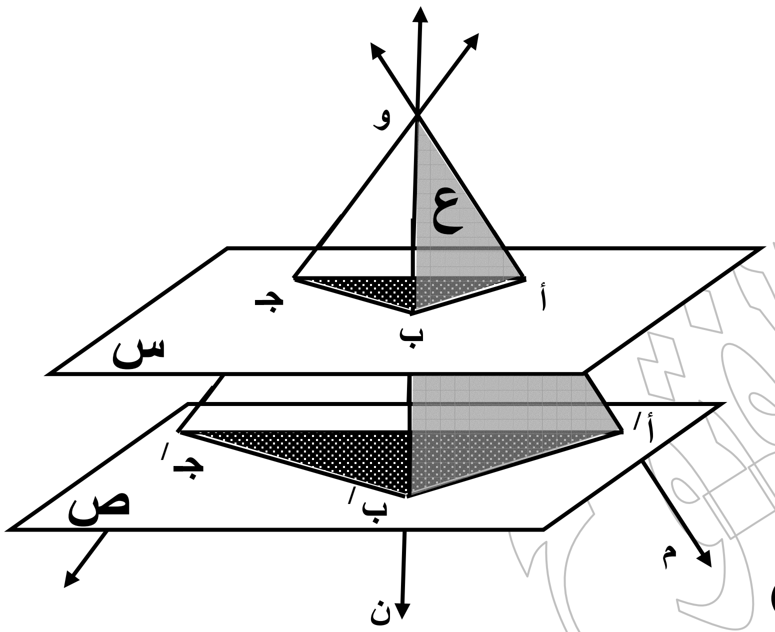
∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ جـ ء

∴ ك م = م ن .... (٧)

من (٦) ، (٧) ينتج أن الشكل م ن ر ك معيناً

....

٤. و م ، و ن مستقيمان متقاطعان ويقطعان مستويين متوازيين س ، ص .
و م يقطعهما في أ ، أ/ ، و ن يقطعهما في ب ، ب/ على الترتيب
اثبت أن أ ب // أ/ب/ ، وإذا كانت جـ نقطة في المستوى س بحيث جـ ∉ أ ب وقطع جـ و المستوى ص في نقطة جـ/ فاثبت أن
Δ أ ب جـ ~ Δ أ/ ب/ جـ/



الحل:

∵ و م ، و ن مستقيمان متقاطعان

∴ فهما يعينان مستويا وليكن المستوى ع

∵ المستوى ع قطع المستويين المتوازين س ، ص في أ ب ، أ/ب/

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ}^{/}\text{ب}^{/}}$

بالمثل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب}^{/}\text{جـ}^{/}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ}^{/}\text{جـ}^{/}}$

في Δ و $\text{أ}^{/}$ $\text{ب}^{/}$ ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ}^{/}\text{ب}^{/}}$

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ}^{/}\text{ب}^{/}} = \frac{\text{و ب}}{\text{و ب}^{/}} = \frac{\text{و أ}}{\text{و أ}^{/}}$ .... (١)

بالمثل $\frac{\text{ب جـ}}{\text{ب}^{/}\text{جـ}^{/}} = \frac{\text{و ب}}{\text{و ب}^{/}} = \frac{\text{و جـ}}{\text{و جـ}^{/}}$ .... (٢)

بالمثل $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ}^{/}\text{جـ}^{/}} = \frac{\text{و جـ}}{\text{و جـ}^{/}} = \frac{\text{و أ}}{\text{و أ}^{/}}$ .... (٣)

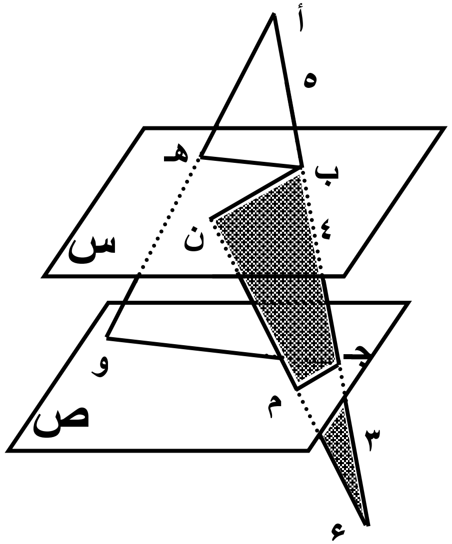
من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ}^{/}\text{ب}^{/}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب}^{/}\text{جـ}^{/}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ}^{/}\text{جـ}^{/}}$

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ $\text{أ}^{/}\text{ب}^{/}\text{جـ}^{/}$

....

٥.

في شكل (٥٣) : س ، ص مستويان متوازيان ،
$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ يقطع المستويين في ب، جـ على الترتيب بحيث كان أ ب : ب جـ : جـ ء = ٥ : ٤ : ٣ ، $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ يقطع س ، ص في النقطتين هـ ، و ، $\overleftrightarrow{\text{ء ن}}$ يقطعهما في م ، ن . أثبت أن : $\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{٥}{٢١}$



الحل:

المستوى ء ب ن قطع المستويين المتوازيين ص ، س في $\overline{\text{جـ م}}$ ، $\overline{\text{ب ن}}$

$\overline{\text{جـ م}} \parallel \overline{\text{ب ن}}$

Δ ء جـ م ~ Δ ء ب ن

$\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} = \frac{\text{ء جـ}}{\text{ء ب}} = \frac{٣}{٧}$ .... (١)

المستوى أ جـ و قطع المستوين المتوازين س ، ص في $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}}$

$\overline{\text{ب هـ}} \parallel \overline{\text{جـ و}}$

Δ أ ب هـ ~ Δ أ جـ و

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{٥}{٩}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\frac{\text{م جـ}}{\text{ن ب}} \times \frac{\text{ب هـ}}{\text{جـ و}} = \frac{٣}{٧} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٥}{٢١}$

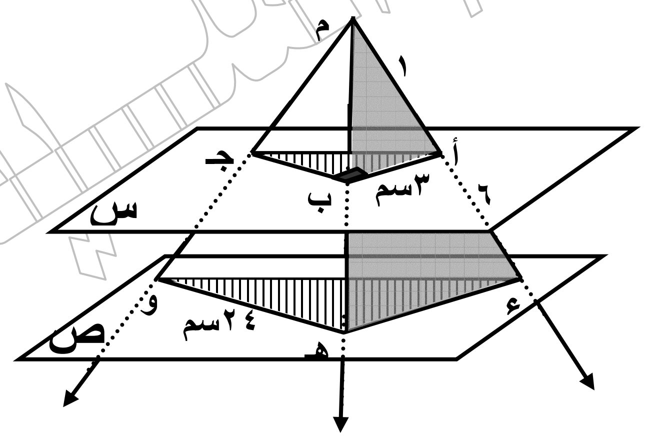
....

٦. س ، ص مستويان متوازيان ، م نقطة خارجهما . رسم $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ فقطعت المستوى س في أ ، ب ، جـ ، المستوى ص في ء ، هـ ، و على الترتيب فإذا كان $\frac{\text{م أ}}{\text{م ء}} = \frac{١}{٦}$ ، أ ب = ٣سم ، هـ و = ٢٤سم

ق$(\widehat{\text{أ ب جـ}})$ = ٩٠°

(١) اثبت أن : ق$(\widehat{\text{ء هـ و}})$ = ٩٠°

(٢) احسب مساحة سطح المثلث ء هـ و



الحل:

∵ المستوى م ء هـ قطع المستويين المتوازيين س ، ص في $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء هـ}}$

∴ Δ م أ ب ~ Δ م ء هـ

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء هـ}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ء}} = \frac{١}{٦}$ ⟸ $\frac{٣}{\text{ء هـ}} = \frac{١}{٦}$ ⟸ ء هـ = ١٨سم

بالمثل $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م هـ}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ء}} = \frac{١}{٦}$ ⟸ $\frac{\text{ب جـ}}{٢٤} = \frac{١}{٦}$ ⟸ ب جـ = ٤سم

في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب

$(\text{أ جـ})^٢ = (\text{أ ب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢$ = ٩ + ١٦ = ٢٥ ⟸ أ جـ = ٥سم

$\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{ء و}}$ .... لماذا ؟

∴ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{ء و}} = \frac{\text{م أ}}{\text{م ء}} = \frac{١}{٦}$ ⟸ $\frac{٥}{\text{ء و}} = \frac{١}{٦}$ ⟸ ء و = ٣٠سم

في Δ ء هـ و

$(\text{ء هـ})^٢ + (\text{هـ و})^٢$ = ٢٣٤ + ٥٧٦ = ٩٠٠

$(\text{ء و})^٢$ = ٩٠٠

∴ $(\text{ء و})^٢ = (\text{ء هـ})^٢ + (\text{هـ و})^٢$

∴ ق$(\widehat{\text{ء هـ و}})$ = ٩٠°

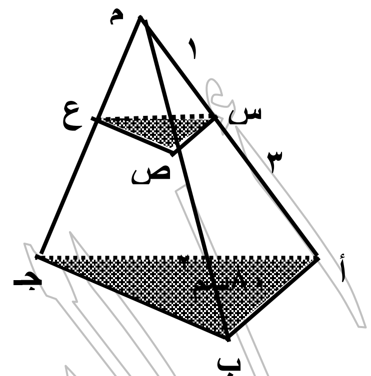
م (Δ ء هـ و) = $\frac{١}{٢}$ هـ و × ء هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ١٨ = ٢١٦سم^٢

....

٧. م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت نقطة س ∈ $\overline{\text{م أ}}$ بحيث م س : م أ يساوي ١ : ٤ رسم مستوى يمر بالنقطة س موازياً المستوى أ ب جـ ، ويقطع $\overline{\text{م ب}}$ في ص ، $\overline{\text{م جـ}}$ في ع .

(أولاً) أثبت أن : المثلث س ص ع يشابه المثلث أ ب جـ

(ثانياً) إذا كانت مساحة سطح المثلث أ ب جـ تساوي ٨٠ سم^٢ فأحسب مساحة سطح المثلث س ص ع .



الحل:

∵ المستوى م أ ب قطع المستوين المتوازيين س ص ع ، أ ب جـ في $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

∴ Δ م س ص ~ Δ م أ ب

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{م س}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ب}} = \frac{١}{٤}$ .... (١)

بالمثل $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

Δ م ص ع ~ Δ م ب جـ

∴ $\frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ب}} = \frac{١}{٤}$ .... (٢)

بالمثل $\frac{\text{س ع}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{م س}}{\text{م أ}} = \frac{١}{٤}$ .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن

$\frac{\text{س ص}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{س ع}}{\text{أ جـ}} = \frac{١}{٤}$

∴ Δ س ص ع ~ Δ أ ب جـ

ثانيا : من التشابه ينتج أن

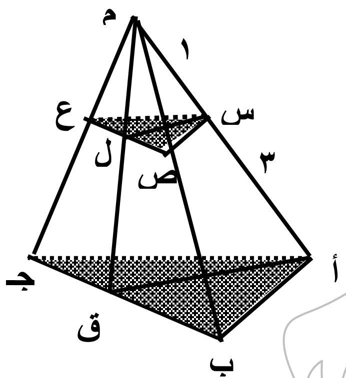
$\frac{\text{مـ}(\Delta\ \text{س ص ع})}{\text{مـ}(\Delta\ \text{أ ب جـ})} = \left(\frac{\text{م س}}{\text{م أ}}\right)^{٢} = \frac{١}{١٦}$

$\frac{\text{مـ}(\Delta\ \text{س ص ع})}{٨٠} = \frac{١}{١٦}$ ⇐ مـ (Δ س ص ع) = ٥سم^{٢}

....

٨.

م أ ب جـ هرم ثلاثي أخذت النقط س ، ص ، ع على الأحرف $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ على الترتيب بحيث كان $\frac{\text{م س}}{\text{س أ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{ص ب}} = \frac{\text{م ع}}{\text{ع جـ}} = \frac{١}{٣}$ أثبت أن المستوى س ص ع // المستوى أ ب جـ . وإذا فرضت النقطة ق ∋ $\overline{\text{ب جـ}}$ ورسمت $\overline{\text{م ق}}$ فقطعت $\overline{\text{ص ع}}$ في ل فأثبت أن أ ق = ٤ س ل



الحل:

$\frac{\text{م س}}{\text{م أ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{م ب}}$ معطى

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ .... (١)

بالمثل $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

المستوى س ص ع // المستوى أ ب جـ

ثانيا : ∵ المستوى م أ ق يقطع المستويين المتوازيين س ص ع ، أ ب جـ

في س ل ، أ ق ⟸ س ل // أ ق

∆ م س ل ~ ∆ م أ ق

$\frac{\text{س ل}}{\text{أ ق}} = \frac{\text{م س}}{\text{م أ}}$ ⟸ $\frac{\text{س ل}}{\text{أ ق}} = \frac{١}{٤}$ ⟸ أ ق = ٤ س ل

تمارين (٥)

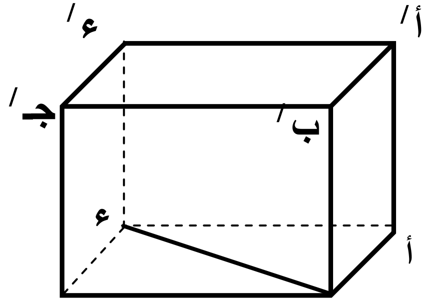
١. في شكل (٦٥) : أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ متوازي مستطيلات

(أ) ما وضع أ أ/ بالنسبة للمستوى أ ب جـ ء ؟ ولماذا ؟

(ب) ما وضع أ ء بالنسبة للمستوى أ ب ب/ أ/؟ ولماذا ؟

(جـ) ما وضع ب أ بالنسبة للمستوى أ ء ء/ أ/؟ ولماذا ؟

(ء) أثبت أن أ أ/ ⊥ ب ء



شكل (٦٥)

الحل:

(أ) أ أ/ ⊥ المستوى أ ب جـ ء

لأن أ أ/ ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين أ ء ، أ ب

(ب) ء أ ⊥ المستوى أ ب ب/ أ/

لأن ء أ ⊥ كل من أ ب ، أ أ/

(جـ) ب أ ⊥ المستوى أ ء ء/ أ/

لأن ب أ ⊥ كل من أ ء ، أ أ/

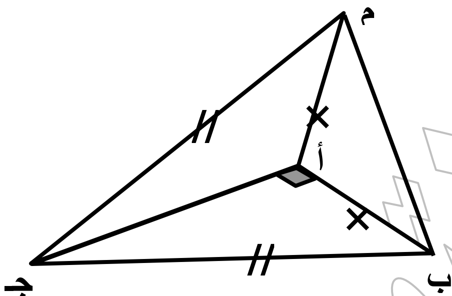
(ء) أ أ/ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ، ب ء ⊂ المستوى أ ب جـ ء

أ أ/ ⊥ ب ء

....

٢. في شكل (٦٦) : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، م نقطة لا تنتمي للمثلث أ ب جـ ، م أ = أ ب ، م جـ = ب جـ اثبت أن :

أ جـ ⊥ المستوى م أ ب



شكل(٦٦)

الحل:

∆∆ جـ أ م ، جـ أ ب

فيهما:
- جـ أ ضلع مشترك
- جـ م = جـ ب
- م أ = ب أ

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن : ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ م) = ق(جـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٩٠°

∴ جـ أ ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين م أ ، ب أ

∴ جـ أ ⊥ مستويهما أ م ب

....

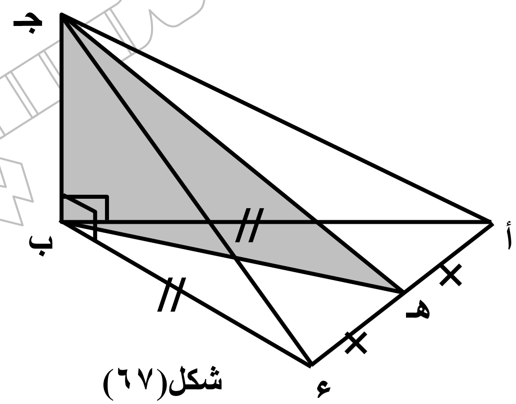
٣. في شكل (٦٧) :

إذا كان أ ب ⊥ ب جـ ، ء ب ⊥ ب جـ ، أ ب = ب ء فأثبت أن :

(أولاً) Δ أ ب جـ ≡ Δ ء ب جـ

(ثانياً) ب جـ ⊥ المستوى أ ب ء

(ثالثاً) أ ء ⊥ المستوى هـ ب جـ حيث هـ منتصف أ ء



شكل(٦٧)

الحل:

أولاً : Δ Δ أ ب جـ ، ء ب جـ

فيهما:
- ب جـ ضلع مشترك
- ب أ = ب ء
- ق(جـ ب̂ أ) = ق(جـ ب̂ ء)

∴ Δ أ ب جـ ≡ Δ ء ب جـ

ثانياً : ∵ ب جـ ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين ب أ ، ب ء

∴ ب جـ ⊥ مستويهما أ ب ء

ب جـ ⊥ أ ء .... (١)

ثالثاً : في Δ ب أ ء المتساوي الساقين ∵ هـ منتصف أ ء

∴ ب هـ ⊥ أ ء .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

أ ء ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين ب هـ ، ب جـ

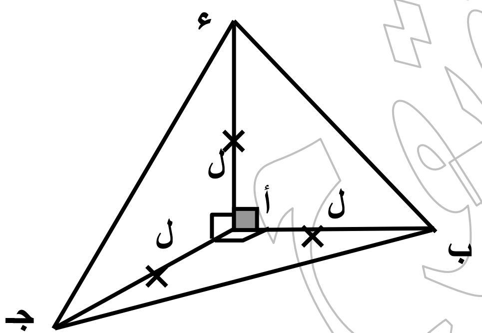
∴ أ ء ⊥ مستويهما هـ ب جـ

....

٤. النقط أ ، ب ، جـ ، ء لا تقع في مستوى واحد وكان أ ب = أ جـ = أ ء

، أ ب ⊥ المستوى أ جـ ء ، أ ء ⊥ المستوى ب أ جـ

ارسم شكلاً يوضح ذلك وأثبت أن Δ ب جـ ء متساوي الأضلاع



الحل:

∵ أ ب ⊥ المستوى أ جـ ء ∴ ب أ̂ جـ قائمة ، ب أ̂ ء قائمة

∵ أ ء ⊥ المستوى ب أ جـ ∴ ء أ̂ جـ قائمة

من تطابق المثلثات ء أ جـ ، ء أ ب ، ب أ جـ ينتج أن :

ب ء = ء جـ = ب جـ ∴ Δ ب جـ ء متساوي الأضلاع

حل آخـــــــــــــــــــر :

في Δ ب أ جـ :

(ب ء)^{٢} = (ء أ)^{٢} + (أ ب)^{٢} = ل^{٢} + ل^{٢} = ٢ ل^{٢}

(ء جـ)^{٢} = (ء أ)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ل^{٢} + ل^{٢} = ٢ ل^{٢}

(ب جـ)^{٢} = (ب أ)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ل^{٢} + ل^{٢} = ٢ ل^{٢}

∴ (ب ء)^{٢} = (ء جـ)^{٢} = (ب جـ)^{٢}

∴ ب ء = ء جـ = ب جـ ∴ Δ ب جـ ء متساوي الأضلاع

....

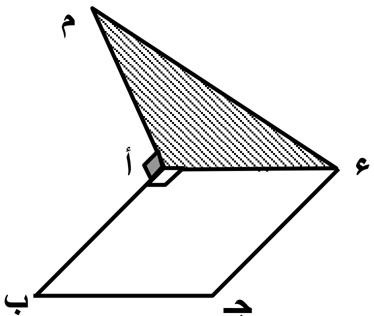
٥. في شكل (٦٨) :

أ ب جـ ء مربع ، م نقطة لا تنتمي إلى مستوى المربع بحيث م أ ⊥ أ ب

(أولاً) هل م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ولماذا ؟

(ثانياً) أ ثبت أن ب أ ⊥ المستوى م أ ء

(ثالثاً) هل يوجد مستقيم آخر عمودي على المستوى م أ ء ؟ ولماذا ؟



شكل(٦٨)

الحل:

أولاً : لا :

م أ ليس عمودي على المستوى أ ب جـ ء لأن

م أ ليس عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوى أ ب جـ ء

ثانياً : ب أ ⊥ أ ء من خواص المربع ، ب أ ⊥ أ م معطى

∴ ب أ ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين أ ء ، أ م

∴ ب أ ⊥ مستويهما م أ ء

ثالثاً : نعم :

يوجد مستقيم آخر عمودي على المستوى م أ ء وهو المستقيم جـ ء

السبب هو

∵ جـ ء // ب أ من خواص المربع ، ب أ ⊥ المستوى م أ ء

∴ جـ ء ⊥ المستوى م أ ء

....

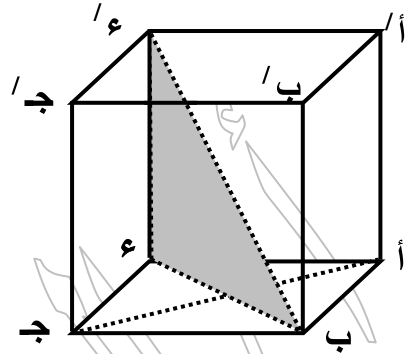
٦. أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ مكعب طول حرفه يساوي ل أ ثبت أن :

(أولاً) Δ ء أ جـ متساوي الأضلاع . واحسب مساحة سطحه بدلالة ل

(ثانياً) أ ب ⊥ ب جـ/ (ثالثاً) أ جـ ⊥ ء/ ب

(رابعاً) أثبت أن أقطار المكعب متساوية في الطول . وطول كل منها ل √٣

(وتستخدم هذه الخاصة في حل التمارين)



الحل:

أولاً : في Δ أ ء جـ القائم في ء

(أ جـ)^{٢} = (أ ء)^{٢} + (ء جـ)^{٢} = ل^{٢} + ل^{٢} = ٢ ل^{٢} .... (١)

بالمثل في Δ ء/ ء أ/ القائم الزاوية في ء

(ء/ أ)^{٢} = (ء/ ء)^{٢} + (ء أ)^{٢} = ل^{٢} + ل^{٢} = ٢ ل^{٢} ....(٢)

بالمثل في Δ ء/ ء جـ القائم الزاوية في ء

(ء/ جـ)^{٢} = (ء/ ء)^{٢} + (ء جـ)^{٢} = ل^{٢} + ل^{٢} = ٢ ل^{٢} ....(٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن :

(أ جـ)^{٢} = (ء/ أ)^{٢} = (ء/ جـ)^{٢}

∴ أ جـ = ء/ أ = ء/ جـ

∴ Δ ء/ أ جـ متساوي الأضلاع

ثانياً : ∵ أ ب ⊥ الوجه ب ب/ جـ/ جـ   من خواص المكعب

∴ أ ب ⊥ ب جـ/

ثالثاً : ∵ ء/ ء ⊥ الوجه أ ب جـ ء   ∴ ء/ ء ⊥ أ جـ .... (٤)

في المربع أ ب جـ ء قطراه متعامدان

∴ ء ب ⊥ أ جـ ....(٥)

من (٤) ، (٥) ينتج أن :

أ جـ ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين ء/ ء ، ء ب

∴ أ جـ ⊥ مستويهما ء/ ء ب   ∴ أ جـ ⊥ ء/ ب

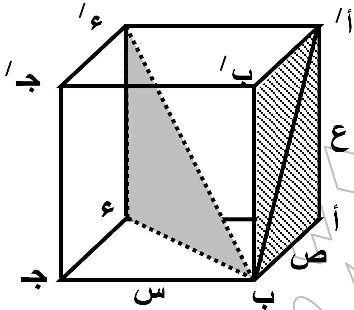
....

٧. أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ متوازي مستطيلات أبعاده الثلاثة ب جـ = س ، ب أ = ص ، ب ب/ = ع

(أولاً) أثبت أن : ب جـ ⊥ ب أ/

(ثانياً) أثبت أن أقطار متوازي المستطيلات متساوية في الطول ومربع طول كل منها يساوي س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}

(ثالثاً) إذا كانت س = ٨سم ، ص ٦سم ، ع = ٢٤سم فاحسب طول قطر متوازي المستطيلات . (وتستخدم هذه الخاصية في حل التمارين)



الحل:

أولاً : ∵ ب جـ ⊥ الوجه أ ب ب/ أ/   من خواص متوازي المستطيلات

∴ ب جـ ⊥ ب أ/

ثانياً : في Δ ء جـ ب القائم الزاوية في جـ

(ء ب)^{٢} = (ء جـ)^{٢} + (جـ ب)^{٢}

(ء ب)^{٢} = ص^{٢} + س^{٢}

في Δ ء/ ء ب القائم الزاوية في ء

(ء/ ب)^{٢} = (ء/ ء)^{٢} + (ء ب)^{٢}

$= \text{ع}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{س}^{2}$

$(\text{ء}^{/}\text{ب})^{2} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2}$

أي أن $\text{ر}^{2} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2}$ حيث ر طول القطر $\overline{\text{ء}^{/}\text{ب}}$

بالمثل يمكن إثبات أن :

مربع طول كل قطر $= \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2}$

ثالثاً : $\text{ر}^{2} = \text{س}^{2} + \text{ص}^{2} + \text{ع}^{2} = ٨^{2} + ٦^{2} + ٢٤^{2}$

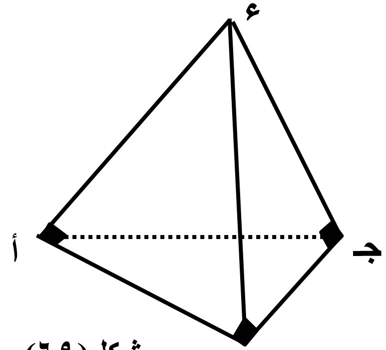
$\text{ر}^{2} = ٦٧٦$　　　∴ ر = ٢٦سم

....

٨. في شكل (٦٩)

ء أ ب جـ هرم ثلاثي فيه $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ب أ}} \perp \overline{\text{أ ء}}$

ابحث في الشكل عن قطعة مستقيمة تكون عمودية على أي مستو فيه مع ذكر القطعة المستقيمة والمستوى إن وجدا والسبب في ذلك .



شكل(٦٩)

الحل:

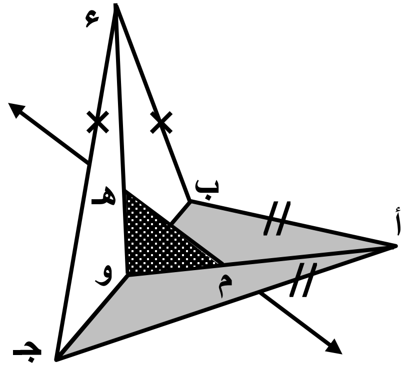
لا توجد قطعة مستقيمة عمودية على أي مستو في الشكل

....

٩.

أ ب جـ ، ء ب جـ مثلثان متساويا الساقين مشتركان في القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$ وغير واقعين في مستوى واحد ، م ، هـ نقطتا تقاطع متوسطاتهما على الترتيب .

أثبت أن : $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{م هـ}}$



الحل:

في Δ أ ب جـ المتساوي الساقين

∵ $\overline{\text{أ و}}$ ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$ عملاً

∴ $\overline{\text{أ و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ .... (١)

في Δ ء ب جـ المتساوي الساقين

$\overline{\text{ء و}}$ ينصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{ء و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\overline{\text{ب جـ}} \perp$ كل من المستقيمين المتقاطعين $\overline{\text{أ و}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$

$\overline{\text{ب جـ}} \perp$ مستويهما أ و ء

$\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{م هـ}}$

....

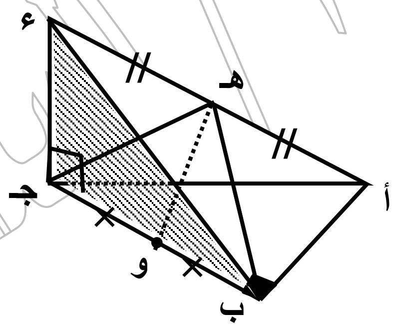
١٠.

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب رسم جـ ء ⊥ المستوى أ ب جـ ، نصفت أ ء في هـ ، ب جـ في و . أثبت أن :

(أولاً) أ ب ⊥ المستوى ب جـ ء

(ثانياً) هـ ب = هـ جـ

(ثالثاً) هـ و ⊥ ب جـ



الحل:

أولاً : ∵ ء جـ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ ء جـ ⊥ أ ب   لكن ب جـ ⊥ أ ب   معطى

∴ أ ب ⊥ كل من ء جـ ، ب جـ

∴ أ ب ⊥ مستويهما ب جـ ء   ∴ أ ب ⊥ ب ء

ثانياً : في Δ أ ب ء القائم الزاوية في ب

∵ ب هـ متوسط خارج من رأس القائمة ب

∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ أ ء ....(١)

في Δ أ جـ ء   ∵ جـ هـ متوسط خارج من رأس القائمة جـ

∴ جـ هـ = $\frac{1}{2}$ أ ء .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج ان

ب هـ = جـ هـ

ثالثاً: في Δ هـ ب جـ المتساوي الساقين

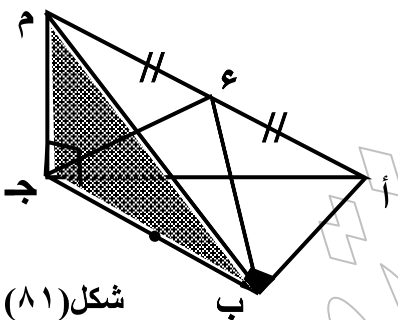
∵ هـ و ينصف القاعدة ب جـ

∴ هـ و ⊥ ب جـ

تمارين (٦)

١. في شكل (٨١) :

المستوى أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، جـ م ⊥ المستوى أ ب جـ ، ء منتصف أ م . أثبت أن : ء ب = ء جـ



شكل(٨١)

الحل:

∵ جـ م ⊥ المستوى أ ب جـ   ∴ م ب مائل مسقطه جـ ب

∵ المسقط جـ ب ⊥ أ ب   معطى

∴ المائل م ب ⊥ أ ب   .... نظرية

في Δ أ ب م القائم الزاوية في ب

∵ ء ب متوسط خارج من رأس القائمة ب

∴ ء ب = $\frac{1}{2}$ م أ ....(١)

في Δ أ جـ م القائم الزاوية في جـ

$\because$ ء جـ متوسط خارج من رأس القائمة جـ

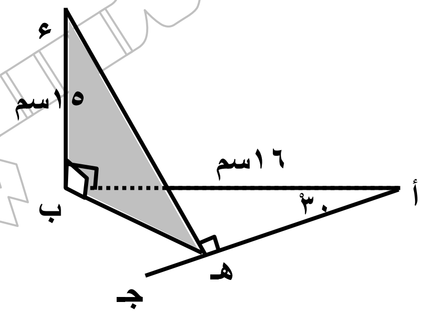
$\therefore$ ء جـ = $\frac{١}{٢}$ م أ ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :   ء ب = ء جـ

....

٢. في شكل (٨٢) :

ق (ب $\hat{أ}$ جـ) = ٣٠° ، أ ب = ١٦سم ، ء ب ⊥ المستوى أ ب جـ ، ء هـ ⊥ أ جـ فإذا كان ب ء = ١٥سم احسب ء هـ .



شكل(٨٢)

الحل:

ء ب ⊥ المستوى أ ب جـ

ء هـ مائل مسقطه ب هـ

المائل ء هـ ⊥ أ جـ ⊂ المستوى أ ب جـ

المسقط ب هـ ⊥ أ جـ

في Δ ب هـ أ القائم الزاوية في هـ   ب هـ مقابل للزاوية ٣٠°

ب هـ = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر أ ب = ٨ سم

في Δ ء ب هـ القائم الزاوية في ب

$(ء هـ)^{٢} = (ء ب)^{٢} + (ب هـ)^{٢}$ = ٢٢٥ + ٦٤ = ٢٨٩

ء هـ = ١٧ سم

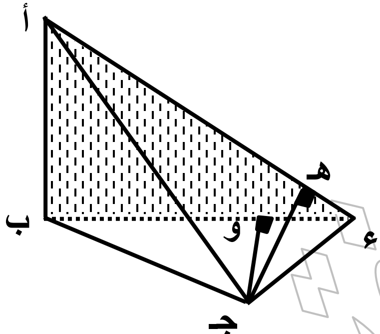
....

٣. في شكل (٨٣) :

أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه أ ب ⊥ المستوى ب جـ ء ، رسم جـ و ⊥ ب ء ، جـ هـ ⊥ أ ء   أثبت أن :

(أولاً) جـ و ⊥ المستوى أ ب ء

(ثانياً) و هـ ⊥ أ ء



شكل(٨٣)

الحل:

أولا : $\because$ أ ب ⊥ المستوى ب جـ ء

$\therefore$ أ ب ⊥ جـ و

لكن ب ء ⊥ جـ و معطى

جـ و ⊥ كل من أ ب ، ب ء

جـ و ⊥ مستويهما أ ب ء

$\therefore$ جـ و ⊥ أ ء .... (١)

ثانيا : جـ هـ ⊥ أ ء معطى .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

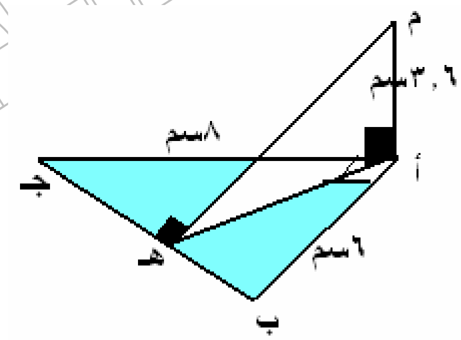
أ ء ⊥ كل من جـ و ، جـ هـ

أ ء ⊥ مستويهما جـ هـ و

أ ء ⊥ هـ و

....

٤. أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ . رسم أ م ⊥ المستوى أ ب جـ ، كان أ م = ٣,٦سم ، رسم م هـ ⊥ ب جـ ويقطعها في هـ ورسمت أ هـ . فإذا كان أ ب = ٦سم ، أ جـ = ٨سم فاحسب طول كل من أ هـ ، م هـ .



الحل:

م أ ⊥ المستوى أ ب جـ

م هـ مائل مسقطه أ هـ

المائل م هـ ⊥ ب جـ ⊂ المستوى أ ب جـ

المسقط أ هـ ⊥ ب جـ

في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في أ

(ب جـ)^{٢} = (ب أ)^{٢} + (أ جـ)^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠

ب جـ = ١٠ سم

أ هـ ⊥ ب جـ

أ هـ = $\frac{\text{أ ب . أ جـ}}{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨سم

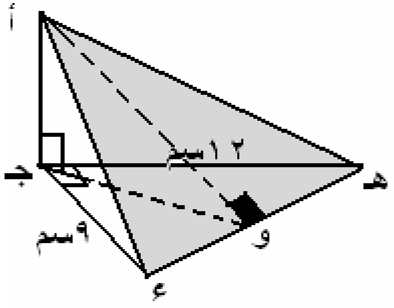
في Δ م أ هـ القائم الزاوية في أ

(م هـ)^{٢} = (م أ)^{٢} + (أ هـ)^{٢} = (٣,٦)^{٢} + (٤,٨)^{٢} = ٣٦

م هـ = ٦سم

....

٥. جـ ء هـ مثلث قائم الزاوية في جـ . رسم جـ أ ⊥ المستوى جـ ء هـ ، رسمت أ ء ، أ هـ وكانت مساحة سطح Δ أ هـ ء = ٩٦سم^{٢} ، جـ ء = ٩سم ، جـ هـ = ١٢سم . احسب طول أ هـ



الحل:

العمل : نرسم أ و ⊥ ء هـ ثم نصل جـ و

في Δ ء جـ هـ القائم في جـ

(ء هـ)^{٢} = (ء جـ)^{٢} + (جـ هـ)^{٢} = ٩^{٢} + ١٢^{٢} = ٢٢٥

ء هـ = ١٥سم

**م (Δ أ هـ ء) = ٩٦		$\frac{١}{٢}$ ء هـ × أ و = ٩٦**

$\frac{١}{٢}$ × ١٥ × أ و = ٩٦　　　أ و = ١٢,٨ سم

∵ $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ المستوى جـ ء هـ　　∴ $\overline{\text{أ و}}$ مائل مسقطه $\overline{\text{جـ و}}$

∵ $\overline{\text{أ و}}$ ⊥ $\overline{\text{ء هـ}}$　　∴ $\overline{\text{جـ و}}$ ⊥ $\overline{\text{ء هـ}}$

في ∆ جـ ء هـ القائم الزاوية في جـ

∵ جـ و ⊥ $\overline{\text{ء هـ}}$　　∴ (جـ هـ)^{٢} = هـ و . هـ ء

١٢^{٢} = ١٥ هـ و　　　هـ و = ٩,٦ سم

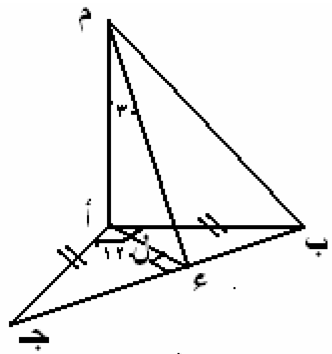
في ∆ أ و هـ القائم الزاوية في و

(أ هـ)^{٢} = (أ و)^{٢} + (و هـ)^{٢} = ١٢,٨^{٢} + ٩,٦^{٢} = ٢٥٦

أ هـ = ١٦سم

....

٦. أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ، ق (ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ١٢٠° ، رسم $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطعها في ء وكان أ ء = ل ، ورسم $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ فإذا كان ق (أ م ب) = ٣٠° فاحسب بدلالة ل كل من أ م ، م ء ، مساحة سطح ∆ م ب جـ .



(٦)

الحل:

في ∆ أ ب جـ المتساوي الساقين

∵ أ ب = أ جـ　　∴ ق (ب) = ق (جـ) = ٣٠°

$\overline{\text{أ ء}}$ مقابل للزاوية ٣٠°

∴ أ ء = $\frac{١}{٢}$ أ ب　　⇐　　أ ب = ٢ ل

في المثلث أ ب ء　　ب ء = ل$\sqrt{٣}$ من نظرية فيثاغورث

ب جـ = ٢ل$\sqrt{٣}$

في ∆ أ م ب القائم في أ

∵ ق (م) = ٣٠°　　∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ م ب

∴ م ب = ٤ ل

في ∆ أ ب م　　أ م = ٢ ل$\sqrt{٣}$ من نظرية فيثاغورث

في ∆ م أ ء القائم في أ

(م ء)^{٢} = (م أ)^{٢} + (أ ء)^{٢} = ١٢ ل^{٢} + ل^{٢} = ١٣ ل^{٢}

م ء = ل$\sqrt{١٣}$ سم

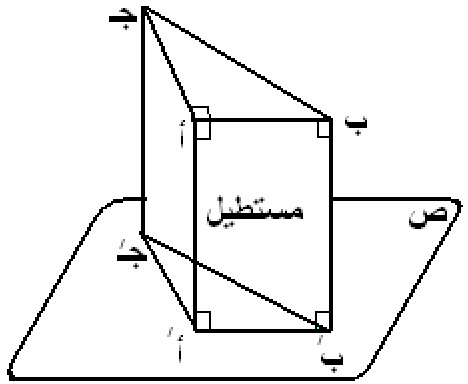
∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ　　∴ $\overline{\text{م ء}}$ مائل مسقطه $\overline{\text{أ ء}}$

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$　　∴ $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

م (∆ م ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × م ء = $\frac{١}{٢}$ × ٢ ل$\sqrt{٣}$ × ل$\sqrt{١٣}$ = ل$^{٢}\sqrt{٣٩}$

....

٧. س ، ص مستويان غير متوازيين شكل (٨٤) ، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ مرسوم في المستوى س ، أ/ ، ب/ ، جـ/ هي مساقط رؤوسه على المستوى ص على الترتيب ، فإذا كان أ ب // المستوى ص فأثبت ان : المثلث أ/ ب/ جـ/ قائم الزاوية في أ/ .



الحل:

$\because$ ب ب/ ، أ أ/ عمودان على المستوى ص

$\therefore$ ب ب/ // أ أ/ .... (١)

$\because$ أ ب // المستوى ص ، والمستوى أ ب ب/ أ/ يحوي أ ب ويقطع المستوى ص في أ/ ب/

$\therefore$ أ ب // أ/ ب/ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن أ ب ب/ أ/ متوازي أضلاع فيه أ أ/ $\perp$ أ/ ب/

$\therefore$ أ ب ب/ أ/ مستطيل $\therefore$ أ ب $\perp$ أ أ/

وحيث أن أ ب $\perp$ أ جـ معطى

$\therefore$ أ ب $\perp$ كل من أ أ/ ، أ جـ $\therefore$ أ ب $\perp$ مستويهما أ أ/ جـ/ جـ

$\because$ أ ب // أ/ ب/ إثباتاً $\therefore$ أ/ ب/ المستوى $\perp$ أ أ/ جـ/ جـ

$\therefore$ أ/ ب/ $\perp$ أ/ جـ/ $\therefore$ Δ أ/ ب/ جـ/ قائم الزاوية في أ/

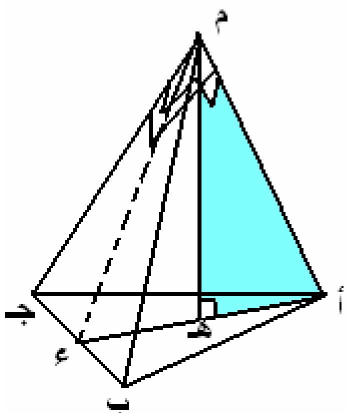
....

٨. م أ ب جـ هرم ثلاثي ، م أ ، م ب ، م جـ متعامدة مثنى مثنى

، م هـ $\perp$ المستوى أ ب جـ ويقطعه في هـ وكان أ هـ يقطع ب جـ في نقطة ء فأثبت أن :

(أولاً) م أ $\perp$ المستوى م ب جـ (ثانياً) م ء $\perp$ ب جـ

(ثالثاً) (م هـ)^2 = أ هـ . هـ ء



الحل:

أولا : $\because$ م أ $\perp$ كل من م ب ، م جـ معطى

$\therefore$ م أ $\perp$ المستوى م ب جـ

$\therefore$ م أ $\perp$ ب جـ .... (١)

ثانيا : $\because$ م هـ $\perp$ المستوى أ ب جـ

م هـ $\perp$ ب جـ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن ب جـ $\perp$ كل من م أ ، م هـ

$\therefore$ ب جـ $\perp$ مستويهما م أ ء

$\therefore$ ب جـ $\perp$ م ء

ثالثا : في Δ أ م ء القائم الزاوية في م

م هـ $\perp$ أ ء

∴ (م هـ)^{٢} = أ هـ . هـ ء

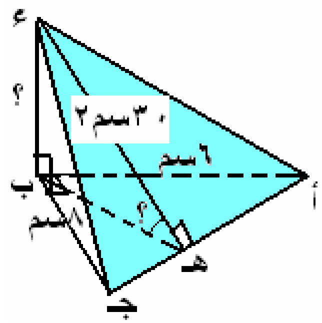
....

٩. أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، رسمت $\overline{\text{ب ء}}$ عمودية على المستوى أ ب جـ ثم رسمت $\overline{\text{ء هـ}}$ عمودية على $\overline{\text{أ جـ}}$ حيث هـ ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$. فإذا كانت مساحة المثلث أ جـ ء تساوى ٣٠سم^{٢} ، أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم .

فأوجد :

أولا : طول $\overline{\text{ب ء}}$

ثانيا : ظل زاوية ميل $\overline{\text{ء هـ}}$ على المستوى أ ب جـ



الحل:

في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

= ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ⇐ ∴ أ جـ = ١٠سم

∵ $\overline{\text{ء ب}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ⇐ ∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ مائل مسقطه $\overline{\text{ب هـ}}$

، ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

في Δ أ ب جـ القائم الزاوية في ب

$\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$

ب هـ = $\frac{\text{ب أ × ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ = $\frac{٦ \times ٨}{١٠}$ = ٤,٨سم

مـ (Δ ء أ جـ) = ٣٠

$\frac{١}{٢}$ أ جـ × ء هـ = ٣٠

$\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ء هـ = ٣٠   ء هـ = ٦سم

في Δ ء هـ ب القائم الزاوية في ب

(ء ب)^{٢} = (ء هـ)^{٢} - (هـ ب)^{٢}

= (٦)^{٢} − (٤,٨)^{٢} = ١٢,٩٦ ⇐ ء ب = ٣,٦سم

ثانيا : ظا (ء $\hat{\text{هـ}}$ ب) = $\frac{\text{ء ب}}{\text{هـ ب}}$ = $\frac{٣,٦}{٤,٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

ظل زاوية ميل $\overline{\text{ء هـ}}$ على المستور أ ب جـ يساوي $\frac{٣}{٤}$

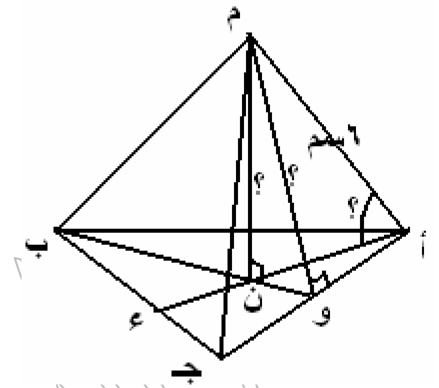
....

١٠. م أ ب جـ هرم ثلاثي منتظم طول حرفه ٦سم . أوجد :

أولا : الارتفاع الجانبي للهرم

ثانيا : ارتفاع الهرم

ثالثا : قياس زاوية ميل الحرف $\overline{\text{م أ}}$ على مستوى القاعدة أ ب جـ



الحل:

أولا : في Δ أ م جـ المتساوي الأضلاع $\because$ م و $\perp$ أ جـ

$\therefore$ أ و = و ب = ٦سم

في Δ أ و م القائم الزاوية في و

(م و)^2 = (م أ)^2 − (أ و)^2 = ٣٦ − ٩ = ٢٧

م و = ٣ $\sqrt{3}$　$\therefore$ الارتفاع الجانبي للهرم = ٣ $\sqrt{3}$

بالمثل　ب و = ٣ $\sqrt{3}$

ن ملتقى متوسطات Δ أ ب جـ

ن و = $\frac{1}{3}$ ب و = $\frac{1}{3}$ × ٣ $\sqrt{3}$ = $\sqrt{3}$ سم

ثانيا : في Δ م ن و القائم الزاوية في ن

(م ن)^2 = (م و)^2 − (و ن)^2 = (٣ $\sqrt{3}$)^2 − ($\sqrt{3}$)^2 = ٢٤

م ن = $\sqrt{24}$ = ٢ $\sqrt{6}$ سم

ثالثا : أ ن = $\frac{2}{3}$ أ ء = $\frac{2}{3}$ × ٣ $\sqrt{3}$ = ٢ $\sqrt{3}$ سم

زاوية ميل م أ على مستوى القاعدة أ ب جـ هي م $\hat{أ}$ ن

جتا (م $\hat{أ}$ ن) = $\frac{\text{ن أ}}{\text{م أ}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{6}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

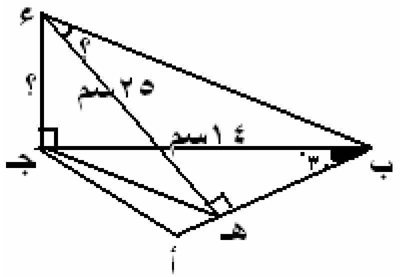
ق (م $\hat{أ}$ ن) = ٤٤َ　٥٤ ْ

....

١١. أ ب جـ مثلث فيه ق ($\hat{ب}$) = ٣٠ ْ ، ب جـ = ١٤سم ، رسم جـ ء عموديا على المستوى أ ب جـ ثم رسم ء هـ $\perp$ أ ب فقطعها في النقطة هـ فإذا كان ء هـ = ٢٥سم فأوجد :

أولا : طول جـ ء

ثانيا : ظل زاوية ميل ب ء على المستوى جـ ء هـ



الحل:

جـ ء $\perp$ المستوى أ ب جـ　　ء هـ مائل مسقطه جـ هـ

ء هـ $\perp$ أ ب معطى

جـ هـ $\perp$ أ ب

في Δ ب هـ جـ القائم الزاوية في هـ

جـ هـ مقابل للزاوية ٣٠ ْ　$\Leftarrow$　جـ هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = ٧سم

ب هـ = ٧ $\sqrt{3}$ سم

في Δ ء جـ هـ القائم الزاوية في جـ

(ء جـ)^2 = (ء هـ)^2 − (جـ هـ)^2

= (٢٥)^2 − (٧)^2 = ٥٧٦　　ء جـ = ٢٤سم

ب هـ ⊥ كل من ء هـ ، جـ هـ

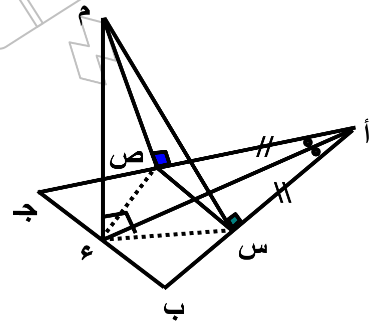
ب هـ ⊥ مستويهما ء جـ هـ ، ب ء مائل مسقطه هـ ء

زاوية ميل ب ء على المستوى جـ ء هـ هي ب ء^ هـ

ظا (ب ء^ هـ) = (ب هـ) / (ء هـ) = (٧ √٣) / ٢٥

....

١٢. أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ ، أ ء ينصف أ^ ويقطع ب جـ في ء
رسمت ء م عمودية على المستوى أ ب جـ ثم رسم م س ⊥ أ ب
قطعها في س ، م ص ⊥ أ جـ قطعها في ص اثبت أن :
(أولاً) ء س = ء ص (ثانياً) س ص // ب جـ



الحل:

في Δ أ ب جـ المتساوي الساقين

∵ أ ء ينصف أ^ ∴ أ ء ⊥ ب جـ وينصفها

∵ م ء ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ م س مائل مسقطه ء س

∵ م س ⊥ أ ب معطى ∴ ء س ⊥ أ ب

بالمثل ء ص ⊥ أ جـ

Δ Δ أ س ء ، أ ص ء

فيهما:
- أ ء ضلع مشترك
- ق(س أ^ ء) = ق(ص أ^ ء) معطى
- ق(ء س^ أ) = ق(ء ص^ أ) = ٩٠°

∴ Δ أ س ء ≡ Δ أ ص ء وينتج أن

ء س = ء ص ، أ س = أ ص

وحيث أن أ ب = أ جـ

ثانيا : (أ س) / (أ ب) = (أ ص) / (أ جـ) ⟸ س ص // ب جـ

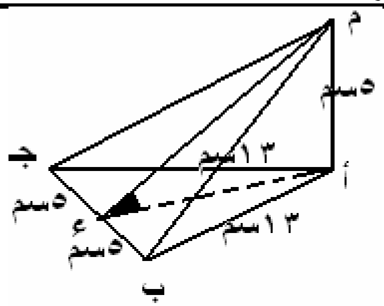
تمارين (٧)

١. م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه م أ ⊥ المستوى أ ب جـ ، أ ب = أ جـ = ١٣ سم
، ب جـ = ١٠ سم ، م أ = ٥ سم ، ء منتصف ب جـ

(أ) احسب طول أ ء واثبت أن م ء ⊥ ب جـ

(ب) احسب طول م ء وأوجد زاوية مستوية للزاوية الزوجية
(م - ب جـ - أ) وإذا فرضنا أن قياسها هـ فاحسب جتا هـ

(جـ) اثبت أن المستويين م أ ء ، م ب جـ متعامدان



الحل:

(أ) في Δ أ ب جـ المتساوي الساقين

∵ ء منتصف ب جـ　　∴ أ ء ⊥ ب جـ

(أ ء)^2 = (أ ب)^2 − (ب ء)^2

= ١٦٩ − ٢٥ = ١٤٤　　أ ء = ١٢ سم

∵ م أ ⊥ المستوى أ ب جـ　　∴ م ء مائل مسقطه أ ء

∵ أ ء ⊥ ب جـ ⊂ المستوى أ ب جـ

∴ المائل م ء ⊥ ب جـ

(ب) في Δ م أ ء القائم الزاوية في أ

(م ء)^2 = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩　⟸　م ء = ١٣ سم

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية م - ب جـ - أ هي أ ءˆ م

جتا هـˆ = $\frac{١٢}{١٣}$

(جـ) ∵ ب جـ ⊥ كل من م ء ، أ ء

∴ ب جـ ⊥ المستوى م أ ء

∵ ب جـ ⊂ المستوى م ب جـ

∴ المستويان م أ ء ، م ب جـ متعامدان

....

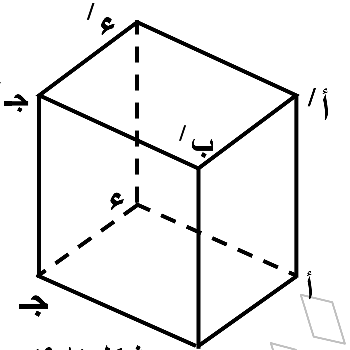
٢. فى الشكل (٩٨) : أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ مكعب

(أ) اذكر احدى الزوايا الزوجية القائمة مستخدما رؤس المكعب مع ذكر احدى زواياها المستوية

(ب) اذكر ثلاثة أزواج من المستويات المتعامدة

(جـ) هل المستوى أجـ جـ/ أ/ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ؟ ولماذا؟

اثبت أن ق (ب – جـ جـ/ - أ/) =ق(ب – أ أ/ - جـ)



شكل(٩٨)

الحل:

(أ) احدى الزوايا الزوجية القائمة هي (ب – أ أ/ - ء) وزاويتها المستوية هي ب أˆ ء

(ب) ثلاثة أزواج من المستويات المتعامدة　أ ب ب/ أ/ ، ء أ أ/ ء/　&
أ ب ب/ أ/ ، جـ ب ب/ جـ/　&　أ ب ب/ أ/ ، أ ب جـ ء

(جـ) نعم : المستوى أ جـ جـ/ أ/ ⊥ المستوى أ ب جـ ء لأن أ أ/ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ، المستوى أ جـ جـ/ أ/ يحوي أ أ/

(ء) ب جـ أ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (ب – جـ جـ/ - أ/)

، ب أ جـ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (ب – أ أ/ - جـ) وحيث أن

ق (ب جـ أ) = ق (ب أ جـ) = ٤٥° من خواص المربع أ ب جـ ء

∴ ق (ب – جـ جـ/ - أ/) =ق(ب – أ أ/ - جـ)

....

٣. فى الشكل (٩٩) :

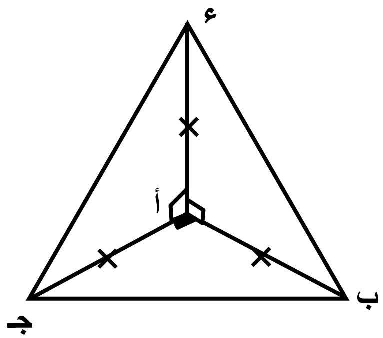
أ ، ب ، جـ ، ء اربع نقط لا تنتمى لمستوى واحد وبحيث أب ، أجـ ، أء متعامدة مثنى ومتساوية في الطول

(أ) اذكر مستويين متعامدين يكون كل منهما عمودى على المستوى أ ب جـ مع ذكر سبب التعامد

(ب) أوجد ق(جـ - أء – ب)

(جـ) بين ان ق (ب – أجـ - ء) = ق (جـ - أب – ء)

(ء) اوجد ق (أ جـ ب) + ق (< ء جـ أ) ، ق (< ء جـ ب)



الحل:

(أ) ب أ جـ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

ء أ ب ، ء أ جـ ، (ب أ جـ) قائمة

∴ المستويان ء أ ب ، ء أ جـ متعامدان .... (١)

∵ أء عمودي على كل من أب ، أجـ ⇐ أء ⊥ مستويهما أ ب جـ

وحيث أن كل من المستويين ء أ ب ، ء أ جـ يحوي أء

∴ كل من المستويين ء أ ب ، ء أ جـ عمودي على المستوى أ ب جـ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ء أ ب ، ء أ جـ مستويان متعامدان وكل منهما ⊥ المستوى أ ب جـ

(ب) ق(جـ - أء – ب) = ق (جـ أ ب) = ٩٠°

(جـ) ب أ ء هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (ب – أجـ - ء) ،

جـ أ ء هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (جـ - أب – ء) وحيث أن

ق (ب أ ء) = ق (جـ أ ء) = ٩٠°

∴ ق (ب – أجـ - ء) = ق (جـ - أب – ء)

(ء) Δ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ومتساوي الساقين

∴ ق (أ جـ ب) = ٤٥° بالمثل ق (ء جـ أ) = ٤٥°

∴ ق (أ جـ ب) + ق (ء جـ أ) = ٤٥ + ٤٥ = ٩٠°

المثلثات ب أ جـ ، ب أ ء ، ء أ جـ متطابقة بضلعين وزاوية محصورة

∴ من التطابق ينتج أن ء ب = ب جـ = جـ ء

∴ Δ ء ب جـ متساوي الأضلاع ∴ ق (ء جـ ب) = ٦٠°

....

٤. ضع علامة (√) أمام الجملة الصحيحة وعلامة (×) امام الجملة الخاطئة فيما يلى :

(أ) يتوازى المستقيمان إذا كان كل منهما عموديا على نفس المستوى ٠

(ب) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطة معلومة ويكون عموديا على مستقيم معلوم .

(جـ) يوجد مستقيم واحد فقط يمر بنقطة معلومة ويكون عموديا على مستو معلوم.

(د) إذا كان المستقيم (ل) عموديا على المستوى (س) فإنة يوجد مستوى واحد وواحد فقط يحتوى المستقيم (ل) ويكون عموديا على المستوى س.

(هـ) إذا كان كل من المستويين س ، ص عموديان على مستو ثالث ع فإن خطى تقاطعهما مع المستوى ع يكونان متوازيين .

الحل:

(أ) √ (ب) √ (جـ) √ (ء) × (هـ) ×

....

٥. فى بعض العبارات التالية اعطينا وصفا لمجموعة من المستقيمات وفى البعض الاخر اعطينا وصفا لمجموعة من المستويات ـ فاذكر فى اى من العبارات تكون المجموعة المعطاة متوازية فيما بينها .

(أ) مجموعة المستقيمات العمودية على مستوى معلوم
(ب) مجموعة المستقيمات الموازية لمستوى معلوم
(جـ) مجموعة المستويات الموازية لمستوى معلوم
(د) مجموعة المستويات العمودية على مستوى معلوم
(ه) مجموعة المستويات العمودية على مستقيم معلوم
(و) مجموعة المستويات الموازية لمستقيم معلوم

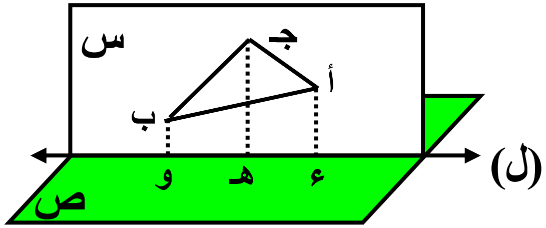
الحل:

(أ) متوازية (ب) غير متوازية (جـ) متوازية
(ء) غير متوازية (هـ) متوازية (و) غير متوازية

....

٦. فى الشكل (١٠) : أ ب جـ مثلث مرسوم فى المستوى س ، والمستويان س ، ص متعامدان ومتقاطعان فى المستقيم ل

اوجد المسقط العمودى للمثلث أ ب جـ على المستوى ص



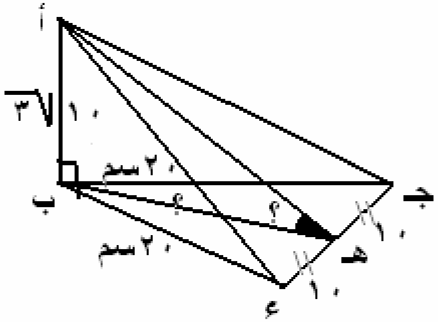
شكل(١٠٠)

الحل:

المسقط العمودي للمثلث أ ب جـ على المستوى ص هو ءو حيث ء مسقط أ على ص ، و هي مسقط ب على ص ، ءو ⊂ المستقيم ل

....

٧. أ ب جـ د هرم ثلاثى فية أب ⊥ المستوى ب جـ د ، هـ منتصف جـء فإذا كان : أ ب = ١٠√٣ سم ، ب جـ د مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ٢٠سم فاحسب ب هـ ثم اوجد ق (أ - جـء - ب)



الحل:

في Δ ب جـ ء المتساوي الأضلاع

∵ هـ منتصف جـء ∴ بهـ ⊥ جـء

ب هـ = ب جـ جا ٦٠° = ٢٠ × √٣ / ٢ = ١٠√٣ سم

∵ أب ⊥ المستوى ب جـ ء ∴ ب هـ مسقط المائل أهـ عليه

∵ ب هـ ⊥ جـ ء إثباتاً   ∴ أ هـ ⊥ جـ ء

∴ أ هـ ب هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية (أ - جـ ء - ب)

ظا(أ هـ ب) = $\frac{\text{أ ب}}{\text{هـ ب}}$ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠\sqrt{٣}}$ = ١

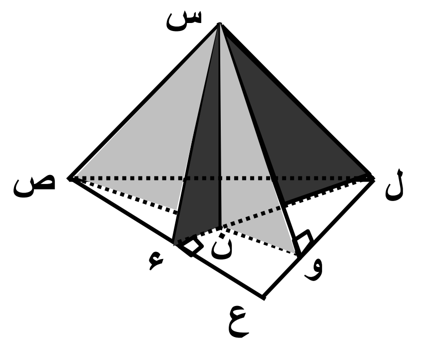
∴ ق (أ هـ ب) = ٤٥°   ∴ ق (أ - جـ ء - ب) = ٤٥°

---

٨. س ص ع ل هرم ثلاثى فية س ل ⊥ ص ع ، س ص ⊥ ع ل

(أولا) اثبت أنه يوجد مستوى يحتوى س ل ويكون عموديا على ص ع ومستوى اخر يحتوى س ص ويكون عموديا على ع ل .

(ثانيا) إذا تقاطع هذان المستويان فى س س/ فاثبت أن س س/ يمر بنقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ص ع ل وأن س س/ ⊥ المستوى ص ع ل



الحل:

العمل : نرسم ل ء ⊥ ص ع ، ص و ⊥ ع ل

∵ ص ع ⊥ س ل معطى ، ص ع ⊥ ل ء عملاً

∴ ص ع ⊥ كل من س ل ، ل ء

∴ ص ع ⊥ مستويهما س ل ء

∴ المستوى الذي يحتوي س ل ويكون عمودياً على ص ع هو س ل ء

بالمثل المستوى الذي يحتوي س ص ويكون عمودي على ع ل هو س ص و

ثانياً : نفرض أن ل ء ∩ ص و = { ن }

∴ خط تقاطع المستويين س ل ء ، س ص و هو س ن

بفرض أن س س/ هو خط تقاطع المستويين س ل ء ، س ص و

س س/ = س ن

∴ س س/ يمر نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ص ع ل وهي نقطة ن

∵ ص ع ⊥ المستوى س ل ء ، المستوى ل ص ع يحتوى ص ع

∴ المستويان س ل ء ، ل ص ع متعامدان .... (١)

بالمثل المستويان س و ص ، ل ص ع متعامدان......... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

∴ كل من المستوين س ل ء ، س ص و عمودي على المستوى ص ع ل

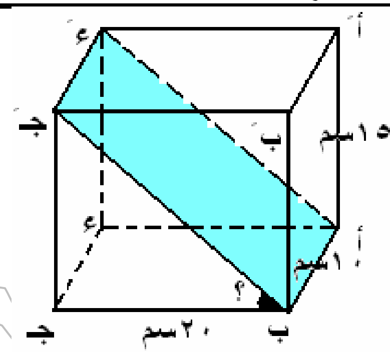
∴ خط تقاطع المستويين وهو س س/ ⊥ المستوى ص ع ل

---

٩. أ ب جـ ء أ/ ب/ جـ/ ء/ متوازي مستطيلات فيه أ ب = ١٠سم ، ب جـ = ٢٠سم ، ب ب/ = ١٥سم

أولا : اثبت أن الشكل أ ب جـ/ ء/ مستطيل واحسب مساحة سطحه

ثانيا : احسب قياس الزاوية بين المستوي أ ب جـ/ ء/ والمستوى أ ب جـ ء



الحل:

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء/ جـ/}}$ ويساويه في الطول من خواص متوازي المستطيلات

∴ أ ب جـ/ ء/ متوازي أضلاع ....(١)

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى ب جـ جـ/ ب/

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ/}}$ ⊂ المستوى ب جـ جـ/ ب/ ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

أ ب جـ/ ء/ متوازي أضلاع فيه أبْجـ/ قائمة ∴ أ ب جـ/ ء/ مستطيل

في Δ ب جـ جـ/ القائم الزاوية في جـ

(ب جـ/)^2 = (ب جـ)^2 + (جـ جـ/)^2

= ٢٠^2 + ١٥^2 = ٤٠٠ + ٢٢٥ = ٦٢٥ ب جـ/ = ٢٥سم

مساحة المستطيل أ ب جـ/ ء/ = أ ب × ب جـ/ = ١٠ × ٢٥ = ٢٥٠سم^2

ثانياً : الزاوية جـ بْجـ/ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ جـ/ ء/ ، أ ب جـ ء

جتا جـ بْ جـ/ = $\frac{٢٠}{٢٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

ق (جـ بْ جـ/) = ٥٢َ ٣٦ْ

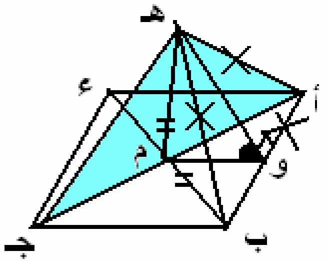
....

١٠. أ ب جـ ء مربع ، م نقطة تقاطع قطراه ، هـ نقطة لا تنتمي لمستوى المربع بحيث كان $\overline{\text{هـ م}}$ = $\overline{\text{م ب}}$ وكان المثلث هـ أ ب متساوي الأضلاع

أولا : اثبت أن $\overline{\text{هـ م}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$

ثانيا : برهن على أن المستوى م أ جـ عمودي على مستوى المربع أ ب جـ ء

ثالثا : أوجد قياس الزاوية الزوجية بن المستويين أ ب هـ ، أ ب جـ



الحل:

في الشكل : م ب = م هـ = م أ ، أ ب = ب هـ = هـ أ

Δ Δ هـ م ب ، أ م ب

فيهما { $\overline{\text{م ب}}$ ضلع مشترك ، م هـ = م أ ، هـ ب = أ ب }

∴ يتطابق المثلثان وينتج أن : ق (هـ مْ ب) = ق (أ مْ ب) = ٩٠ْ

لأن قطرا المربع متعامدان وينصف كل منهما الآخر

∴ $\overline{\text{هـ م}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$............(١)

ثانياً : بالمثل Δ Δ هـ م ب ، هـ م أ متطابقان ومن التطابق ينتج أن :

ق (هـ مْ ب) = ق (هـ مْ أ) = ٩٠ْ

∴ $\overline{\text{هـ م}}$ ⊥ $\overline{\text{م أ}}$..................(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$\overline{\text{هـ م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء وحيث أن المستوى هـ أ جـ يحوي $\overline{\text{هـ م}}$

∴ المستوى هـ أ جـ ⊥ مستوى المربع أ ب جـ ء

ثالثاً : نفرض أن و منتصف $\overline{أب}$

في Δ هـ أ ب المتساوي الأضلاع

∵ و منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{هـو} \perp \overline{أب}$

بالمثل $\overline{م و} \perp \overline{أ ب}$ ∴ هـوْم هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين أ ب هـ ، أ ب جـ

ظا هـوْم = $\frac{هـ م}{و م} = \frac{ب م}{\frac{1}{2} ب جـ} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ق (هـوْم) = ٤٤َ ٥٤°

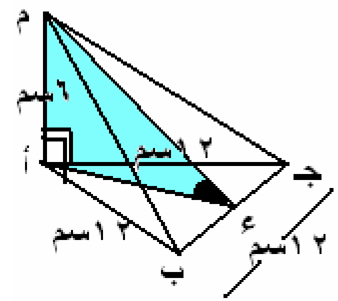
....

١١. م أ ب جـ هرم ثلاثي رأسه م ، قاعدته المثلث المتساوي الأضلاع أ ب جـ الذي طول ضلعه ١٢سم ، ق (م أ̂ ب) = ق (م أ̂ جـ) = ٩٠° ، م أ = ٦سم ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$

أولا : اثبت أن $\overline{ب جـ} \perp$ المستوى م أ ء

ثانيا : أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستوين م ب جـ ، أ ب جـ

ثالثا : اثبت أن المستويين م أ ء ، م ب جـ متعامدان



الحل:

أولاً : في Δ أ ب جـ المتساوي الأضلاع

∵ ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$

أ ء = أ ب جا ٦٠° = ١٢ $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٦ $\sqrt{3}$ سم

∵ $\overline{م أ} \perp$ كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ ∴ $\overline{م أ} \perp$ المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{ء أ}$ مسقط المائل $\overline{ء م}$ على المستوى ، ∵ $\overline{ء أ} \perp \overline{ب جـ}$ إثباتاً

∴ $\overline{ء م} \perp \overline{ب جـ}$ نظرية

$\overline{ب جـ} \perp$ كل من $\overline{ء م}$ ، $\overline{ء أ}$ $\Leftarrow$ ∴ $\overline{ب جـ} \perp$ مستويهما م أ ء

ثانياً :

أ ءْ م هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ

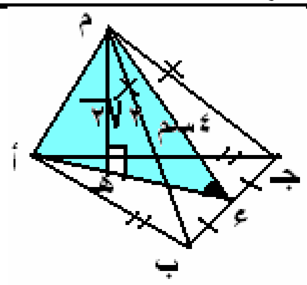
ظا أ ءْ م = $\frac{م أ}{ء أ} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Leftarrow$ ق (أ ءْ م) = ٣٠°

ثالثاً: ∵ $\overline{ب جـ} \perp$ المستوى م أ ء والمستوى م ب جـ يحتوى $\overline{ب جـ}$

∴ المستويان م ب جـ ، م أ ء متعامدان

....

١٢. م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه أ ب = أ جـ ، م ب = م جـ ، د منتصف $\overline{ب جـ}$ اثبت أن $\overleftrightarrow{ب جـ} \perp$ المستوى م أ ء ، وإذا $\overline{م هـ}$ رسم $\perp \overleftrightarrow{أ ء}$ فأثبت أن $\overleftrightarrow{م هـ} \perp$ المستوى أ ب جـ وإذا كان م هـ = ٢ $\sqrt{2}$ سم ، م د = ٤سم . فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ، أ ب جـ



الحل:

في Δ أ ب جـ المتساوي الساقين

∵ ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ....(١)

بالمثل في Δ م ب جـ $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ....(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$\overline{\text{ب جـ}} \perp$ كل من $\overline{\text{م ء}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp$ مستويهما م أ ء

∴ $\overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{م هـ}} \subset$ المستوى م أ ء ....(٣)

وحيث أن $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ ء}}$ معطى ......(٤)

∴ $\overline{\text{م هـ}} \perp$ كل من $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ ∴ $\overline{\text{م هـ}} \perp$ مستويهما أ ب جـ

م ءَ هـ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م ب جـ ،أ ب جـ

جا (م ءَ هـ) $= \frac{\text{م هـ}}{\text{م ء}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴ ق (م ءَ هـ) = ٤٥°

....

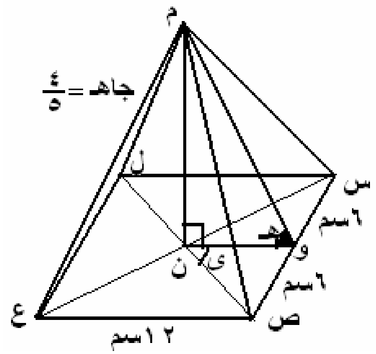
١٣. م س ص ع ل هرم رباعي قائم طول ضلع قاعدته ١٢سم ،

ق (م- $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ - ل) = هـ حيث جا هـ $= \frac{4}{5}$ ، نقطة (و) منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}} \cap \overline{\text{ص ل}} = \{$ن$\}$

أولاً : احسب ارتفاع الهرم م س ص ع ل

ثانياً : أوجد مساحة الوجه الجانبي م س ص

ثالثاً : أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين م ن و ، م ن ص



الحل:

أولاً : من خواص Δ م س ص المتساوي الساقين

∵ و منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ∴ $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{س ص}}$

بالمثل في Δ ن س ص المتساوي الساقين $\overline{\text{ن و}} \perp \overline{\text{س ص}}$

في Δ س ص ع

ن و $= \frac{1}{2}$ ع ص = ٦سم .... لماذا ؟

في Δ م و ن ظا م وَ ن $= \frac{\text{م ن}}{\text{و ن}}$ $\frac{4}{3} = \frac{\text{م ن}}{6}$

ثانياً : م ن $= \frac{24}{3} =$ ٨سم (م و)^2 = (م ن)^2 + (ن و)^2

= (٨)^2 + (٦)^2 = ١٠٠ ⇐ م و = ١٠

مساحة الوجه م س ص $= \frac{1}{2}$ س ص × م و $= \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60$ سم^2

ثالثاً : الزاوية و نَ ص هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين م ن و ، م ن ص

ظا ى $= \frac{\text{و ص}}{\text{و ن}} = \frac{6}{6} = 1$ ⇐ ق (و نَ ص) = ٤٥°

نماذج اختبارات كتاب المدرسة (١)

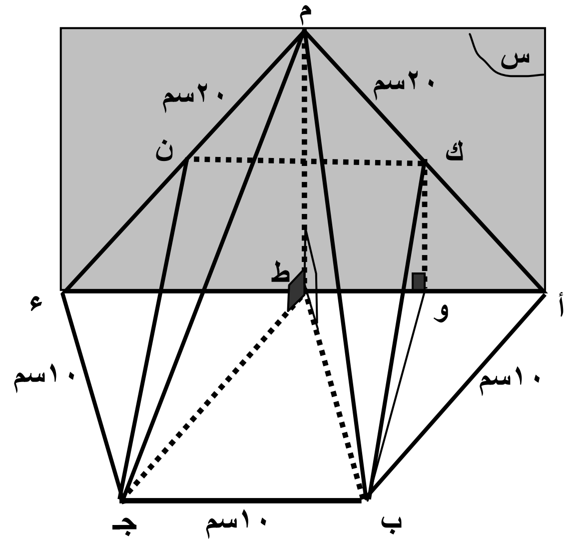
الهندسة الفراغية

٢) المعطيات : أ ب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه أ ء // ب جـ ، أ ء = ٢٠سم ، أ ب = ب جـ = جـ ء = ١٠سم ، س مستوى ⊥ المستوى أ ب جـ ء مار بالضلع أ ء ، رسم المثلث المتساوي الأضلاع م أ ء في المستوى س

المطلوب : (١) اثبت أن : م أ = م ب = م جـ = م ء = ٢٠سم

(٢) إذا كان ك ، ن منتصفي م أ ، م ء فاثبت أن الشكل ب ك ن جـ مستطيل ، واحسب طول قطره ومساحة سطحه .

العمل : نرسم م ط ⊥ أ ء



البرهان : (أولا) المستويان س ، أ ب جـ ء متعامدان م ط ⊂ المستوى س

حيث أن م ط ⊥ خط التقاطع أ ء ⟸ م ط ⊥ المستوى أ ب جـ ء

م ط ⊥ كل من ط أ ، ط ب ، ط جـ ، ط ء

من تطابق المثلثات م ط أ ، م ط ب ، م ط جـ ، م ط ء ينتج أن

م أ = م ب = م جـ = م ء = ٢٠سم

(ثانيا) في المثلث م أ ء

ك ن قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي الضلعين م أ ، م ء

ك ن // أ ء ، ك ن = $\frac{١}{٢}$ أ ء

وحيث أن ب جـ // أ ء ، ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ء

ك ن // ب جـ ويساوية في الطول

الشكل ك ب جـ ن متوازي أضلاع .... (١)

نرسم ك و ⊥ أ ء ⟸ ك و ⊥ المستوى أ ب جـ ء لماذا ؟

في المثلث م أ ط ك و شعاع مرسوم من منتصف الضلع م أ موازيا م ط

ك و ينصف أ ط

في المثلث أ ب ط المتساوي الأضلاع

ب و ينصف القاعدة أ ط ⟸ ب و ⊥ أ ط

وحيث أ ط // ب جـ

ب و ⊥ ب جـ

ك ب مائل على المستوى أ ب جـ ء ، مسقطه ب و ⊥ ب جـ

ك ب ⊥ ب جـ ⟸ ق(ك ب جـ) = ٩٠° .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل ك ب جـ ن متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

الشكل ك ب جـ ن مستطيل

المثلث أ ب ط متساوي الأضلاع وطول ضلعه ١٠سم ⟸ ب و = ٥$\sqrt{٣}$ سم

المثلث أ م ء متساوي الأضلاع وطول ضلعه ٢٠سم

م ط = ١٠$\sqrt{٣}$ سم ⟸ ك و = ٥$\sqrt{٣}$ سم

المثلث ك و ب قائم الزاوية في و

(ك ب)^{٢} = (ك و)^{٢} + (و ب)^{٢} = (٥$\sqrt{٣}$)^{٢} + (٥$\sqrt{٣}$)^{٢}

ك ب = ٥$\sqrt{٦}$ سم

مساحة المستطيل ك ب جـ ن = ب جـ × ك ب = ١٠ × ٥$\sqrt{٦}$ = ٥٠$\sqrt{٦}$ سم^{٢}