- **نهايات الدوال الحقيقية**

$$\underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\, أ^{ن - ١} \quad ، \quad \underset{س \to أ}{نهـا} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن - م}$$

$$\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{أ}{س^{ن}} = صفر \quad حيث \quad ن \in ح_{+} \; ، \; أ \in ح$$

$$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{جاس}{س} = ١ \quad ، \quad \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{ظاس}{س} = ١$$

$$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{جا أس}{ب س} = \frac{أ}{ب} \quad ، \quad \underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{ظا أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$$

- **تذكر قانون حل المعادلة التربيعية** $س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

- **بعض قوانين تحليل المقدار الجبري**

$(س^{٣} - ص^{٣}) = (س - ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢})$

$(س^{٣} + ص^{٣}) = (س + ص)(س^{٢} - س ص + ص^{٢})$

$(س^{٢} - ص^{٢}) = (س - ص)(س + ص)$

- **إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري** : فإن $\hat{أ}$ تكمل $\hat{ب}$ ويكون :

جا أ = جا ب ، جتا أ = - جتا ب

- **بعض المتطابقات** $جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١$ ، $ظا هـ = \frac{جا هـ}{جتا هـ}$

$١ + ظا^{٢} هـ = قا^{٢} هـ$ ، $١ + ظتا^{٢} هـ = قتا^{٢} هـ$

- **الاشتقاق**

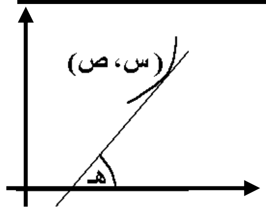
دالة التغير $ت(هـ) = د(س + هـ) - د(س)$

دالة متوسط التغير $م(هـ) = \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

معدل التغير $= \underset{هـ \to ٠}{نهـا} م(هـ)$

ميل المماس $م = \frac{ءص}{ءس} = ظاهـ$

عند النقطة (س ، ص)



- **معادلة المماس** $(ص - ص_{١}) = م\,(س - س_{١})$ حيث م ميل المماس

- **معادلة العمودي** $(ص - ص_{١}) = م^{/}\,(س - س_{١})$ حيث $م^{/}$ ميل العمودي على المماس
- **شرط توازي مستقيمين** $ل_{١} // ل_{٢} \Leftarrow م_{١} = م_{٢}$
- **شرط أن يمس المستقيم منحنى** ميل المستقيم ل = ميل المماس للمنحنى
- **شرط تعامد مستقيمين** $ل_{١} \perp ل_{٢} \Leftarrow م_{١} \times م_{٢} = - ١$
- **إذا كان المماس يوازي محور السينات** : ميل المماس = صفر

قواعد الاشتقاق	
الدالة ص = د(س)	**المشتقة الأولى**
ص = أ ، أ ثابت	$\frac{ءص}{ءس} = صفر$
$ص = س^{ن}$	$\frac{ءص}{ءس} = ن\, س^{ن - ١}$
$ص = أ\, س^{ن}$	$\frac{ءص}{ءس} = أ \times ن\, س^{ن - ١}$
ص = ق(س)×ع (س)	$\frac{ءص}{ءس} = ق(س) \times عَ(س) + ع(س) \times قَ(س)$ = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى
$ص = \frac{ق(س)}{ع(س)}$	$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ع(س) \times ق^{/}(س) - ق(س) \times ع^{/}(س)}{[ع(س)]^{٢}}$ $= \frac{المقام \times مشتقة البسط - البسط \times مشتقة المقام}{(المقام)^{٢}}$
ص = د(ع) ، ع = د(س)	$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$
$ص = [د(س)]^{ن}$	$\frac{ءص}{ءس} = ن[د(س)]^{ن - ١} \times دَ(س)$
ص = حا(أ س+ب)	$\frac{ءص}{ءس} =$ أ حتا (أ س + ب) حيث أ ، ب ثابتان
ص = حتا (أ س + ب)	$\frac{ءص}{ءس} = -$ أ حا (أ س + ب) حيث أ ، ب ثابتان
ص = ظا س	$\frac{ءص}{ءس} = قا^{٢} س$
ص = ظا (أ س + ب)	$\frac{ءص}{ءس} = أ\, قا^{٢} (أ س + ب)$

- **قاعدة الجيب** في أي مثلث أ ب جـ يكون $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَـ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث
يستخدم هذا القانون إذا علم طول ضلع وقياسا زاويتين

مـ (Δ أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ = $\frac{١}{٢}$ أَ جَـ جا ب = $\frac{١}{٢}$ بَ جَـ جا أ

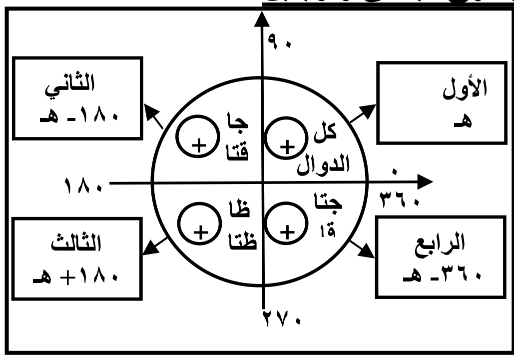
محيط المثلث = أَ + بَ + جَـ

محيط الدائرة = ٢ ط نق ، مساحة الدائرة = ط نق^{٢}

- **قاعدة جيب التمام**

أَ^{٢} = بَ^{٢} + جَـ^{٢} − ٢ بَ جَـ جتا أ بَ^{٢} = أَ^{٢} + جَـ^{٢} − ٢ أَ جَـ جتا ب جَـ^{٢} = ... تستخدم إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما	جتا أ = $\frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جَـ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢ بَ جَـ}}$ جتا ب = $\frac{\text{أَ}^{٢} + \text{جَـ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{\text{٢ أَ جَـ}}$ جتا جـ = ... تستخدم إذا علم أطوال أضلاع المثلث الثلاثة

- **الدوال المثلثية لمجموع أو فرق قياسي زاويتين**



جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب	جا(أ - ب) = جا أ جتا ب - جتا أ جا ب
جتا(أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب	جتا(أ - ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب
ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$	ظا (أ - ب) = $\frac{\text{ظا أ - ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

الدوال المثلثية لضعف الزاوية أ	وبإحلال $\frac{\text{أ}}{٢}$ بدلا من أ نحصل على
جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ	جا أ = ٢ جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ جتا $\frac{\text{أ}}{٢}$
جتا ٢ أ = جتا^{٢} أ - جا^{٢} أ = ٢ جتا^{٢} أ − ١ = ١ − ٢ جا^{٢} أ	جتا أ = جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ - جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ٢ جتا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ − ١ = ١ − ٢ جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$
طا ٢ أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ أ}}$	طا أ = $\frac{\text{٢ ظا }\frac{أ}{٢}}{\text{١ - ظا}^{٢}\,\frac{أ}{٢}}$

أولا : التفاضل

١. أوجد كل من النهايات التالية :

أ) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} + \text{٢س}}$

الحل : النهاية = $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س}^{٢} - \text{٢س} + ٤)}{\text{س}(\text{س} + ٢)}$ = $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{٢س} + ٤}{\text{س}}$

= $\frac{٤ + ٤ + ٤}{(-٢)}$ = - ٦

....

ب) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{\text{س} + ٣} - ٢}{\text{س} - ١}$

الحل : النهاية = $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\sqrt{\text{س} + ٣} - ٢}{\text{س} - ١} \times \frac{\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢}{\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢}$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} + ٣ - ٤}{(\text{س} - ١)(\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} - ١}{(\text{س} - ١)(\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢)}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{١}{(\sqrt{\text{س} + ٣} + ٢)} = \frac{١}{٤}$$

ج) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} - ٣)}{٣\text{س}^٣ - ١٠\text{س} + ١}$

الحل : النهاية = $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{٤\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ٣}{٣\text{س}^٣ - ١٠\text{س} + ١} \div \frac{\text{س}^٣}{\text{س}^٣}$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{\frac{٤}{\text{س}} - \frac{٤}{\text{س}^٢} - \frac{٣}{\text{س}^٣}}{٣ - \frac{١٠}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}^٣}} = \frac{\text{صفر}}{٣} = \text{صفر}$$

د) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} + ٨}{\sqrt{٩\text{س}^٢ + ٥}}$

الحل : $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} + ٨}{\sqrt{٩\text{س}^٢ + ٥}} \div \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢}} = \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{١ + \frac{٨}{\text{س}}}{\sqrt{٩ + \frac{٥}{\text{س}^٢}}} = \frac{١}{٣}$

هـ) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٥ + ٢٤٣}{\text{س}^٤ - ٨١}$

الحل : $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٥ - (-٣)^٥}{\text{س}^٤ - (-٣)^٤} = \frac{٥}{٤} (-٣)^١ = \frac{-١٥}{٤}$

و) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ١٠}{\text{س}^٧ - ١٢٨}$

النهاية = $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^٧ - ٢^٧} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} (\text{س} + ٥) = \frac{١}{٧ \times ٢^٦} \times ٧ = \frac{١}{٦٤}$

---

٢. أوجد كل من النهايات التالية :

أ) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٥\text{س} - \text{ظا}٣\text{س}}{٣\text{س} + ٢\text{س جتا س}}$

الحل : بالقسمة على س بسطا ومقاما

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{٥ - \frac{\text{ظا }٣\text{س}}{\text{س}}}{٣ + ٢\text{جتا س}} = \frac{٥ - ٣}{٣ + ٢\text{جتا }٠} = \frac{٢}{٥}$$

ب) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}٣\text{س ظا}٤\text{س}}{٥\text{س}^٢}$

النهاية = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٥\text{س}} \times \frac{\text{ظا}٤\text{س}}{\text{س}} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٤}{١} = \frac{١٢}{٥}$

ج) أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^٢ ٣\text{س}}{٢\text{س}^٢}$

النهاية = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{٢\text{س}} \times \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٣}{١} = \frac{٩}{٢}$

د) أوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{ط}}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س} - \text{ط}}$

الحل : نضع ط + س بدلا من س

النهاية = $\underset{\text{س+ط} \to \text{ط}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا (ط + س)}}{\text{ط + س - ط}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{- جا س}}{\text{س}} = -١$

الأجوبة	حل بنفسك	
$[\frac{١}{٨}]$	$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}{\text{س}^٢ - ١٦}$	١)
$[\frac{١٠}{٣}]$	$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٥)^٢ - ٢٥}{٣\text{س}}$	٢)
$[\frac{١}{٦}]$	$\underset{\text{س} \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٩}$	٣)
$[-\frac{٥}{٤}]$	$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}^٣ - ٤\text{س}^٢ + ١}{٢ - ٣\text{س} - ٤\text{س}^٣}$	٤)
$[٢٢٤]$	$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٧ - ١٢٨}{٢\text{س} - ٤}$	٥)
$[-\frac{٥}{٦}]$	$\underset{\text{س} \to -\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٣٢\text{س}^٥ + ١}{٦٤\text{س}^٦ - ١}$	٦)
$[٣٦]$	$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٣}\text{س}^٤ - ٢٧}{\text{س} - ٣}$	٧)
$[\frac{٥}{١١}]$	$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س}^٢}{٢\text{س ظا س} + \text{جا}^٢\, ٣\text{س}}$	٨)
$[\frac{٥}{٣}]$	$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}\ ٥\text{س ظتا } ٣\text{س}$	٩)
$[\frac{١}{٢}]$	$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{جا س} + \text{جتا س})^٢ - ١}{٤\text{س}}$	١٠)
$[\frac{١}{٤}]$	$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا (س - ٢)}}{\text{س}^٢ - ٤}$	١١)
$[٢]$	$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٤\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢}}{\sqrt[٤]{\text{س}^٦ + ٢\text{س}}}$	١٢)

٣. أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث د(س) = $\sqrt{\text{س}}$ ثم أوجد معدل تغير الدالة عندما س = ٩

الحل : $\text{م(هـ)} = \frac{\text{د(س + هـ) - د(س)}}{\text{هـ}} = \frac{\sqrt{\text{س + هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}}$

معدل التغير $= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س + هـ}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{هـ}} \times \frac{\sqrt{\text{س + هـ}} + \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س + هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س + هـ - س}}{\text{هـ}(\sqrt{\text{س + هـ}} + \sqrt{\text{س}})} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{\text{س + هـ}} + \sqrt{\text{س}}}$

$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$

---

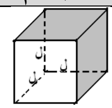
٤. أوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ثم أوجد معدل التغير عندما س = $\sqrt{٣}$

الحل : $\text{م(هـ)} = \frac{\text{د(س+هـ) - د(س)}}{\text{هـ}} = \frac{\frac{١}{\text{س+هـ}} - \frac{١}{\text{س}}}{\text{هـ}} = \frac{\frac{\text{س - س - هـ}}{\text{س(س+هـ)}}}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{-\text{هـ}}{\text{هـ س (س + هـ)}} = \dfrac{-١}{\text{س (س + هـ)}}$

معدل التغير $= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{م(هـ)} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{-١}{\text{س (س + هـ)}} = \dfrac{-١}{\text{س}^{٢}}$

عندما س $= \sqrt{٣}$ $\Leftarrow$ معدل التغير $= \dfrac{-١}{(\sqrt{٣})^{٢}} = \dfrac{-١}{٣}$

الشكل	المساحة	المحيط
المربع	$\text{ل}^{٢}$	٤ ل
المستطيل	الطول × العرض	٢ × (الطول + العرض)
الدائرة	$\text{ط نق}^{٢}$	٢ ط نق
المثلث	$\frac{١}{٢}$ ق × ع $\frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ	مجموع أطوال أضلاعه
المجسم	**الحجم**	**المساحة السطحية**
 المكعب	$\text{ل}^{٣}$	$٦\ \text{ل}^{٢}$

٥. مكعب يتمدد بانتظام محتفظا بشكله أوجد معدل التغير في حجمه عندما يكون طول حرفه ٥سم

نفرض أن طول ضلع المكعب = س حجم المكعب = $\text{س}^{٣}$

د(س) = $\text{س}^{٣}$

معدل التغير في الحجم $= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د(س + هـ) - د(س)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{(س + هـ)}^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{(س + هـ)}^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{(س + هـ) - س}} = ٣\text{س}^{٢} = ٣ \times ٢٥ = ٧٥$

٦. أوجد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكل من الدوال التالية:

أ) ص $= (٤\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٢)^{٧}$

ب) ص = س جا س − جتا س

جـ) ص $= ٣\text{ع}^{٥} + \text{ع}$ ، ع $= \text{س}^{٢} - ٢$

ء) ص $= ٢\text{جا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٣} - \text{س}\right)$ عند س $= \dfrac{\text{ط}}{٦}$

الحل : أ) ص $= (٤\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٢)^{٧}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٧\,(٤\text{س}^{٣} + ٥\text{س} - ٢)^{٦}\,(١٢\text{س}^{٢} + ٥)$

ب) ص = س جا س − جتا س

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = $ س × جتا س + جا س × ١ − (- جا س)

= س جتا س + ٢ جا س

جـ) ص $= ٣\text{ع}^{٥} + \text{ع}$ ، ع $= \text{س}^{٢} - ٢$

ص $= ٣\,(\text{س}^{٢} - ٢)^{٥} + (\text{س}^{٢} - ٢)$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٥\,(\text{س}^{٢} - ٢)^{٤} \times ٢\text{س} + ٢\text{س}$

ء) ص $= ٢\text{جا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٣} - \text{س}\right)$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\ \text{جتا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٣} - \text{س}\right)$ عند س $= \dfrac{\text{ط}}{٦}$

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -٢\text{جتا}\left(\dfrac{\text{ط}}{٣} - \dfrac{\text{ط}}{٦}\right) = -٢\ \text{جتا}\ ٣٠^{\circ} = -\sqrt{٣}$

٧. أوجد ميل المماس للمنحنى ص = $\sqrt{٢}$ جا $\frac{١}{٢}$ س عند س = $\frac{ط}{٢}$

الحل : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ جتا $\frac{١}{٢}$ س

عند س = $\frac{ط}{٢}$ **ميل المماس =** $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$ جتا $\frac{ط}{٤} = \frac{١}{٢}$

٨. أوجد معادلة المماس للمنحنى ص = $\frac{٣\text{س} + ٤}{\text{س} - ٢}$ **عند النقطة (١ ، - ٧)**

وكذلك أوجد معادلة العمودي على المماس للمنحنى عند تلك النقطة

الحل : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س} - ٢) \times ٣ - (٣\text{س} + ٤) \times ١}{(\text{س} - ٢)^{٢}}$

عند س = ١ ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(- ١) \times ٣ - ٧ \times ١}{(- ١)^{٢}} = - ١٠$

معادلة المماس هي (ص – ص$_{١}$) = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (س – س$_{١}$)

(ص + ٧) = - ١٠ (س – ١)

ص + ٧ = - ١٠ س + ١٠ ⟸ ١٠ س + ص - ٣ = ٠

ميل العمودي م = $\frac{١}{١٠}$

معادلة العمود على المماس هي (ص – ص$_{١}$) = م (س – س$_{١}$)

(ص + ٧) = $\frac{١}{١٠}$ (س – ١)

١٠ص + ٧٠ = س - ١ ⟸ س - ١٠ص - ٧١ = ٠

٩. إذا كان ص= ٥ + جتا ع ، ع = ٦س فأوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ **عندما س =** $\frac{ط}{١٢}$

الحل : ص = ٥ + جتا ٦س ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - ٦ جا ٦س

عند س = $\frac{ط}{١٢}$ ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - ٦ جا $\frac{٦ط}{١٢}$ = - ٦ × ١ = - ٦

١٠. إذا كانت س = ع – ١ ، ص = $\frac{١}{٢}$ **ع^{٣} أوجد** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل : ص = $\frac{١}{٢}$ ع^{٣} ، س + ١ = ع

ص = $\frac{١}{٢}$ (س + ١)^{٣} ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}$ × ٣(س + ١)^{٢} × ١ = $\frac{٣}{٢}$ (س + ١)^{٢}

١١. إذا كان ص = $\frac{٧}{\text{ع}^{٤}}$ **، ع = س^{٢} + ٣س + ١ فأوجد** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل : ص = ٧ ع$^{-٤}$ ⟸ ص = ٧ (س^{٢} + ٣س + ١)$^{-٤}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = - ٢٨ (س^{٢} + ٣س + ١)$^{-٥}$ × (٢س + ٣)

١٢. إذا كانت ص = ع^{٢} + ع + ١ ، ع = س + $\frac{١}{\text{س}}$ **أوجد** $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ **عند س = ٢**

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = (٢ع + ١) (١ - $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$) .... (١)

عند س = ٢ ⟸ ع = ٢,٥ **بالعويض فى (١)**

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٢ × ٢,٥ + ١) (١ - $\frac{١}{٤}$) = ٦ × $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٩}{٢}$

١٣. أوجد : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ($\frac{\text{س}}{\text{جتا ٣س}}$) **عند س =** $\frac{ط}{٣}$

الحل : $\frac{\text{ع}}{\text{ع س}}\left(\frac{\text{س}}{\text{جتا ٣س}}\right) = \frac{\text{جتا٣س} \times ١ - \text{س} \times - ٣ \text{ جا ٣س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ ٣س}} = \frac{\text{جتا ٣س} + \text{٣س جا ٣س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ ٣س}}$

$= \frac{\text{جتا ط} + \text{ط} \times \text{جا ط}}{\text{جتا}^{٢}\text{ ط}} = \frac{- ١ + \text{صفر}}{(- ١)^{٢}} = - ١$

....

١٤. إذا كانت ص = $\left(\frac{\text{٣س} - ١}{\text{٢س} + ١}\right)^{٥}$ فأوجد $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ عند س = ٠

الحل : $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = ٥\left(\frac{\text{٣س} - ١}{\text{٢س} + ١}\right)^{٤} \times \frac{(\text{٢س} + ١)\times ٣ - (\text{٣س} - ١) \times ٢}{(\text{٢س} + ١)^{٢}}$

عند س = صفر

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = ٥(- ١)^{٤} \times \frac{١ \times ٣ - (-١)\times ٢}{(١)^{٢}} = ٥ \times ١ \times ٥ = ٢٥$

حل بنفسك

١) ص = س^{٢} جتا س أوجد $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ عند س = $\frac{\text{ط}}{٢}$

٢) ص = ع^{٧} ، ع = س^{٣} + ٥ س أوجد $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$

٣) ص^{٣} = س^{٢} + س + ٢ أوجد $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ عند س = ٢

٤) ص = (٣ع – ١)^{٤} ، ع = س(٣س – ٢) أوجد $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ عند س = ١

٥) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٢ س أوجد دالة متوسط التغير لهذه الدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٣ + هـ ثم احسب هذا المتوسط عندما هـ = ٠,١

الأجوبة [- $\frac{\text{ط}^{٢}}{٤}$ ، (س^{٣}+٥ س)^{٦}(٢١س^{٢}+ ٣٥) ، $\frac{٥}{١٢}$ ، ٣٨٤ ، ٨,١]

....

١٥. أوجد عند س = ٢ قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى ٢ص = ٣$\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل : بقسمة الطرفين على ٢

ص = $\frac{٣}{٢}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ ⟸ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{٣}{٢} \times \frac{١ \times ٢ \text{ س}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}}$

عند س = ٢ ⟸ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{٣}{٢} \times \frac{٤}{٢ \times ٣}$ ∴ ص َ = ١

ميل المماس = ١ ⟸ ∴ ظا ى = ١ ⟸ ∴ ق(ى) = ٤٥°

....

١٦. أوجد نقط المنحنى ص = س^{٢}- ٣س + ٥ والتي يكون عندها المماس للمنحنى عموديا على المستقيم ٩ ص = ٣ - س

الحل : بالنسبة للمنحنى ص = س^{٢}- ٣س + ٥ ...... (١)

ص$^{/}$ = ٢ س – ٣ ∴ ميل المماس = ٢ س – ٣

بالنسبة للمستقيم س + ٩ ص = ٣ ميل المستقيم = - $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = - $\frac{١}{٩}$

ميل العمودي (المماس) = ٩

٢ س – ٣ = ٩ ∴ س = ٦ بالتعويض في (١)

∴ ص = ٣٦ – ١٨ + ٥ = ٢٣ ∴ النقطة (٦ ، ٢٣)

....

١٧. إذا كان المستقيم ص + ٨س – ٤ = ٠ يمس المنحنى ص = $\frac{٤}{\text{أ س} + \text{ب}}$ عند النقطة (١ ، - ٤) أوجد قيمتي أ ، ب

الحل : بالتعويض بالنقطة (١ ، - ٤) في معادلة المنحنى ص = $\frac{٤}{\text{أ س} + \text{ب}}$

- ٤ = $\frac{٤}{\text{أ} + \text{ب}}$ ومنها

أ + ب = - ١ .... (١)

بالنسبة للمستقيم ص + ٨ س - ٤ = ٠

ميل المستقيم = $-\frac{أ}{ب} = -\frac{٨}{١} = -٨$ ⟸ ميل المماس = - ٨

بالنسبة للمنحنى ص = $\frac{٤}{أ س + ب} = ٤(أ س + ب)^{-١}$

ص/ = - ٤ $(أ س + ب)^{-٢}$ × أ

ص/ = $\frac{-٤ أ}{(أ س + ب)^{٢}}$

ص/ = - ٨ عند س = ١

- ٨ = $\frac{-٤ أ}{(أ + ب)^{٢}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن - ٨ = - ٤ أ ومنها أ = ٢

بالتعويض في (١) ٢ + ب = - ١ ومنها ب = - ٣

....

١٨. إذا كان المماس لمنحنى الدالة ص = $س^{٢} + \frac{أ}{س^{٢}}$ عند س = ٢ يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات أوجد قيمة الثابت أ

الحل : ص = $س^{٢} + أ س^{-٢}$

ص/ = ٢ س - ٢أ $س^{-٣}$

ص/ = ٢ س - $\frac{٢ أ}{س^{٣}}$ ⟸ ص/ = ظا ٤٥°

عند س = ٢

١ = ٤ - $\frac{٢ أ}{٨}$ × ٨ ⟸ ٨ = ٣٢ - ٢ أ ⟸ ∴ أ = ١٢

....

١٩. إذا كانت د(س) = أ $س^{٢}$ - ب س فأوجد قيمتي الثابتين أ ، ب إذا علم أن النقطة (١ ، ٤) تحقق معادلة المنحنى ، د/(٠) = ٢

الحل : بالتعويض بالنقطة (١ ، ٤)

٤ = أ - ب .... (١)

د/(س) = ٢ أ س - ب

د/(٠) = - ب

٢ = - ب ⟸ ب = - ٢ بالتعويض في (١) ينتج أن أ = ٢

....

حل بنفسك

١) إذا كان المماس لمنحنى الدالة ص = أ $س^{٣}$ + ب س عند النقطة (- ١ ، ٢) يوازي محور السينات أوجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب [أ = ١ ، ب = - ٣]

٢) أوجد النقط الواقعة على المنحنى ص = $س^{٢}$ - ٣ س والتي عندها المماس للمنحنى يوازي المستقيم س + ص = ٥ [(١ ، - ٢)]

٢٠. اذا كان ٤ص = ٢س + جا٢س اثبت أن $\frac{ء ص}{ء س}$ = $جتا^{٢}$ س

الحل : ٤ص = ٢س + جا٢س باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س

٤ ص/ = ٢ + ٢ جتا٢س

٤ ص/ = ٢ + ٢ (٢ $جتا^{٢}$ س - ١)

٤ ص/ = ٢ + ٤ $جتا^{٢}$ س - ٢ ومنها ص/ = $جتا^{٢}$ س

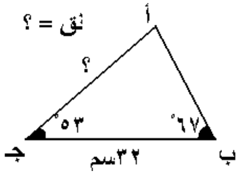
ثانيا : حساب المثلثات

٢١. Δ أ ب جـ فيه ق($\hat{ب}$) = ٦٧° ، ق($\hat{جـ}$) = ٥٣° ، أ/ = ٣٢سم أوجد ب/ ثم أوجد طول محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ

الحل : ق($\hat{أ}$) = ١٨٠° - (٦٧° + ٥٣°) = ٦٠°

$\frac{أ/}{جا أ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ = ٢نق

$\frac{٣٢}{جا ٦٠} = \frac{ب/}{جا ٦٧} = \frac{جـ/}{جا ٥٣}$ = ٢نق



ب/ = (٣٢ × جا٦٧) ÷ (جا ٦٠) = ٣٤,٠١ سم

٣٢ ÷ جا ٦٠ = ٢ نق ⟸ ٣٦,٩٥ = ٢ نق ∴ نق ≈ ١٨,٤٨ سم

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ط × ١٨,٤٨ ≈ ١١٦,٠٨سم

حل بنفسك

١) حل Δ أ ب جـ الذي فيه ق(أ^) = ٤١° ، ق(ب^) = ٧٤° ، جـَ = ١٥ سم

الأجوبة [ق(جـ)= ٦٥° ، أَ = ١١ سم ، بَ = ١٦ سم]

٢) Δ أ ب جـ فيه ق(ب) = ٦٠° ، ق(جـ) = ٧٥° ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث = ١٥ سم . أوجد بَ ، جـَ ومساحة Δ أ ب جـ

الأجوبة [٢٥,٩٨ سم ، ٢٨,٩٨ سم ، ٢٦٦,١٩ سم٢]

٢٢. أ ب جـ مثلث فيه : أ/ = ٧سم ، ب/ = ١٢سم ، جـ/ = ٩سم أوجد :

(١) قياس أكبر زاوية في المثلث

(٢) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

(٣) مساحة سطح المثلث

الحل : (١) أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع فى الطول

جتا ب = (أ/٢ + جـ/٢ - ب/٢) ÷ (٢ أ/ جـ/) = ((٧)٢ + (٩)٢ - (١٢)٢) ÷ (٢ × ٧ × ٩)

جتا ب = -١٤ ÷ ١٢٦ = -١ ÷ ٩ Shift cos Ans = °'''

ق(ب) = ٩٦° ٢٢َ ٤٦ً

(٢) ب/ ÷ جا ب = ٢نق ⟸ ١٢ ÷ جا ٩٦° ٢٢َ ٤٥ً = ٢نق

١٢,٠٧ = ٢نق نق = ٦,٠٤سم

(٣) Δ = ١/٢ أَ جـَ جا ب = ١/٢ × ٧ × ٩ جا ٩٦° ٢٢َ ٤٦ً = ٣١,٣سم٢

---

٢٣. Δ أ ب جـ فيه أَ = ٥سم ، ق(ب^) = ٦٠° ، مساحة Δ أ ب جـ = ١٠√٣ سم٢ أوجد محيط Δ أ ب جـ

الحل : مـ(Δ أ ب جـ) = ١/٢ أَ جـَ جا ب

١٠√٣ = ١/٢ × ٥ × جـَ جا ٦٠°

١٠√٣ = ١/٢ × ٥ × جـَ × √٣/٢ ⟸ ١٠√٣ = ٥√٣/٤ جـَ ⟸ جـَ = ٨سم

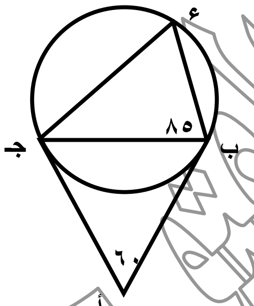
بَ٢ = أَ٢ + جـَ٢ – ٢ أَ جـَ جتا ب

بَ٢ = ٥٢ + ٨٢ – ٢ × ٥ × ٨ جتا ٦٠ = ٤٩ ⟸ بَ = ٧سم

محيط Δ أ ب جـ = أَ + بَ + جـَ = ٥ + ٧ + ٨ = ٢٠سم

---

٢٤. في الشكل المقابل : أب ، أجـ مماسان للدائرة عند ب ، جـ فإذا كان ق(أ^) = ٦٠° ، ق(ء ب^ جـ) = ٨٥° ، مساحة المثلث أ ب جـ = ٩√٣ سم٢ أوجد لأقرب سنتيمتر محيط المثلث ء ب جـ



في المثلث أ ب جـ : أ ب = أ جـ ، ق(أ) = ٦٠° ⟸ المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع

مساحة المثلث أ ب جـ = ١/٢ أ/ ب/ جا ٦٠°

$٩\sqrt{٣} = \frac{١}{٢}$ أ$^{/٢}$ جا ٦٠° ⟸ أ$^{/٢}$ = ٣٦ ومنها أ$^{/}$ = ٦سم ⟸ ب جـ = ٦سم

في المثلث ء ب جـ

ق(أ ب جـ) المماسية = ق(ء) المحيطية = ٦٠°

ق(ء جـ ب) = ١٨٠° − (٨٥° + ٦٠°) = ٣٥°

من قاعدة الجيب $\frac{ء ب}{جا ٣٥°} = \frac{ء جـ}{جا ٨٥°} = \frac{٦}{جا ٦٠°}$

ء ب = $\frac{٦ جا ٣٥°}{جا ٦٠°}$ = ٣,٩٧ سم   ء جـ = $\frac{٦ جا ٨٥°}{جا ٦٠°}$ = ٦,٩٠سم

محيط المثلث ء ب جـ = ٦ + ٣,٩٧ + ٦,٩٠ = ١٦,٨٧ ≈ ١٧سم

حل بنفسك

١) أوجد قياس أكبر زاوية في Δ أ ب جـ الذي فيه أَ = ٨ سم ، بَ = ٧ سم ، جـَ = ١٣ سم   الجواب {١٢٠°}

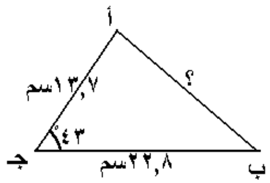
٢) Δ أ ب جـ فيه $\frac{١}{٤}$ جا أ = $\frac{١}{٥}$ جا ب = $\frac{١}{٧}$ جا جـ أوجد ق(ب)   الجواب [٤٤° ٢٥َ]

٣) Δ أ ب جـ محيطه ٦٤ سم ، ق(أ) = ٤٣° ، ق(ب) = ٨٠° احسب نصف قطر الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ   [نق = ١٢,٧٧ سم]

٢٥. Δ أ ب جـ فيه أَ = ٢٢,٨سم ، بَ = ١٣,٧سم ، ق(جـ) = ٤٣°

أوجد محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب جـ لأقرب سم

الحل : حـَ² = أَ² + بَ² − ٢ أَ بَ جتا جـ



= (٢٢,٨)² + (١٣,٧)² − ٢×٢٢,٨ × ١٣,٧ جتا ٤٣°

≈ ٢٥٠,٦٣ ⟸ جـ$^{/}$ ≈ ١٥,٨ سم

$\frac{جـ^{/}}{جا جـ}$ = ٢نق ⟸ $\frac{١٥,٨}{جا ٤٣°}$ = ٢ نق

٢٣,١٦ = ٢ نق   نق = ١١,٥٨ سم

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ١١,٥٨ = ٧٢,٧٨ ≈ ٧٣ سم

....

٢٦. أ ب جـ مثلث حاد الزوايا فيه ق(أ̂) = ٨٠° ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث يساوي ٨سم ، جـ$^{/}$ = ٥سم أوجد أ$^{/}$ مقربا الناتج لأقرب ملليمتر ثم أوجد ق(ب̂)

الحل : $\frac{أ^{/}}{جا أ} = \frac{ب^{/}}{جا ب} = \frac{جـ^{/}}{جا جـ}$ = ٢نق

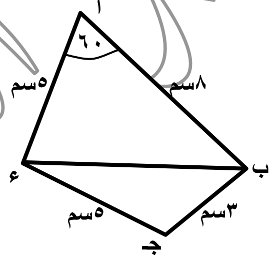
$\frac{أ^{/}}{جا ٨٠} = \frac{ب^{/}}{جا ب} = \frac{٥}{جا جـ}$ = ١٦   أ$^{/}$ = ١٦ جا ٨٠° = ١٥,٧٥ ≈ ١٥,٨سم

جا جـ = $\frac{٥}{١٦}$ ق(جـ) = ١٨° ١٢َ ٣٦ً

ق(ب) = ١٨٠ − (٨٠ + ١٨° ١٢َ ٣٦ً) = ٨١° ٤٧َ ٢٤ً

....

٢٧. أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٨ سم ، ق(أ) = ٦٠° ، ب جـ = ٣ سم ، جـ ء = ء أ = ٥ سم . اثبت أن : الشكل رباعيا دائريا.



في المثلث أ ب ء   أَ² = بَ² + ءَ² − ٢ بَ ءَ جتا أ

= ٥² + ٨² − ٢ × ٥ × ٨ جتا ٦٠ = ٤٩

أ$^{/}$ = ٧سم ⟸ ب ء = ٧سم

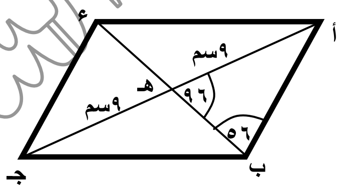
في المثلث ب جـ ء　　جتا جـ = $\frac{\text{ب}'^2 + \text{ء}'^2 - \text{جـ}'^2}{\text{٢ ب}' \text{ء}'} = \frac{(٥)^2 + (٣)^2 - (٧)^2}{٢ \times ٥ \times ٣} = \frac{-١}{٢}$

"SHIFT COS ANS = ق(جـ) = ١٢٠°

ق(أ) + ق(جـ) = ٦٠° + ١٢٠° = ١٨٠° $\Longleftarrow$ الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

---

٢٨. أ ب جـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ ، فإذا كان ق(أ ب هـ) = ٥٦° ، ق(أ هـ ب) = ٩٦° ، أ جـ = ١٨سم ، أوجد طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ مقربا الناتج لرقم عشري واحد ، ثم أوجد مساحة متوازي الأضلاع



في المثلث أ ب هـ　　ق(ب أ هـ) = ١٨٠ – (٥٦ + ٩٦) = ٢٨°

$\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{هـ}'}{\text{جا هـ}}$　ومنها　$\frac{\text{ب هـ}}{\text{جا ٢٨}} = \frac{٩}{\text{جا ٥٦}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٩٦}}$

أ ب = $\frac{\text{٩ جا ٩٦}}{\text{جا ٥٦}}$ = ١٠,٩٧ ≈ ١١سم　،　ب هـ = $\frac{\text{٩ جا ٢٨}}{\text{جا ٥٦}}$ = ٥,٠٩سم

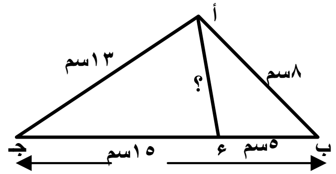
ب ء = ٥,٠٩ × ٢ = ١٠,١٨ ≈ ١٠,٢سم

مساحة المثلث أ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ هـ × جا أ = $\frac{١}{٢}$ × ١١ × ٩ × جا ٢٨ = ٢٣,٢٣ سم^2

مساحة متوازي الأضلاع = ٢٣,٢٤ × ٤ = ٩٢,٩٦سم^2

---

٢٩. في الشكل المقابل أوجد طول $\overline{\text{أ ء}}$



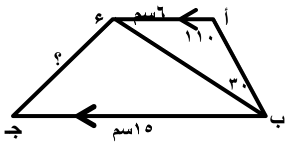
في المثلث أ ب جـ　　جتا ب = $\frac{(٨)^2 + (١٥)^2 - (١٣)^2}{٢ \times ٨ \times ١٥} = \frac{١}{٢}$

في المثلث أ ب ء　　(أ ء)^2 = (أ ب)^2 + (ب ء)^2 – ٢ × أ ب × ب ء جتا ب

(أ ء)^2 = ٤٩　$\Longleftarrow$　أ ء = ٧سم

---

٣٠. في الشكل المقابل أ ب جـ ء شبه منحرف فيه أ ء // ب جـ　أوجد طول $\overline{\text{أ ء}}$



الحل : في المثلث أ ب ء　　ق(أ ء ب) = ٤٠° لماذا ؟

بتطبيق قاعدة الجيب نجد أن : ب ء = ١١,٢٨سم

في المثلث ب ء جـ　　ق(ء ب جـ)= ٤٠°　　بالتبادل

(ء جـ)^2 = (ء ب)^2 + ( )^2 – ٢ × .... × ب جـ جتا ب

(ء جـ)^2 = ٩٣,٠٠　$\Longleftarrow$　ء جـ = ٩,٦٤سم

حل بنفسك

(١) Δ س ص ع فيه : ق($\hat{\text{ع}}$) = ٣٦° ٢١' ، س' = ٣ سم ، ص' = ٦سم ، أوجد ع' لأقرب سم . الجواب[٤ سم]

(٢) أ ب جـ ء متوازي أضلاع محيطه ٢٢سم وقياس احدى زواياه ٦٠° وطول قطره الأصغر = ٧سم أوجد طول كل من ضلعيه [٣سم ، ٨سم]

٣١. اثبت أن $\frac{\text{جا(أ + ب) + جا(أ - ب)}}{\text{جتا(أ + ب) + جتا(أ - ب)}}$ = ظا أ

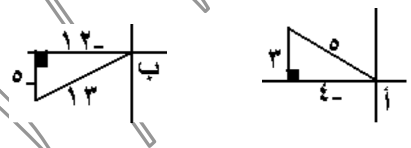
الأيمن = $\frac{\text{جا أ جتا ب + جتا أ جا ب + جا أ جتا ب - جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب - جا أ جا ب + جتا أ جتا ب + جا أ جا ب}} = \frac{\text{٢ جا أ جتا ب}}{\text{٢ جتا أ جتا ب}}$

= ظا أ = الطرف الأيسر

٣٢. إذا كان ٥ جا أ = ٣ حيث $\frac{\text{ط}}{٢}$ < أ < ط ، جتا ب = $\frac{-١٢}{١٣}$ ،

ط < ب < ٢ط أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة :

ظا ٢أ ، جتا(أ + ب) ، جا $\frac{\text{أ}}{٢}$



الحل :

ظا ٢أ = $\frac{٢ \text{ ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ أ}} = \frac{٢ \times \frac{-٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}} = \frac{-٢٤}{٧}$

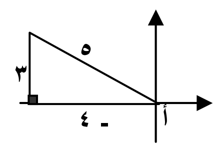
جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب – جا أ جا ب = $\frac{-٤}{٥} \times \frac{-١٢}{١٣} - \frac{٣}{٥} \times \frac{-٥}{١٣} = \frac{٦٣}{٦٥}$

، جتا أ = ١ – ٢ جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ ⟸ $\frac{-٤}{٥}$ = ١ – ٢جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$

٢ جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢}$ = ١ + $\frac{٤}{٥} = \frac{٩}{٥}$ ⟸ جا^{٢} $\frac{\text{أ}}{٢} = \frac{٩}{١٠}$

جا $\frac{\text{أ}}{٢}$ = + $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ حيث $\frac{\text{أ}}{٢}$ في الربع الأول

٣٣. إذا كان جا^{٢}أ = $\frac{٩}{٢٥}$ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$ < أ < ط فأوجد جتا (أ + $\frac{\text{ط}}{٣}$)

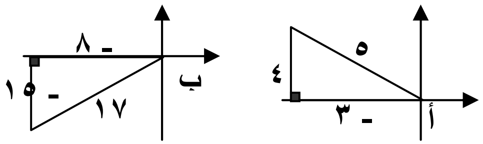


الحل : جا^{٢}أ = $\frac{٩}{٢٥}$ ⟸ جا أ = $\frac{+٣}{٥}$ حيث أ تقع في الربع الثاني

جتا (أ + $\frac{\text{ط}}{٣}$) = جتا أ جتا $\frac{\text{ط}}{٣}$ - جا أ جا $\frac{\text{ط}}{٣}$ = $\frac{-٤}{٥} \times \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٥} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{-٤ - ٣\sqrt{٣}}{١٠}$

٣٤. إذا كان جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، ١٧ جتا ب + ٨ = ٠ حيث

$\frac{\text{ط}}{٢}$ < أ < ط < ب < $\frac{٣\text{ط}}{٢}$ فأوجد جتا(٢أ – ب)



الحل :

جتا(٢أ – ب) = جتا٢أ جتا ب + جا٢أ جا ب ....(١)

جتا٢أ = جتا^{٢}أ – جا^{٢}أ = $\frac{٩}{٢٥} - \frac{١٦}{٢٥} = \frac{-٧}{٢٥}$

جا٢أ = ٢جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٤}{٥} \times \frac{-٣}{٥} = \frac{-٢٤}{٢٥}$ بالتعويض في (١)

جتا(٢أ – ب) = جتا٢أ جتا ب + جا٢أ جا ب = $\frac{-٧}{٢٥} \times \frac{-٨}{١٧} + \frac{-٢٤}{٢٥} \times \frac{-١٥}{١٧} = \frac{٤١٦}{٤٢٥}$

٣٥. بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة :

أ) $\frac{\text{ظا}٦٣ - \text{ظا}١٨}{١ + \text{ظا}٦٣ \text{ ظا}١٨}$ ب) $\frac{٢ \text{ ظا } ٣٠َ \ ٢٢^{\circ}}{١ - \text{ظا}^{٢} \ ٣٠َ \ ٢٢^{\circ}}$

جـ) جتا٤٠° جتا٥٠° – جا ٤٠° جا ٥٠°

الحل : أ) المقدار = ظا (٦٣° – ١٨°) = ظا ٤٥° = ١

ب) المقدار = ظا ٢أ = ظا ٤٥° = ١

جـ) المقدار = جتا (٤٠° + ٥٠°) = حتا٩٠° = ٠

٣٦. بدون الحاسبة اثبت أن : جتا٥٠° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جتا٥° – جا٥°)

الحل : الأيمن = جتا(٤٥ + ٥) = جتا٤٥ جتا٥ – جا٤٥ جا٥

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$ جتا٥ - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جا٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (جتا٥° – جا٥°)

....

٣٧. إذا كان أ + ب + جـ = ٩٠° اثبت أن :
ظا أ ظا ب + ظا ب ظا جـ + ظا جـ ظا أ = ١

الحل : أ + ب + جـ = ٩٠°　　أ + ب = ٩٠ – جـ

ظا(أ + ب) = ظا(٩٠ – جـ) ⇐ $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}}$ = ظتا جـ

$\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ - ظا أ ظا ب}} = \frac{1}{\text{ظا جـ}}$ ومنها ظا أ ظا جـ + ظا ب ظا جـ = ١ – ظا أ ظا ب

ظا أ ظا ب + ظا ب ظا جـ + ظا جـ ظا أ = ١

....

٣٨. اثبت أن : ظا $\frac{\text{أ}}{2}$ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{١ + جتا أ}}$ ومن ذلك وبدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد ظا ٧٥°

الأيسر = $\frac{\text{جا أ}}{\text{١ + جتا أ}}$ = $\frac{\text{٢جا}\frac{أ}{2}\text{جتا}\frac{أ}{2}}{\text{١ + ٢جتا}^2\frac{أ}{2}\text{ - ١}}$ = $\frac{\text{٢ جا}\frac{أ}{2}\text{ جتا}\frac{أ}{2}}{\text{٢ جتا}^2\frac{أ}{2}}$ = $\frac{\text{جا}\frac{أ}{2}}{\text{جتا}\frac{أ}{2}}$ = ظا $\frac{\text{أ}}{2}$ = الأيمن

ظا ٧٥° = $\frac{\text{جا ١٥٠}}{\text{١ + جتا ١٥٠}}$ = $\frac{\text{جا ٣٠}}{\text{١ - جتا ٣٠}}$ = $\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ = $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ = $2 + \sqrt{3}$

....

٣٩. إذا كان جا١٣٥° جتا أ – جتا١٣٥° جا أ = ١ أوجد قيمة أ حيث أ ∈ [٠، ٩٠]

الحل : جا١٣٥° جتا أ – جتا١٣٥° جا أ = ١

جا(١٣٥ – أ) = ١ ⇐ ١٣٥ – أ = ٩٠° ⇐ أ = ٤٥°

....

٤٠. اثبت أن : جا٤٠° + جا٢٠° = جتا١٠°

الأيمن = جا(٣٠ + ١٠) + جا(٣٠ – ١٠)

= جا٣٠ جتا١٠ + جتا٣٠ جا١٠ + جا٣٠ جتا١٠ – جتا٣٠ جا١٠

= ٢ جا٣٠ جتا١٠ = ٢ × ٠,٥ × جتا١٠ = جتا١٠

....

حل بنفسك

أ) إذا كان ظا أ = $\frac{-5}{12}$ حيث أ^ أصغر زاوية موجبة أوجد بدون الحاسبة
جا ٢أ ، جتا ٢أ ، ظا(٤٥° + أ)　　[$-\frac{120}{169}$ ، $\frac{119}{169}$ ، $\frac{7}{17}$]

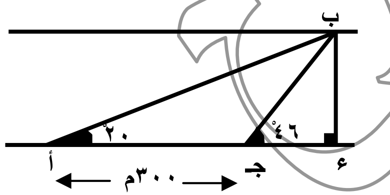
ب) اثبت صحة كل متطابقة مما يلي :
[١] (جا أ + جتا أ)^2 = ١ + جا ٢أ　　[٢] جتا^4 أ – جا^4 أ = جتا ٢أ

جـ) إذا كان جا س + جتا س = $\frac{7}{5}$ حيث س ∈] ٠ ، $\frac{\text{ط}}{4}$ [أوجد قيمة كل من
جا٢س ، جتا٢س ، قاس + قتاس　　[$\frac{24}{25}$ ، $\frac{7}{25}$ ، $\frac{35}{12}$]

ء) أوجد قيمة :
١) جا ١٥° جتا ١٥°　　٢) حتا^2 ٢٢,٥° – جا^2 ٢٢,٥°

[$\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$]

٤١. من نقطة أ على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها في اتجاه ٢٠° شمال الشرق ، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ في اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة جـ وجد أن نقطة ب في اتجاه ٤٦° شمال الشرق ، أوجد عرض النهر لأقرب متر (علما بأن ضفتي النهر متوازيتان وأن النقط أ ، ب ، جـ في مستوى أفقي واحد



الحل :

زاوية ب ء جـ خارجة عن Δ أ ب جـ ق(أ ب جـ) = ٤٦ ـ ٢٠ = ٢٦ ˚

في Δ أ ب جـ $\frac{\text{٣٠٠}}{\text{جا ٢٦}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٢٠}}$ $\Leftarrow$ ب جـ = $\frac{\text{٣٠٠جا٢٠}}{\text{جا٢٦}}$ = ٢٣٤,٠٦م

في Δ ب ء جـ $\frac{\text{٢٣٤,٠٦}}{\text{جا٩٠}} = \frac{\text{ب ء}}{\text{جا٤٦}}$ ب ء = $\frac{\text{٢٣٤,٠٦جا٤٦}}{\text{جا٩٠}}$ = ١٦٨,٣ ≈ ١٦٨م

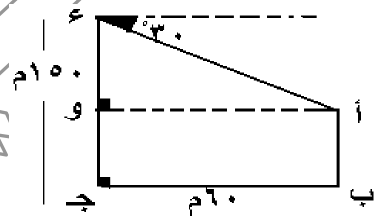
....

٤٢. برجان رأسيان البعد الأفقي بينهما ٦٠ مترا وزاوية انخفاض قمة الأول عندما ترصد من قمة الثاني تساوي ٣٠˚ أوجد ارتفاع البرج الأول إذا علم أن ارتفاع البرج الثاني ١٥٠ مترا .

الحل : ق(ء أ و) = ٣٠˚ بالتبادل ق(أ ء و) = ٦٠˚

أ و = ٦٠ م من خواص المستطيل أ ب جـ و

في Δ أ و ء



$\frac{\text{أ و}}{\text{جا ٦٠}} = \frac{\text{ء و}}{\text{جا ٣٠}}$

$\frac{\text{٦٠}}{\text{جا ٦٠}} = \frac{\text{ء و}}{\text{جا ٣٠}}$

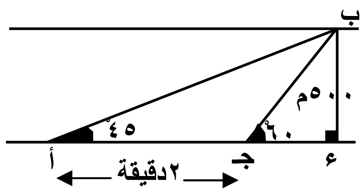
∴ ء و ≈ ٣٤,٦٤ متر

∴ و جـ = ١٥٠ ـ ٣٤,٦٤ = ١١٥,٣٦ متر

أ ب = جـ و ≈ ١١٥,٣٦ متر من خواص المستطيل

....

٤٣. شاهد رجل في قارب يتحرك في الماء مبتعدا عن صخرة ارتفاعها ٥٠٠متر أن قياس زاوية ارتفاع قمة الصخرة في لحظة معينة ٦٠˚ ثم أصبحت بعد دقيقتين ٤٥˚ . احسب سرعة القارب



الحل :

في المثلث ب جـ ء $\frac{\text{٥٠٠}}{\text{جا٦٠}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٩٠}}$ $\Leftarrow$ ب جـ = ٥٧٧,٣٥م

ق(ب جـ أ) = ٦٠ ـ ٤٥ = ١٥˚

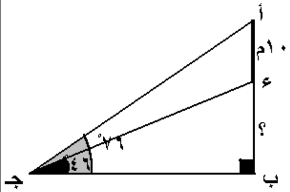
في المثلث أ ب جـ $\frac{\text{٥٧٧,٣٥}}{\text{جا٤٥}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ١٥}}$ $\Leftarrow$ أ جـ = $\frac{\text{٥٧٧,٣٥ جا١٥}}{\text{جا٤٥}}$ = ٢١١,٣٢م

سرعة القارب = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}} = \frac{\text{٢١١,٣٢}}{\text{١٢٠}}$ = ١,٧٦م/ث

حل بنفسك

١) رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٥˚ ثم سار على طريق أفقي نحو قاعدة البرج مسافة ٥٠˚ فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٦٥˚. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر [٣٠م]

٢) برج ارتفاعه ١٠٠ متر مقـام على صخرة ، ومن نقطة على سطح الأرض في المستوى الأفقي المار بقاعدة الصخـرة قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعـدة البــرج فوجدتا ٧٦˚ ، ٤٦˚ على الترتيب أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر



[٣٥ متر]

٣) وقف شخص على إحدى ضفتي نهر عند (جـ) وقاس زاوية ارتفاع مئذنة أ ب مقامة على الشاطئ الآخر فوجد أن قياسها ٤٣˚ ولما عاد للخلف مسافة ٥٠ مترا عند (ء) فوجد أن زاوية ارتفاع قمة المئذنة أصبحت ٢٥˚ أوجد ارتفاع المئذنة وعرض النهر

[٤٦,٦٣ متر ، ٥٠ متر]

مسائل إضافية محلولة

١. أوجد $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \left(\sqrt{س^{٢} + ٥س} - س\right)$

٢. أوجد : $\underset{س \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{(٥ - \sqrt{س})(٥ + \sqrt{س})}{٣ س - ٢}$

٣. أوجد $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{٢س} - ١)^{٢}\,(\text{٣س}^{٢} + ٢)}{\text{س}^{٤} + ١}$

٤. أوجد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{٥س}^{٢} - ٦}{\text{س}^{٣} - ١}$

٥. أوجد $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٦٤س}^{-٦} - ١}{\text{س} - ٢}$

٦. أوجد : $\underset{(\text{س} - \frac{\text{ط}}{٢}) \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\text{س} - \frac{\text{ط}}{٢}}$

٧. أوجد : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - \text{جتا٢س}}{\text{س ظا ٥س}}$

٨. أوجد : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - ٢)^{٣} - ١}{\text{س}(\text{س} - ٣)}$

٩. أوجد : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٣ س} - \text{س}^{٢} - ٢}{١ - \text{س}^{٢}}$ .... $\times \dfrac{-١}{-١}$

١٠. أوجد : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(٣ + \text{س})^{٤} - ٨١}{\text{٥ س}}$

١١. أوجد : $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} + ١} - ١}{\text{س}}$

١٢. أوجد دالة متوسط التغير للدالة $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س} + ١}{\text{س}}$

حيث س $\neq$ ٠ ثم أوجد هذا المتوسط عندما س = ٤ ، هـ = ٠,٥

١٣. إذا كان نمو أحد المجتمعات يتبع العلاقة :

$\text{د(ن)} = \text{٥٠ ن}^{٢} + ٣٠٠٠$ حيث ن مقيسة بالأيام فأوجد :

(١) متوسط التغير عندما تتغير ن من ١ إلى ١,٥

(٢) معدل النمو عندما ن = ١

١٤. إذا كان $\text{ص} = \text{أ س}^{٣} + \text{ب س}^{٢}$ ، $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٨$ عندما س = ١ ، وكان متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من -١ إلى ٢ يساوي ٧ فأوجد قيمتي الثابتين أ ، ب

١٥. أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د :

$\text{د(س)} = \text{س}^{٢}\,\text{جتاس} + \text{جا}^{٢}\text{س}$ عندما $\text{س} = \dfrac{\text{ط}}{٢}$

١٦. أوجد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدالة $\text{ص} = (١ - \text{س})^{٥}(١ + \text{س})^{٥}$ عند النقطة (٠ ، ١)

١٧. إذا كان $\text{ص} = \dfrac{\text{جتا س}}{١ - \text{جا س}}$ فاثبت أن $(١ - \text{جا س})\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١$

١٨. إذا كانت $\text{د(س)} = \text{س}^{٢}\,(\text{٣ س} - ٥)^{٧}$ أوجد $\text{د}'(٢)$

١٩. إذا كانت $\text{ص} = \text{س}\sqrt{\text{٢ س}^{٢} + ١}$ فأوجد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ٠

٢٠. إذا كان ص = ٦س جا س جتا س فاثبت أن :

$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣(\text{جا٢س} + \text{٢س جتا٢س})$

٢١. إذا كان $\text{ص} = ٢\,\text{جتا س جتا}\dfrac{\text{س}}{٢}\,\text{جا}\dfrac{\text{س}}{٢}$ فأوجد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

٢٢. إذا كان المماس للمنحنى $\text{ص} = \text{ب س}^{٣} - \text{س} - ٥$ عند س = -١

عموديا على المستقيم $\text{ص} = -\dfrac{١}{٥}\text{س} + ١$ أوجد قيمة ب

٢٣. إذا كان $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (ك س + ٣) أوجد قيمة الثابت ك

٢٤. إذا كان ص = قا س فاثبت أن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = قا س ظا س

٢٥. إذا كانت $(\text{س} + ٢\ \text{ص})^{٣} = ٥$ فاثبت أن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = -\frac{١}{٢}$

٢٦. إذا كان ص = $\text{س}^{٢} + ١$ ، ع = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$ اثبت أن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} = ٢\text{ع}$

٢٧. إذا كانت د(س) = $\frac{\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$ ، س ≠ ± ١ حل المعادلة دَ(س) = ١

٢٨. إذا كانت ص = $\sqrt{\text{ع} + ١}$ ، ع = جتا٢س اثبت أن

$\text{ص}^{٢} - \left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{٢} - ٢\ \text{ع} = \text{صفر}$

٢٩. إذا كان : ص= $(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢}$ فاثبت أن : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ =٢جتا٢س

٣٠. إذا كان ص = $\text{ع}^{٢} + \text{ع}$ ، ع = $٢\text{س}^{٢}$ اثبت أن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} - \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = ١٦\text{س}^{٣}$

٣١. أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ٥سم ، ب جـ = ٧سم ، أ جـ = ٨سم . أوجد طول قطره $\overline{\text{ب ء}}$

٣٢. أ ب جـ مثلث فيه : أ ب = ١٠سم ، ، ق(ب) = ٤٠° ، ق(أ ء ب) = ١٢٠° حيث ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$. أوجد محيط المثلث أ ب جـ لأقرب سم

٣٣. أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٤٠سم ، أ جـ = ٦٠سم ، جتا(أ ب جـ)= $-\frac{١١}{٢٤}$ أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$

٣٤. في المثلث أ ب جـ إذا كان (أَ + بَ - جـَ)(أَ + بَ + جـَ) = أَ بَ أوجد ق($\hat{\text{جـ}}$)

٣٥. من قمة منزل ارتفاعه ٢٤ مترا كان قياس زاوية ارتفاع قمة برج يساوي ١٥° وقياس زاوية انخفاض قاعدة البرج ٣٠° .أوجد ارتفاع البرج

٣٦. تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه ٧٠° شرق الجنوب بسرعة ٨كم/س ، وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى في اتجاه ٤٠° شمال الشرق بسرعة ٥ كم/س . أوجد البعد بين السفينتين بعد ساعتين .

٣٧. رجل طوله ١٧٠ سم يتحرك على خط مستقيم أفقي نحو برج ، رصد الرجل زاوية ارتفاع قمة البرج فوجدها تغيرت من ٢٨° إلى ٥٠° عندما سار مسافة ٦٠ متراً . أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر

٣٨. من نقطة تقع بين قاعدتي برج ارتفاعه ٥٠متر ومنزل ارتفاعه ٢٠متر قاس شخص زاويتي ارتفاع قمة البرج وسطح المنزل فكانتا ٧٠° ، ٣٠° على الترتيب أوجد المسافة بين قمة البرج وسطح المنزل .

٣٩. بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :
حا٣٥° جتا١٠° + جتا ٣٥° جتا ٨٠°

٤٠. إذا كان ظا٢أ = $\frac{٤}{٣}$ أوجد بدون الآلة الحاسبة قيمة ظا أ

٤١. إذا كان جتا٢أ = $\frac{٧}{٢٥}$ أوجد بدون الآلة الحاسبة قيمة : جتا أ

٤٢. إذا كان ٩٠° < أ < ١٨٠° ، جتا ٢ أ = $\frac{٤}{٥}$ أوجد قيمة جا أ

٤٣. اثبت أن (١ + جتا ٢أ) ظا أ = حا٢أ

٤٤. اثبت أن : $\frac{\text{جتا٢جـ}}{\text{جا جـ}} + \frac{\text{جا٢جـ}}{\text{جتا جـ}} = \text{قتا جـ}$

٤٥. اثبت أن : $\frac{١ - \text{جتا٢جـ} + \text{جا٢جـ}}{١ + \text{جتا٢جـ} + \text{جا٢جـ}} = \text{ظا جـ}$

٤٦. اثبت أن : $\frac{\text{٢جا أ} - \text{جا٢أ}}{٢\ \text{جا}^{٣}\text{أ}} = \frac{١}{٢}\ \text{قا}^{٢}\ \frac{\text{أ}}{٢}$

٤٧. إذا كان جاس جتاس = $\frac{٢}{٥}$ فأوجد قيمة : جا٣س جتاس - جتا٣س جاس

٤٨. Δ أ ب جـ حاد الزوايا فيه : ظا أ = ٣ ، جاب = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة جتا(أ + ب) وبين أن ق($\hat{\text{جـ}}$) = ٤٥°

٤٩. اثبت أن : $\frac{\text{٢ جتا٢أ ظا أ}}{\text{١ - ظا}^{٢}\text{ أ}}$ = جا٢أ

٥٠. اثبت أن : ٢جتا^{٢}($\frac{\text{ط}}{٤}$ - $\frac{\text{٣س}}{٢}$) = ١ + جا٣س

٥١. إذا كان ظا أ = $\frac{١}{٧}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ، ب ∈]٠ ، $\frac{\text{ط}}{٢}$[بدون استخدام الآلة الحاسبة اثبت أن : ظا (أ + ٢ ب) = ١

٥٢. إذا كان ق(ب) – ٢ق(أ) = ١٨٠° ، ظا أ = $\frac{١}{٢}$ اثبت أن : ظا ب = $\frac{٤}{٣}$

٥٣. Δ أ ب جـ فيه ظا أ = ٣ ، ظا ب = ٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد ق($\hat{\text{جـ}}$)

٥٤. حل المعادلة : ٤ جا أ جتا أ = $\sqrt{٣}$ حيث أ ∈ [٠ ، ٢ط[

٥٥. حل المعادلة جتا ٢أ = ٥ جا أ + ٣ حيث أ ∈ [٠ ، ٢ط[

٥٦. إذا كان : حاأ جتا^{٣}أ – جتاأ حا^{٣}أ = $\frac{١}{٤}$ اثبت أن : جا٤أ = ١

٥٧. بدون الحاسبة اثبت أن : ظتا١٥° – ظا١٥° = ٢$\sqrt{٣}$

٥٨. اثبت أن : قتا٢س + ظتا٢س = ظتا س ومن ذلك اثبت أن ظتا١٥° = ٢ + $\sqrt{٣}$

حل المسائل الإضافية

١. $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}(\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{٥س}}-\text{س}) = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{(\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{٥س}}-\text{س})(\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{٥س}}+\text{س})}{١\times(\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{٥س}}+\text{س})}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{\text{س}^{٢}+\text{٥س}-\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{٥س}}+\text{س}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{\text{٥س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{٥س}}+\text{س}} \frac{\div\ \text{س}}{\div\ \text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{٥}{\sqrt{١+\frac{٥}{\text{س}}}+١} = \frac{٥}{٢}$

....

٢. $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{(٥-\sqrt{\text{س}})(٥+\sqrt{\text{س}})}{\text{٣ س - ٢}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{\text{٢٥ - س}}{\text{٣س - ٢}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{\frac{٢٥}{\text{س}}-١}{٣-\frac{٢}{\text{س}}} = \frac{-١}{٣}$

....

٣. أوجد $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{(\text{٢س - ١})^{٢}(\text{٣س}^{٢}+٢)}{\text{س}^{٤}+١} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{(\text{٢س - ١})^{٢}(\text{٣س}^{٢}+٢)}{\text{س}^{٤}+١}$

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\frac{\left(٢-\frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}\left(٣+\frac{٢}{\text{س}^{٢}}\right)}{١+\frac{١}{\text{س}^{٤}}} = \frac{(٢)^{٢}\times٣}{١} = ١٢$

....

٤. $\underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}}\frac{\text{س}^{٣}+\text{٥س}^{٢}-٦}{\text{س}^{٣}-١} = \underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}}\frac{(\text{س - ١})(\text{س}^{٢}+\text{٦س}+٦)}{(\text{س - ١})(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)}$

$= \underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}}\frac{\text{س}^{٢}+\text{٦س}+٦}{\text{س}^{٢}+\text{س}+١} = \frac{١٣}{٣}$

القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^{\text{٣}} + \text{٥س}^{\text{٢}} - \text{٦} & \text{س} - \text{١} \\ \text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}} & \text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س} + \text{٦} \\ \hline \text{٦س}^{\text{٢}} - \text{٦} & \\ \text{٦س}^{\text{٢}} - \text{٦س} & \\ \hline \text{٦س} - \text{٦} & \\ \text{٦س} - \text{٦} & \\ \hline \text{٠٠} \quad \text{٠٠} & \end{array}$$

٥. $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٦٤س}^{-\text{٦}} - \text{١}}{\text{س} - \text{٢}} = \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٦٤}(\text{س}^{-\text{٦}} - \frac{\text{١}}{\text{٦٤}})}{\text{س} - \text{٢}}$

$= \text{٦٤} \times \underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{-\text{٦}} - \text{٢}^{-\text{٦}}}{\text{س} - \text{٢}} = \text{٦٤} \times -\text{٦} \times (\text{٢})^{-\text{٧}} = -\text{٣}$

٦. $\underset{\text{س}\to\frac{\text{ط}}{\text{٢}}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\text{س} - \frac{\text{ط}}{\text{٢}}}$ نضع $\text{س} - \frac{\text{ط}}{\text{٢}} = \text{ص}$ ، $\text{س} = \frac{\text{ط}}{\text{٢}} + \text{ص}$

$\underset{(\text{س} - \frac{\text{ط}}{\text{٢}})\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\text{س} - \frac{\text{ط}}{\text{٢}}} = \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتا}(\frac{\text{ط}}{\text{٢}} + \text{ص})}{\text{ص}} = \underset{\text{ص}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{ظا ص}}{\text{ص}} = -\text{١}$

٧. $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١} - \text{جتا٢س}}{\text{س ظا ٥س}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١} - (\text{١} - \text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س})}{\text{س ظا ٥س}}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢جا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{س ظا ٥س}} \div \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢}\left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}}}{\frac{\text{ظا ٥س}}{\text{س}}} = \dfrac{\text{٢}(\text{١})^{\text{٢}}}{\text{٥}} = \dfrac{\text{٢}}{\text{٥}}$

٨. $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - \text{٢})^{\text{٣}} - \text{١}}{\text{س}(\text{س} - \text{٣})} = \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{[(\text{س-٢})\text{-١}][(\text{س-٢})^{\text{٢}} + (\text{س-٢}) + \text{١}]}{\text{س}(\text{س} - \text{٣})}$

$= \underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{[(\text{س-٢})^{\text{٢}} + (\text{س-٢}) + \text{١}]}{\text{س}} = \dfrac{\text{١} + \text{١} + \text{١}}{\text{٣}} = \text{١}$

٩. النهاية $= \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}} = \underset{\text{س}\to\text{١}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} - \text{١})(\text{س} - \text{٢})}{(\text{س} - \text{١})(\text{س} + \text{١})} = \dfrac{-\text{١}}{\text{٢}}$

١٠. النهاية $= \dfrac{\text{١}}{\text{٥}} \times \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{٣} + \text{س})^{\text{٤}} - \text{٨١}}{\text{س}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٥}} \times \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{٣} + \text{س})^{\text{٤}} - \text{٣}^{\text{٤}}}{(\text{٣} + \text{س}) - \text{٣}}$

$= \dfrac{\text{١}}{\text{٥}} \times \text{٤} \times \text{٣}^{\text{٣}} = \dfrac{\text{١٠٨}}{\text{٥}}$

١١. النهاية $= \underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س}+\text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} - (\text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}}{(\text{س}+\text{١}) - \text{١}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}} (\text{١})^{\frac{-\text{٢}}{\text{٣}}} = \dfrac{\text{١}}{\text{٣}}$

١٢. $\text{م}(\text{هـ}) = \dfrac{\text{د}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \dfrac{\frac{\text{س} + \text{هـ} + \text{١}}{\text{س} + \text{هـ}} - \frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}}}{\text{هـ}}$

عند س = ٤ ، هـ = ٠,٥ $\text{م}(\text{هـ}) = \dfrac{\frac{\text{٤} + \text{٠,٥} + \text{١}}{\text{٤} + \text{٠,٥}} - \frac{\text{٤} + \text{١}}{\text{٤}}}{\text{٠,٥}} = \dfrac{\frac{\text{٥,٥}}{\text{٤,٥}} - \frac{\text{٥}}{\text{٤}}}{\text{٠,٥}} = \dfrac{-\frac{\text{١}}{\text{٣٦}}}{\text{٠,٥}} = \dfrac{-\text{١}}{\text{١٨}}$

١٣. $\text{م(هـ)} = \frac{\text{د(ن + هـ) - د(ن)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{٥٠(ن + هـ)}^{٢} + \text{٣٠٠٠ - (٥٠ن}^{٢} + \text{٣٠٠٠)}}{\text{هـ}}$

$= \frac{\text{٥٠ن}^{٢} + \text{١٠٠ن هـ} + \text{٥٠هـ}^{٢} + \text{٣٠٠٠ - ٥٠ن}^{٢} \text{ - ٣٠٠٠}}{\text{هـ}} = \frac{\text{١٠٠ن هـ} + \text{٥٠هـ}^{٢}}{\text{هـ}} =$

١٠٠ن + ٥٠هـ

ن : ١ $\longrightarrow$ ١,٥ ن = ١ ، هـ = ٠,٥

متوسط التغير = ١٠٠ × ١ + ٥٠ × ٠,٥ = ١٢٥

معدل التغير = $\underset{\text{هـ} \to \text{٠}}{\text{نهـا}}$ م(هـ) = ١٠٠ن = ١٠٠×١ = ١٠٠

---

١٤. ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٣أ س^{٢} + ٢ب س ، $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٨ عندما س = ١

٨ = ٣أ + ٢ب .... (١)

س : (- ١) $\longrightarrow$ ٢ Δس = ٣

ص : (- أ + ب) $\longrightarrow$ (٨أ + ٤ب) Δص = ٩أ + ٣ب

متوسط التغير $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{٩أ + ٣ب}}{\text{٣}} \Longleftarrow \text{٧} = \frac{\text{٩أ + ٣ب}}{\text{٣}}$

٧ = ٣أ + ب .... (٢) بطرح (٢) من (١)

<u>ب = ١</u> بالتعويض في (٢) ٧ = ٣أ + ١ <u>أ = ٢</u>

---

١٥. د$^{/}$(س) = س^{٢} × - جاس + جتا س × ٢س + ٢ جا س جتا س

= - س^{٢} جا س + ٢س جتا س + جا٢س

عندما س = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ د$^{/}$(س) = - $\left(\frac{\text{ط}}{\text{٢}}\right)^{٢}$ جا $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ + ٢×$\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ جتا $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ + جا ط

= $\frac{\text{- ط}^{٢}}{\text{٤}}$ × ١ + ٠ + ٠ = $\frac{\text{- ط}^{٢}}{\text{٤}}$

---

١٦. ص = (١ - س^{٢})^{٥} $\Longleftarrow$ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٥ × (١ - س^{٢})^{٤} × - ٢س

عند س = صفر $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٥ × (١ - ٠)^{٤} ×- ٢ × ٠ = صفر

---

١٧. $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{\text{(١ - جا س) × - جا س - جتا س × - جتا س}}{\text{(١ - جا س)}^{٢}}$

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{\text{- جا س + جا}^{٢}\text{س + جتا}^{٢}\text{س}}{\text{(١ - جا س)}^{٢}}$

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{\text{(١ - جا س)}}{\text{(١ - جا س)}^{٢}} \Longleftarrow \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \frac{\text{١}}{\text{(١ - جا س)}} \Longleftarrow \text{(١ - جا س)} \frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \text{١}$

---

١٨. د(س) = س^{٢} (٣س - ٥)^{٧}

دَ(س) = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

دَ(س) = س^{٢} × ٧ (٣س - ٥)^{٦} × ٣ + (٣س - ٥)^{٧} × ٢س

دَ(٢) = ٤×٧×(١)^{٦}×٣ + (١)^{٧}×٤ = ٨٤ + ٤ = ٨٨

---

١٩. $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}} = \text{س} \times \frac{\text{١ × ٤ س}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢ س}^{٢} + \text{١}}} + \sqrt{\text{٢ س}^{٢} + \text{١}} \times \text{١}$

عند س = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٠ + ١ × ١ = ١

---

٢٠. ص = ٦س جا س جتا س = ٣س × (٢جا س جتا س)

ص = ٣س جا٢س

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى= ٣س× ٢جتا٢س+ جا٢س × ٣

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٦س جتا٢س + ٣جا٢س بأخذ ٣ عامل مشترك والإبدال

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = ٣(جا٢س + ٢س جتا٢س)

٢١. ص = (٢ جا $\frac{\text{س}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س}}{٢}$) × جتا س

ص = جا س جتا س ⟸ ص = $\frac{١}{٢}$ جا٢س ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}$ × ٢ جتا٢س = جتا٢س

---

٢٢. بالنسبة للمنحنى ص = ب $\text{س}^{٣}$ – س – ٥ ⟸ صَ = ٣ب $\text{س}^{٢}$ – ١

عند س = – ١ صَ = ٣ب × ١ – ١ = ٣ب – ١

ميل المماس م = ٣ب – ١ ....(١)

بالنسبة للمستقيم ص = – $\frac{١}{٥}$ س + ١ ⟸ صَ = – $\frac{١}{٥}$

ميل المستقيم مَ = – $\frac{١}{٥}$ ⟸ ميل العمودي (المماس) = ٥

٣ب – ١ = ٥ ⟸ ٣ب = ٦ ⟸ ب = ٢

---

٢٣. $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (ك س + ٣)

$\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)}$ = ك ومنها ٢ + ٢ = ك ⟸ ك = ٤

---

٢٤. ص = قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$ ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{المقام × مشتقة البسط – البسط × مشتقة المقام}}{(\text{ المقام })^{٢}}$

= $\frac{\text{جتا س} \times ٠ - ١ \times - \text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س} \times \text{جتا س}}$ = قا س ظا س

---

٢٥. $(\text{س} + ٢\text{ص})^{٣}$ = ٥ س + ٢ص = $\sqrt[٣]{٥}$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ س ١ + ٢ صَ = ٠ ⟸ صَ = – $\frac{١}{٢}$

---

٢٦. ص = $\text{س}^{٢}$ + ١ .... (١)

ع = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}$ بتربيع الطرفين $\text{ع}^{٢} = \text{س}^{٢} - ١$

$\text{س}^{٢} = \text{ع}^{٢} + ١$ بالتعويض في (١) ينتج أن ص = $\text{ع}^{٢}$ + ٢

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ ع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ٢ع

---

٢٧. د(س) = $\frac{\text{س}}{١ - \text{س}^{٢}}$

دَ(س) = $\frac{(١ - \text{س}^{٢}) \times ١ - \text{س} \times (- ٢\text{س})}{(١ - \text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{(١ - \text{س}^{٢}) + ٢\text{س}^{٢}}{(١ - \text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{١ + \text{س}^{٢}}{(١ - \text{س}^{٢})^{٢}}$

$\frac{١ + \text{س}^{٢}}{(١ - \text{س}^{٢})^{٢}}$ = ١ ⟸ $(١ - \text{س}^{٢})^{٢} = ١ + \text{س}^{٢}$

١ – ٢ $\text{س}^{٢}$ + $\text{س}^{٤}$ = ١ + $\text{س}^{٢}$ ⟸ $\text{س}^{٤}$ – ٣ $\text{س}^{٢}$ = ٠ ⟸ $\text{س}^{٢}(\text{س}^{٢} - ٣)$ = ٠

إما $\text{س}^{٢}$ = ٠ ومنها س = ٠ وإما $\text{س}^{٢}$ = ٣ ومنها س = ± $\sqrt{٣}$

م.ح = { ٠ ، $\sqrt{٣}$ ، – $\sqrt{٣}$ }

---

٢٨. ص = $\sqrt{\text{ع} + ١}$ ، ع = جتا٢س

ص = $\sqrt{\text{جتا ٢س} + ١}$ = $\sqrt{٢\text{جتا}^{٢}\text{س} - ١ + ١}$

ص = $\sqrt{٢\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ = $\sqrt{٢}$ جتا س.... (١) ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = – $\sqrt{٢}$ جا س .... (٢)

الطرف الأيمن = $\text{ص}^{٢} - (\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}})^{٢}$ – ٢ع

= $(\sqrt{٢}\ \text{جتا س})^{٢} - (-\sqrt{٢}\ \text{جا س})^{٢}$ – ٢جتا٢س = ٢$\text{جتا}^{٢}$س – ٢ $\text{جا}^{٢}$س – ٢ جتا٢س

= ٢($\text{جتا}^{٢}$س – $\text{جا}^{٢}$س) – ٢ جتا٢س = ٢ جتا ٢س – ٢ جتا ٢س = صفر = الأيسر

---

٢٩. ص = $(\text{ جا س} + \text{جتا س })^{٢}$ ⟸ ص = $\text{جا}^{٢}$س + $\text{جتا}^{٢}$س + ٢جا س جتا س

ص = ١ + جا٢س ⟸ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢جتا٢س

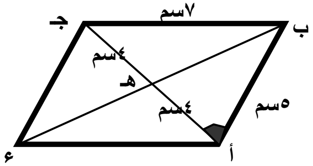
٣٠. ص = ع^{٢} + ع ، ع = ٢س^{٢}

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ٢ ع + ١ = ٤س^{٢} + ١ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٤س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = (٤س^{٢} + ١) × ٤س = ١٦س^{٣} + ٤س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = (١٦س^{٣} + ٤س) − ٤س = ١٦س^{٣}

٣١.



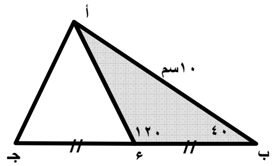
في المثلث أ ب جـ جتا أ = $\frac{\text{ب}'^{2} + \text{جـ}'^{2} - \text{أ}'^{2}}{\text{٢ ب}'\text{ جـ}'} = \frac{(٨)^{2} + (٥)^{2} - (٧)^{2}}{٢ \times ٨ \times ٥} = \frac{١}{٢}$ ⇐ ق(أ) = ٦٠

في المثلث أ ب هـ (ب هـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ هـ)^{٢} − ٢ × أ ب × أ هـ × جتا أ

(ب هـ)^{٢} = ٥^{٢} + ٤^{٢} − ٢ × ٥ × ٤ جتا ٦٠° = ٢١

ب هـ = $\sqrt{٢١}$ ⇐ ب ء = ٢$\sqrt{٢١}$ ≈ ٩,١٧سم

٣٢.



في المثلث أ ب ء ق(أ) = ١٨٠ − (٤٠ + ١٢٠) = ٢٠°

$\frac{\text{أ}'}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ء}'}{\text{جا ء}}$ ⇐ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ٢٠}} = \frac{١٠}{\text{جا ١٢٠}}$ ⇐ ب ء = $\frac{\text{١٠ جا٢٠}}{\text{جا ١٢٠}}$ = ٣,٩٥

ب جـ = ٧,٩سم

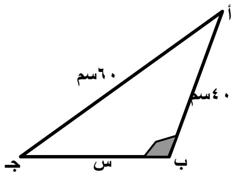
في المثلث أ ب جـ ب$'^{٢}$ = أ$'^{٢}$ + جـ$'^{٢}$ − ٢ أ' جـ' جتا $\hat{\text{ب}}$

ب$'^{٢}$ = (٧,٩)^{٢} + (١٠)^{٢} − ٢ × ٧,٩ × ١٠ جتا ٤٠ = ٤١,٣٧

ب' = $\sqrt{٤١,٣٧}$ = ٦,٤سم أ جـ = ٦,٤سم

محيط المثلث أ ب جـ = ١٠ + ٧,٩ + ٦,٤ = ٢٤,٣سم

٣٣.



الحل :

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} − ٢ × أ ب × ب جـ جتا ب

(٦٠)^{٢} = (٤٠)^{٢} + س^{٢} − ٢ × ٤٠ × س × $\frac{-١١}{٢٤}$

٣٦٠٠ = ١٦٠٠ + س^{٢} + $\frac{١١٠}{٣}$س .... × ٣

١٠٨٠٠ = ٤٨٠٠ + ٣س^{٢} + ١١٠س

٠ = ٣س^{٢} + ١١٠س − ٦٠٠٠

٠ = (س − ٣٠)(٣س + ٢٠٠) س = ٣٠ مقبول ب جـ = ٣٠سم

٣٤. (أ' + ب' − جـ')(أ' + ب' + جـ') = أ' ب'

(أ' + ب')^{٢} − جـ$'^{٢}$ = أ' ب'

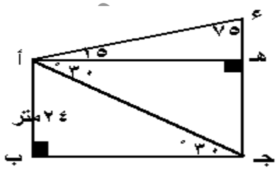
أ$'^{٢}$ + ب$'^{٢}$ − جـ$'^{٢}$ = −أ' ب'

جتا جـ = $\frac{\text{أ}'^{2} + \text{ب}'^{2} - \text{جـ}'^{2}}{\text{٢ أ}'\text{ ب}'} = \frac{-\text{أ}'\text{ب}'}{\text{٢أ}'\text{ ب}'} = \frac{-١}{٢}$ ⇐ ($\hat{\text{جـ}}$) = ١٢٠°

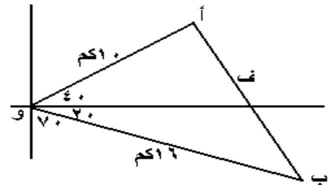
٣٥. ق (أ جـ ب) = ٣٠° بالتبادل ق(ء) = ٩٠ − ١٥ = ٧٥°

في المثلث أ ب جـ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا٩٠°}} = \frac{٢٤}{\text{جا٣٠°}}$ ومنها أ جـ = $\frac{\text{٢٤جا٩٠°}}{\text{جا٣٠°}}$ = ٤٨ متر

في المثلث أ ء جـ $\frac{\text{ء جـ}}{\text{جا٤٥°}} = \frac{\text{٤٨}}{\text{جا٧٥°}}$ ومنها ء جـ = $\frac{\text{٤٨جا٤٥°}}{\text{جا٧٥°}}$ ≈ ٣٥,١ ≈ ٣٥ متر تقريبا



٣٦. و َ² = أ َ² + ب َ² − ٢أ َب َجتا و

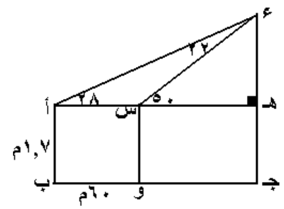


و َ² = (١٦)² + (١٠)² − ٢×١٦×١٠×جتا٦٠ = ١٩٦   و َ = ١٤

البعد بين السفينتين بعد ساعتين = ١٤ كم

٣٧. من خواص المستطيل : س أ = و ب = ٦٠ ، أ ب = جـ هـ = ١,٧

ء س^ هـ زاوية خارجة عن Δ ء س أ



ق(س^ء أ) = ٥٠ − ٢٨ = ٢٢°

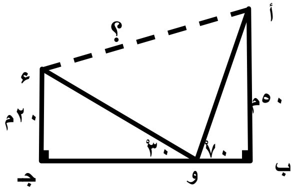
في Δ ء س أ $\frac{\text{ء س}}{\text{جا٢٨°}} = \frac{\text{أ س}}{\text{جا٢٢°}}$ ⇐ $\frac{\text{ء س}}{\text{جا٢٨°}} = \frac{\text{٦٠}}{\text{جا٢٢°}}$

ء س = $\frac{\text{٦٠جا٢٨°}}{\text{جا٢٢°}}$ = ٧٥,١٩ متر

في Δ ء س أ $\frac{\text{ء س}}{\text{جا٩٠°}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{جا٥٠°}}$ ⇐ $\frac{\text{٧٥,١٩}}{\text{١}} = \frac{\text{ء هـ}}{\text{جا٥٠°}}$

ء هـ = ٧٥,١٩ جا ٥٠ = ٥٧,٦ متر ⇐ ء جـ = ٥٧,٦ + ١,٧ = ٥٩,٣متر ≈ ٥٩م

٣٨.



في المثلث أ ب و

$\frac{\text{٥٠}}{\text{جا ٧٠}} = \frac{\text{أ و}}{\text{جا ٩٠}}$ أ و = $\frac{\text{٥٠جا ٩٠}}{\text{جا ٧٠}}$ = ٥٣,٢١م

في المثلث ء جـ و

$\frac{\text{٢٠}}{\text{جا ٣٠}} = \frac{\text{ء و}}{\text{جا ٩٠}}$ ء و = $\frac{\text{٢٠جا ٩٠}}{\text{جا ٣٠}}$ = ٤٠م

ق(أ و ء) = ١٨٠° − (٧٠° + ٣٠°) = ٨٠°

في المثلث أ ء و

(أ ء)² = (أ و)² + (ء و)² − ٢ × أ و × ء و × جتا(أ و ء)

= (٥٣,٢١)² + (٤٠)² − ٢ × ٥٣,٢١ × ٤٠ × جتا٨٠

(أ ء)² = ٣٦٩٢,١١ ⇐ أ ء = ٦٠,٧٦م

٣٩. حا٣٥° جتا١٠° + جتا ٣٥° جتا ٨٠°

= حا٣٥° جتا١٠° + جتا ٣٥° جا ١٠° = جا (المجموع) = جا٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

٤٠. ظا ٢أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ - ظا² أ}}$ ⇐ $\frac{\text{٤}}{\text{٣}} = \frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ - ظا² أ}}$ ⇐ ٦ ظا أ = ٤ − ٤ ظا² أ

٤ ظا² أ + ٦ ظا أ − ٤ = ٠   ÷ ٢ ⇐ ٢ ظا² أ + ٣ ظا أ − ٢ = ٠

(٢ ظا أ - ١) (ظا أ + ٢) = ٠ ⇐ ظا أ = $\frac{1}{2}$ أ، ظا أ = - ٢

٤١. جتا٢أ = ٢جتا^{٢}أ - ١

$\frac{٧}{٢٥}$ = ٢جتا^{٢}أ - ١ ⟸ $\frac{٧}{٢٥}$ + ١ = ٢جتا^{٢}أ

$\frac{٣٢}{٢٥}$ = ٢ جتا^{٢}أ × $\frac{١}{٢}$ ⟸ $\frac{١٦}{٢٥}$ = جتا^{٢}أ ⟸ جتاأ = ± $\frac{٤}{٥}$

---

٤٢. جتا٢أ = ١ - ٢جا^{٢}أ ⟸ ٢جا^{٢}أ = ١ - جتا٢أ = ١ - $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{١}{٥}$

٢جا^{٢}أ = $\frac{١}{٥}$ .... × $\frac{١}{٢}$ ⟸ جا^{٢}أ = $\frac{١}{١٠}$ ⟸ جاأ = + $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ حيث أ تقع في الربع الثاني

---

٤٣. الطرف الأيمن = (١ + جتا ٢ أ) ظا أ = (١ + ٢ جتا^{٢}أ - ١) ظا أ

= ٢ جتا^{٢}أ × $\frac{جا أ}{جتا أ}$ = ٢ جتا أ جا أ = جا٢أ = الطرف الأيسر

---

٤٤. الأيمن = $\frac{جتا٢جـ}{جا جـ}$ + $\frac{جا٢جـ}{جتا جـ}$ = $\frac{جتا٢جـ جتا جـ + جا٢جـ جا جـ}{جا جـ جتا جـ}$

= $\frac{جتا(٢جـ - جـ)}{جا جـ جتا جـ}$ = $\frac{جتا جـ}{جا جـ جتا جـ}$ = $\frac{١}{جا جـ}$ = قتا جـ = الأيسر

---

٤٥. $\frac{١ - جتا٢جـ + جا٢جـ}{١ + جتا٢جـ + جا٢جـ}$ = $\frac{١ - (١ - ٢جا^٢جـ) + ٢جا جـ جتا جـ}{١ + (٢جتا^٢جـ - ١) + ٢جا جـ جتا جـ}$

= $\frac{٢جا^٢جـ + ٢جا جـ جتا جـ}{٢جتا^٢جـ + ٢جا جـ جتا جـ}$ = $\frac{٢جا جـ (جا جـ + جتا جـ)}{٢جتا جـ (جا جـ + جتا جـ)}$ = ظا جـ

---

٤٦. $\frac{٢جا أ - جا٢أ}{٢ جا^٣أ}$ = $\frac{٢جا أ - ٢جا أ جتا أ}{٢ جا^٣أ}$ = $\frac{٢جا أ(١ - جتا أ)}{٢ جا^٣أ}$ = $\frac{(١ - جتا أ)}{جا^٢أ}$ = $\frac{(١ - جتا أ)}{١ - جتا^٢أ}$

= $\frac{(١ - جتا أ)}{(١ - جتا أ)(١ + جتا أ)}$ = $\frac{١}{١ + جتا أ}$ = $\frac{١}{١ + ٢جتا^٢\frac{أ}{٢} - ١}$ = $\frac{١}{٢جتا^٢\frac{أ}{٢}}$ = $\frac{١}{٢}$ قا^٢ $\frac{أ}{٢}$

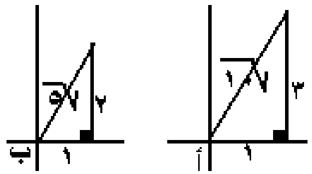
---

٤٧. جا٣س جتا س - جتا٣س جا س = جا (٣س - س) = جا٢س

= ٢ جا س جتا س = ٢ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$

---

٤٨. جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب - جا أ جا ب



= $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ × $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ - $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٥٠}}$ - $\frac{٦}{\sqrt{٥٠}}$ = $\frac{-٥}{\sqrt{٥٠}}$ = $\frac{-٥}{٥\sqrt{٢}}$

أ ، ب ، جـ زوايا مثلث

أ + ب + جـ = ١٨٠° ⟸ أ + ب = ١٨٠ - جـ

جتا(أ + ب) = جتا(١٨٠ - جـ) ⟸ $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = - جتا جـ

جتا جـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنها ق(جـ) = ٤٥°

---

٤٩. الطرف الأيمن = $\frac{٢ جتا٢أ ظاأ}{١ - ظا^٢أ}$ = جتا٢أ × $\frac{٢ظاأ}{١ - ظا^٢أ}$ = جتا ٢ أ × ظا ٢ أ

= جتا ٢ أ × $\frac{جا٢أ}{جتا٢أ}$ = جا ٢ أ = الأيسر

---

٥٠. المطلوب : ٢جتا^٢($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{٣س}{٢}$) = ١ + جا٣س

وهذا لايتحقق إلا إذا كان المطلوب هو : ٢جتا^٢($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{٣س}{٢}$) - ١ = جا٣س

<u>الإثبات :</u>

الأيمن = ٢جتا^٢($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{٣س}{٢}$) - ١ = جتا٢أ = جتا٢($\frac{ط}{٤}$ - $\frac{٣س}{٢}$) = جتا($\frac{ط}{٢}$ - ٣س) = جا٣س

$\therefore$ ٢جتا^{٢}$\left(\frac{ط}{٤} - \frac{٣س}{٢}\right)$ - ١ = جا٣س $\Leftarrow$ ٢جتا^{٢}$\left(\frac{ط}{٤} - \frac{٣س}{٢}\right)$ = ١ + جا٣س

....

٥١. ظا ٢ب = $\frac{٢ظا ب}{١ - ظا^{٢} ب}$ = $\frac{٢ \times \frac{١}{٣}}{١ - \frac{١}{٩}}$ $\times$ $\frac{٩}{٩}$ = $\frac{٦}{٩ - ١}$ = $\frac{٣}{٤}$

ظا أ = $\frac{١}{٣}$ ، ظا ٢ب = $\frac{٣}{٤}$ $\Leftarrow$ ظا (أ+٢ب) = $\frac{ظا أ + ظا٢ب}{١ - ظا أ ظا٢ب}$ = $\frac{\frac{١}{٧} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١}{٧} \times \frac{٣}{٤}}$ = $\frac{(\frac{٢٥}{٢٨})}{(\frac{٢٥}{٢٨})}$ = ١

....

٥٢. $\hat{ب}$ – ٢ $\hat{أ}$ = ١٨٠° $\Leftarrow$ ب = ١٨٠° + ٢أ

ظا ب = ظا(١٨٠° + ٢أ) = + ظا٢أ = $\frac{٢ظا أ}{١ - ظا^{٢} أ}$ = $\frac{٢ \times \frac{١}{٢}}{١ - \frac{١}{٤}}$ = $\frac{١}{\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{٤}{٣}$

....

٥٣. ظا (أ + ب) = $\frac{ظا أ + ظا ب}{١ - ظا أ ظا ب}$ = $\frac{٣ + ٢}{١ - ٣ \times ٢}$ = - ١

مجموع زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠° أ + ب + جـ = ١٨٠°

أ + ب = ١٨٠ – جـ ظا (أ + ب) = ظا (١٨٠ – جـ)

- ١ = - ظا جـ $\Leftarrow$ ظا جـ = ١ $\Leftarrow$ ق(جـ) = ٤٥°

....

٥٤. ٤ جا أ جتا أ = $\sqrt{٣}$ بالقسمة على ٢

٢ جا أ جتا أ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\Leftarrow$ جا٢أ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الأول ٢أ = هـ

الثاني ٢ أ = ١٨٠ – هـ

حيث هـ زاوية حادة موجبة ، جا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\Leftarrow$ هـ = ٦٠

٢أ = ٦٠ ومنها أ = ٣٠ أو ٢أ = ١٢٠ ومنها أ = ٦٠° م . ح = { ٣٠ ، ٦٠ }

....

٥٥. جتا ٢ أ = ٥ جا أ + ٣

١ - ٢جا^{٢}أ = ٥جاأ + ٣ $\Leftarrow$ ٠ = ٢جا^{٢}أ + ٥جاأ + ٢

(جاأ + ٢) (٢جاأ + ١) = ٠

إما جاأ = - ٢ وهذا مرفوض لأن - ١ $\leq$ جاأ $\leq$ ١

وإما جا أ = - $\frac{١}{٢}$ م . ح = {٢١٠ ، ٣٣٠}

....

٥٦. حا أ جتا^{٣} أ – جتا أ حا^{٣} أ = $\frac{١}{٤}$

جاأ جتاأ (جتا^{٢}أ – جا^{٢}أ) = $\frac{١}{٤}$ .... × ٢ $\Leftarrow$ ٢ جاأ جتاأ (جتا^{٢}أ – جا^{٢}أ) = $\frac{١}{٢}$

جا٢أ جتا٢أ = $\frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ $\frac{١}{٢}$جا٤أ = $\frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ جا٤أ = ١

....

٥٧. ظتا١٥° – ظا١٥ = $\frac{جتا١٥}{جا١٥}$ - $\frac{جا١٥}{جتا١٥}$ = $\frac{جتا١٥ جتا١٥ - جا١٥ جا١٥}{جا١٥ جتا١٥}$

= $\frac{جتا٣٠}{\frac{١}{٢} جا٣٠}$ = $\frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}$ = ٢$\sqrt{٣}$

....

٥٨. الأيمن = $\frac{١}{جا٢س}$ + $\frac{جتا٢س}{جا٢س}$ = $\frac{١ + جتا٢س}{جا٢س}$ = $\frac{١ + ٢جتا^{٢}س - ١}{٢ جا س جتا س}$ =

$\frac{٢جتا^{٢}س}{٢ جا س جتا س}$ = $\frac{جتا س}{جا س}$ = ظتا س $\Leftarrow$ ظتا١٥ = قتا٣٠ + ظتا٣٠ = ٢ + $\sqrt{٣}$