بعض قوانين الجبر

التباديل والتوافيق

١. **ملخص قوانين التباديل**

$\boxed{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\times .... \times(\text{ن}-\text{ر}+١)}$ حيث ر عدد العوامل ،

ر ≤ ن يستخدم غالبا إذا كانت ر معلومة

$\boxed{\text{ن}! = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\times .... \times ٣\times ٢\times ١}$

$\boxed{\text{ن}! = \text{ن}(\text{ن}-١)! = \text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)! = ...}$

يستخدم غالبا في اختصار المضروبات

$\boxed{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}}$ يستخدم غالبا عندما ر غير معلومة

$\boxed{١! = ١}$ ، $\boxed{٠! = ١}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} = ١$

ملخص قوانين التوافيق : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!}$

نتيجة١ : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}$ يسمى قانون التبسيط ويستخدم عندما ر > ن

نتيجة٣ : $\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}}$

نتيجة٤ : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}$

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

نظرية : إذا كان س ، أ عددين حقيقيين ، ن ∈ ص$^{+}$ فإن :

$(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢} + ..\ ..... + \text{أ}^{\text{ن}}$

نتيجة : إذا كان س ∈ ح ، ن ∈ ص فإن :

$(١+\text{س})^{\text{ن}} = ١ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + ... + \text{س}^{\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية

$(١-\text{س})^{\text{ن}} = ١ - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + ... + (-\text{س})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية

$(\text{س}+١)^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢} + ... + ١$ حسب قوى س التنازلية

الحد العام في مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$

$(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{أ}^{١}\text{س}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{أ}^{٢}\text{س}^{\text{ن}-٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{أ}^{٣}\text{س}^{\text{ن}-٣} + ... + \text{أ}^{\text{ن}}$

$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{أ}^{\text{ر}}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{الثاني})^{\text{ر}}\,(\text{الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}$

(الحد الأوسط – الحدان الأوسطان) في مفكوك ذات الحدين

أولا : إذا كانت ن زوجية فإن عدد حدود المفكوك (ن + ١) يكون فرديا ويوجد حد أوسط واحد رتبته $\frac{\text{ن}}{٢}+١$

ثانيا : إذا كانت ن فردية فإن عدد حدود المفكوك (ن + ١) يكون زوجيا ويوجد حدان أوسطان رتبتاهما $\frac{\text{ن}+١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن}+٣}{٢}$

النسبة بين كل حد والسابق له في مفكوك $(\text{س}+\text{أ})^{\text{ن}}$

$$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+١}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

الأعداد المركبة

تعريف : مجموعة الأعداد المركبة كـ

كـ = { س + ت ص : س ، ص ∈ ح ، ت^{٢} = -١ }

تساوي عددين مركبين :

$\text{س}_{١} + \text{ت}\,\text{ص}_{١} = \text{س}_{٢} + \text{ت}\,\text{ص}_{٢}$ إذا كان $\text{س}_{١} = \text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{١} = \text{ص}_{٢}$

من هذا التعريف إذا كان س + ت ص = ٠ فإن س = ٠ ، ص = ٠

مجموع عددين مركبين :

$\text{س}_{١} + \text{ت}\,\text{ص}_{١} + \text{س}_{٢} + \text{ت}\,\text{ص}_{٢} = (\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}) + \text{ت}\,(\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢})$

حاصل ضرب عددين مركبين :

إذا كان $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$ فإن

$ع_١ ع_٢ = (س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢) + (س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١) ت$

خصائص جمع وضرب الأعداد المركبة

خاصية المعكوس

المعكوس الجمعي للعدد $ع = س + ت ص$ هو العدد

$(- ع) = - س - ت ص$ **ويكون**

$ع + (- ع) = ٠$ **لكل** $ع \in ك$

تعريف الطرح $ع_١ - ع_٢ = ع_١ + (- ع_٢)$

المعكوس الضربي للعدد $ع = س + ص ت$ هو العدد

$$ع^{-١} = \frac{س}{س^٢ + ص^٢} - \frac{ص}{س^٢ + ص^٢} ت$$

العدد المرافق لعدد مركب

إذا كان $ع = س + ت ص$ فإن العدد المركب $\bar{ع} = س - ت ص$ يسمى مرافق العدد ع

ملحوظة : ع ، $\bar{ع}$ يختلفان في الجزء التخيلي فقط

خواص العددين المترافقين

(١) $ع + \bar{ع} = ٢ س \in ح$

(٢) $ع . \bar{ع} = س^٢ + ص^٢ \in ح$

(٣) $\overline{ع_١ + ع_٢} = \bar{ع}_١ + \bar{ع}_٢$

(٤) $\overline{ع_١ . ع_٢} = \bar{ع}_١ . \bar{ع}_٢$

تذكر $ل^٢ + م^٢ = (ل + م)^٢ - ٢ ل م$

، $(ل - م)^٢ = (ل + م)^٢ - ٤ ل م$

ملحوظة : إذا كانت معاملات حدود معادلة ما أعدادا حقيقية ووجد لها جذر مركب أ + ب ت

(أ ، ب $\in$ ح) فإن مرافقه $\bar{ع} = أ - ب ت$ هو الآخر جذر لهذه المعادلة

المقياس والسعة – الصورة المثلثية للعدد المركب

إذا كان العدد المركب $ع = س + ص ت$

$$| ع | = ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$$

$جتا θ = \frac{س}{ل}$ ، $جا θ = \frac{ص}{ل}$ **وتسمى θ سعة العدد المركب**

وعموما إذا كانت θ سعة عدد مركب فإن كل من الأعداد θ + ٢ م ط ، (م عدد صحيح) يكون أيضا سعة للعدد المركب ، قيمة θ التي تنتمي للفترة [٠ ، ٢ ط [تسمى " السعة الأساسية " للعدد المركب

الصورة المثلثية للعدد المركب $ع = س + ص ت$

$$ع = ل (جتاθ + ت جاθ) \quad \text{حيث} \quad جتاθ = \frac{س}{ل} ، \quad جاθ = \frac{ص}{ل}$$

ملحوظة : $١ = جتا ٠ + ت جا ٠$ ، $-١ = جتا ط + ت جا ط$

$$ت = جتا \frac{ط}{٢} + ت جا \frac{ط}{٢} ، \quad - ت = جتا \frac{٣ط}{٢} + ت جا \frac{٣ط}{٢}$$

مقياس وسعة حاصل ضرب وقسمة عددين مركبين

نفرض أن $ع_١ = ل_١ (جتا θ_١ + ت جا θ_١)$

$ع_٢ = ل_٢ (جتا θ_٢ + ت جا θ_٢)$

$ع_١ ع_٢ = ل_١ ل_٢ [جتا (θ_١ + θ_٢) + ت جا (θ_١ + θ_٢)]$

$ع^ن = ل^ن (جتا ن θ + ت جا ن θ)$

$$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} [جتا (θ_١ - θ_٢) + ت حا (θ_١ - θ_٢)] \quad ، \quad \text{حيث } ع_٢ \neq ٠$$

نتيجة : إذا كان $ع = ل (جتاθ + ت جاθ)$ فإن

$$\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل} [جتا (- θ) + ت جا (- θ)]$$ **أي أن مقياس $\frac{١}{ع}$ هو $\frac{١}{ل}$ وسعته (- θ)**

نظرية ديموافر

نظرية ديموافر (بدون برهان)

$(جتاθ + ت جاθ)^ن = جتا نθ + ت جا نθ$ ، **ن عدد نسبي**

ملحوظة ١ إذا كانت ن عددا صحيحا فإن $جتا نθ + ت جا نθ = (جتاθ + ت جاθ)^ن$

ملحوظة "٢" إذا كان ك عددا موجبا فإن

$$(جتا θ + ت حا θ)^{\frac{١}{ك}} = جتا \frac{θ + ٢ ط ر}{ك} + جا \frac{θ + ٢ ط ر}{ك} ،$$

ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ك – ١ ، θ ∈ [٠ ، ٢ط[أي أن
المقدار جتاθ +ت جاθ يمكن إيجاد له ك من الجذور

الصورة الأسية للعدد المركب

ع = س + ص ت = ل (جتاθ + ت جاθ) = ل هـ$^{\theta ت}$ حيث θ بالقياس الدائري

العمليات على الأعداد المركبة في الصورة الأسية

ل١ هـ$^{\theta_1 ت}$ × ل٢ هـ$^{\theta_2 ت}$ = ل١ ل٢ هـ$^{(\theta_1 + \theta_2) ت}$

$\dfrac{ل_1 هـ^{ت\theta_1}}{ل_2 هـ^{ت\theta_2}} = \dfrac{ل_1}{ل_2}$ هـ$^{(\theta_1 - \theta_2) ت}$ ، $\left(ل هـ^{ت\theta}\right)^{ن} = ل^{ن} هـ^{ت ن \theta}$

$\sqrt[ن]{ل هـ^{ت\theta}} = \sqrt[ن]{ل}$ هـ$^{\frac{\theta + ٢ط ر}{ن} ت}$ ، ر ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، (ن – ١)}

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

أولا : أحد الجذور التكعيبية هو العدد الحقيقي ١ والآخران مركبان ومترافقان والجذور الثلاثة لها نفس المقياس وهو الواحد والسعات الأساسية لها هي ٠° ، ١٢٠° ، ٢٤٠°

ثانيا : نرمز لأحد الجذرين المركبين بالرمز ω والآخر ω^2 حيث مربع أي من الجذرين المركبين = الجذر المركب الآخر

ثالثا : ١ + ω + ω^2 = صفر ⟸ ١ + ω^2 = - ω ، ١+ ω = - ω^2 ، ω + ω^2 = - ١

رابعا : ω^3 = ١ ومنها $\dfrac{١}{\omega} = \omega^2$ ، $\dfrac{١}{\omega^2} = \omega$

القوى الصحيحة للعدد ω

$\omega^1 = \omega$	$\omega^4 = \omega$	$\omega^{3ن} = ١$	$\omega^{4٠} = \omega$ ، ن ∈ ص+
$\omega^2 = \omega^2$	$\omega^5 = \omega^2$	$\omega^{3ن+1} = \omega$	$\omega^{81} = ١$
$\omega^3 = ١$	$\omega^6 = ١$	$\omega^{3ن+2} = \omega^2$	$\omega^{-4} = \dfrac{١}{\omega^4} = \dfrac{١}{\omega} = \omega^2$

مسائل مختارة من امتحانات الثانوية العامة

التباديل والتوافيق

١- أوجد قيمة المجهول في كل معادلة مما يلي :

(أ) $^{١٠}ل_{ر}$ = ٧٢٠ (ب) $^{ن}ل_{٢}$ = ٤٢ (جـ) $^{ن}ق_{٢}$ = ١٥

(ء) $^{ن}ق_{ن-٢}$ = ٢١ (هـ) $\underline{|ن}$ = ٧٢٠ (و) $\dfrac{\underline{|ن-٢}}{\underline{|ن-٤}}$ = ٤٢

(ى) $^{ن}ق_{٨}$ = $^{ن}ق_{١٢}$ (ط) $\dfrac{^{ن}ق_{٥}}{^{ن}ق_{٤}} = \dfrac{٣}{٥}$

٢- مايو٩٨ : إذا كان $^{ن}ل_{ر}$ = ٣٦٠ ، $\underline{|ر}$ = ٢٤ أوجد قيمة $^{ن^2}ق_{ر}$

٣- أغسطس٩٧ : إذا كان $\underline{|ن}$ = ٧٢٠ ، $^{ن+١}ق_{ر}$: $^{ن+١}ق_{ر-١}$ = ٣ : ٥
أوجد قيمة $^{ن+١}ل_{ر-٢}$

٤- دور أول ٢٠٠٥ : إذا كان $^{٦}ل_{ر}$ = ١٢٠ ، $^{ن+١}ق_{ر}$: $^{ن+١}ق_{ر-١}$ = ٣ فأوجد قيمة $\underline{|ن - ٢ر}$

٥- كتاب المدرسة :اثبت أن : $^{ن}ق_{ر}$ + $^{ن}ق_{ر+١}$ = $^{ن+١}ق_{ر+١}$ ومن ثم

(أ) أوجد قيمة $\dfrac{^{١٧}ق_{٦} + {}^{١٧}ق_{٥}}{^{١٨}ق_{٥}}$

(ب) اثبت أن : $^{ن}ق_{ر+١}$ + ٢ $^{ن}ق_{ر}$ + $^{ن}ق_{ر-١}$ = $^{ن+٢}ق_{ر+١}$

٦- دور ثان ٢٠٠٣ : اثبت أن :

$^{ن}ق_{ر}$: $^{ن-١}ق_{ر-١}$ = $\dfrac{ن}{ر}$ ومن ثم أوجد قيمة $\dfrac{^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}}$

نظرية ذات الحدين

٧- أغسطس ٢٠٠٠ : في مفكوك $(س + \frac{٢}{س^{٢}})^{١٢}$ أوجد قيمة

(١) معامل الحد الأوسط (٢) قيمة الحد الخالي من س

٨- يونيو ٢٠٠٠ : في مفكوك $(أ س + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالي من س يساوي معامل الحد السابع فاثبت أن ٦ أ ب = ٥

٩- في مفكوك $(١ + س)^{٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحد الرابع يساوي ٧ أوجد قيمة س . ثم أوجد النسبة بين الحد السادس والحد الأوسط في هذا المفكوك [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٥}$]

١٠- يونيو ٢٠٠١ : في مفكوك $(٤ س^{٢} + \frac{١}{٢ س})^{١٥}$ أوجد :

(١) قيمة الحد الخالي من س (٢) قيمة س التي تجعل الحدين الأوسطين في المفكوك متساويان [$ح_{١١}$ = ٣٠٠٣ ، س = $\frac{١}{٢}$]

١١- دور أول ٢٠٠٥ :

في مفكوك $(\frac{س^{٣}}{٢} - \frac{٤}{س})^{١١}$ حسب قوى س التنازلية أوجد :

أولا : قيمة معامل $س^{٥}$

ثانيا : قيمة س التي تجعل مجموع الحدين الأوسطين مساويا الصفر

١٢- دور أول ٢٠٠٤ :

في مفكوك $(س^{ك} + \frac{١}{س})^{٦}$ حيث ك عدد صحيح موجب أوجد

أولا : قيم ك التي تجعل للمفكوك حدا خاليا من س

ثانيا : النسبة بين الحد الخالي من س ومعامل الحد الأوسط وذلك لأكبر قيم ك التي حصلت عليها في أولا

١٣- دور أول ٢٠٠٣ : في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣ن}$

(أولا) أوجد معامل الحد الذي يحتوي على $س^{٣ن}$ [$^{٣ن}ق_{ن}$]

(ثانيا) إذا كانت ن = ٦ فأوجد النسبة بين معامل الحد الذي يحتوي على $س^{٣ن}$ ومعامل الحد الأوسط [٢١ : ٥٥]

١٤- إذا كان س = ٣ ، ص = ٤ اثبت أن

$$س^{١٩} - ١٩ س^{١٨} ص + \frac{١٩ \times ١٨}{٢ \times ١} س^{١٧} ص^{٢} - \frac{١٩ \times ١٨ \times ١٧}{٣ \times ٢ \times ١} س^{١٦} ص^{٣} + ... - ص^{١٩} = -١$$

١٥- مصر ٨٨ : إذا كان $(٣ س - ١)^{٥} = أ س^{٥} + ب س^{٤} + جـ س^{٣} + ء س^{٢} + هـ س + و$ أوجد قيمة أ + ب + جـ + ء + هـ + و [٣٢]

١٦- مصر ٨٩ : إذا كان $(١ + جـ س)^{ن} = ١ + ٢٠ س + أ_{١} س^{٢} + أ_{٢} س^{٣} + ...$ ، ١٦ $أ_{١}$ = ٣ $أ_{٢}$ أوجد قيمتي ن ، جـ [١٠ ، ٢]

١٧- أوجد معامل $س^{٦}$ في مفكوك $(١ - س)^{٧} (١ + س)^{٧}$ [-٣٥]

١٨- باستخدام مفكوك $(١ + س)^{ن}$ اثبت أن : $^{ن}ق_{٠} + ^{ن}ق_{١} + ^{ن}ق_{٢} + ... + ^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$

١٩- دور ثان ٢٠٠٣ : إذا كانت $(أ - س)^{١٤} = جـ_{٠} + جـ_{١} س + جـ_{٢} س^{٢} + جـ_{٣} س^{٣} + ... + جـ_{١٤} س^{١٤}$ وكان ٤ $جـ_{٤}$ + ١١ ($جـ_{٣}$ + $جـ_{٢}$) = صفر أوجد قيمة أ

الأعداد المركبة

٢٠- مايو٩٩ : إذا كانت $\text{ع}_1 = ٤\left(\text{جتا}\frac{٥\text{ط}}{٦} + \text{ت جا}\frac{٥\text{ط}}{٦}\right)$ ، $\text{ع}_2 = \left(\text{جتا}\frac{\text{ط}}{٢} + \text{ت جا}\frac{\text{ط}}{٢}\right)$ ، $\text{ت}^2 = -١$ ضع العدد $\text{ع}_1\,\text{ع}_2$ على الصورة الجبرية ، وأوجد الجذور التربيعية للعدد $\text{ع}_1\,\text{ع}_2$ في الصورة الأسية

٢١- دور أول٢٠٠٥: إذا كان $\text{ع}_1 = \text{جتا}\frac{٧\text{ط}}{٤} - \text{ت جا}\frac{٧\text{ط}}{٤}$ ، $\text{ع}_2 = -١ + \text{ت}$ فأوجد العدد $\text{ع} = \text{ع}_1^{\,2}\,\text{ع}_2^{\,6}$ على الصورة الأسية حيث $\text{ت}^2 = -١$

٢٢- إذا كان $\text{ع}^3 = \frac{١}{١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}$ أوجد ع على الصورة المثلثية

٢٣- دور أول٢٠٠٣ : إذا كان العدد $\text{ع} = \frac{-١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}{٢}$ حيث $\text{ت}^2 = -١$ ، وكان $\text{ع}_1 = \frac{١ - \text{ع}}{١ + \text{ع}}$ فأوجد العدد ع_1 في الصورة المثلثية ، ثم اوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع_1 في الصورة الأسية

[$\sqrt{٣}\left(\text{جتا}\frac{٣\text{ط}}{٢} + \text{ت جا}\frac{٣\text{ط}}{٢}\right)$ ، $\sqrt[4]{٣}\;\text{هـ}^{\frac{٣\text{ط}}{٤}\text{ت}}$ ، $\sqrt[4]{٣}\;\text{هـ}^{\frac{٧\text{ط}}{٤}\text{ت}}$]

٢٤- دور ثان ٢٠٠٢

بوضع $\text{ى} = \frac{\text{ط}}{٢} - ٢\theta$ أو بأي طريقة أخرى ، حيث $\text{ت}^2 = -١$ اثبت أن

$$\left(\frac{١ + \text{جا ى} + \text{ت جتا ى}}{١ + \text{جا ى} - \text{ت جتا ى}}\right)^{\text{ن}} = \text{جتا ن}\left(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{ى}\right) + \text{ت جا ن}\left(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{ى}\right)$$

٢٥- مصر٨٨ : أوجد قيمتي س ، ص الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة $(١ - \text{ت})\,\text{س} + (١ + \text{ت})\,\text{ص} = ٢\,\text{ت}$ ومن ثم اثبت أن : $(\text{س} + \text{ت ص})^8 = ١٦$ [-١ ، ١]

٢٦- أوجد الجذر التربيعي للعدد المركب ٣ + ٤ ت [± (٢ + ت)]

٢٧- أوجد مجموعة الحل في ك للمعادلة $\text{ع}^2 - ٤\,\text{ع} + ٨ = \text{صفر}$ [٢ ± ٢ت]

٢٨- إذا كان $\text{ع} + ٢ = \text{ت}\,(\text{ع} - ٢)$ حيث $\text{ت}^2 = -١$ ، فأوجد العدد المركب ع على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع في الصورة الأسية

٢٩- أوجد كل من : $|٣ + ٤\,\text{ت}|$ ، $|-٣|$ ، $|٢\,\text{ت}|$ [٥ ، ٣ ، ٢]

٣٠- أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق المعادلة $|٢ + \text{ت ص} + \text{س}| + \text{س} + \text{ت ص} = ٠$ [-١ ، ٠]

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

٣١- أغسطس٢٠٠٠ :

إذا كانت ١ ، ω ، ω^2 هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فاثبت أن :

$$(٢ + ٧\omega + ٢\omega^2)(٢ + ٧\omega^2 + ٢\omega^4) = ٢٥$$

٣٢- مايو٢٠٠١ :

اثبت أن $\left(١ + ٢\omega^5 + \frac{١}{\omega^2}\right)\left(١ + ٢\omega + \frac{١}{\omega^4}\right) = ١$

٣٣- مايو٢٠٠٠ : اثبت أن $\left(١ + \frac{١}{\omega} + \text{ت}\right)\left(١ + \frac{١}{\omega^2} + \text{ت}\right) = \text{ت}$

٣٤- مايو٩٩ : اثبت أن $\left(\frac{٧ + ٤\omega}{٧\omega^2 + ٤} + \frac{٥\omega^2 - ٣}{٥ - ٣\omega}\right)^2 = ١$

٣٥- أغسطس٩٨ : اثبت أن $\frac{٢ + \omega}{٢\omega^2 - \omega} + \frac{٢ + \omega^2}{٢\omega - \omega^2} = \frac{٣}{٧}$

٣٦- أوجد جذري المعادلة :

$\text{س}^2 + (١ + ٢\omega + \omega^2)(١ + \omega + ٢\omega^2) = \text{صفر}$ [± ت]

٣٧- اثبت أن $\left(\frac{\text{س} + \omega^4\,\text{ص}}{\omega^2\,\text{س} + \text{ص}} - \frac{\text{س} + \omega^2\,\text{ص}}{\omega\,\text{س} + \text{ص}}\right)^4 = ٩$

٣٨- دور ثان ٢٠٠٣ : أوجد قيمة $\left(\frac{\omega}{١+٢\omega}\right)^{٢} + \left(\frac{\omega^{٢}}{١+٢\omega}\right)^{٢}$

٣٩- دور ثان٢٠٠٤ : إذا كان $\left(\frac{\omega^{٢}}{(١+٢\omega)^{٢}}\right)^{٤} + \left(\frac{١+٢\omega}{\omega}\right)^{٤} = \text{أ}\,\omega^{٢}$ ،

ω هي أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة أ

٤٠- دور أول ٢٠٠٤ :

إذا كانت ل = أ + ب ، م = أω + ب$\omega^{٢}$ ، ن = أ$\omega^{٢}$ + بω حيث أ ، ب ∋ ح ، ω هي أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فأوجد قيمة المقدار $\frac{\text{ل م ن}}{\text{أ}^{٣} + \text{ب}^{٣}}$

٤١- دور ثان٢٠٠٢ : اثبت أن

$\frac{٢}{٣}$ ت هو أحد الجذرين التربيعيين للمقدار $\frac{١ - ٣\omega - ٣\omega^{٢}}{١ + ١٠\omega + ١٠\omega^{٢}}$

٤٢- دور أول٢٠٠٢ : اثبت أن $\left(\frac{\omega}{١ - \omega} - \omega^{٢}\right)^{٢} = -\frac{٤}{٣}$

٤٣- مصر ٩٠ : أوجد العدد المركب ع الذي يحقق المعادلة ع^{٢} + $\overline{\text{ع}}$ = صفر حيث $\overline{\text{ع}}$ مرافق ع [صفر أ، - ١ أ، $\frac{١}{٢}$ (١ ± $\sqrt{٣}$ ت)]

المحددات

٤٤- بدون فك المحدد اثبت أن :

(١) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ ١ & \text{ب} & \text{جـ أ} \\ ١ & \text{جـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{جـ})(\text{جـ} - \text{أ})$

(٢) $\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & ١+\text{ب}^{٢} & \text{ب جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب جـ} & ١+\text{جـ}^{٢} \end{vmatrix} = ١$

(٣) $\begin{vmatrix} ١ & \text{ب جـ} & \text{جـ أ} + \text{أ ب} \\ ١ & \text{جـ أ} & \text{أ ب} + \text{ب جـ} \\ ١ & \text{أ ب} & \text{ب جـ} + \text{جـ أ} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

(٤) $\begin{vmatrix} \text{س}+\text{ص}+٢ & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & ٢\text{س}+\text{ص}+١ & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س}+٢\text{ص}+١ \end{vmatrix} = ٢(\text{س}+\text{ص}+١)^{٣}$

(٥) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{س} \\ -٢\text{س}+٢\text{س}^{٢} & ١+٢\text{س}^{٢} & ٢\text{س}^{٣} \\ -٣\text{س}+٣\text{س}^{٢} & ٣\text{س}^{٢} & ١+٣\text{س}^{٣} \end{vmatrix} = ١ + ٢\text{س} + ٣\text{س}^{٢}$

٤٥- مايو٢٠٠١ : إذا كان (س – ١) أحد عوامل المحدد

$\begin{vmatrix} \text{س}-١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & \text{س}+١ \\ -١ & ١ & \text{س}+\text{ك} \end{vmatrix}$ أوجد قيمة ك [-١]

٤٦- مصر ٨١ : أوجد قيمة ك بحيث تكون س عاملا للمحدد

$\begin{vmatrix} \text{س}+١ & ٣ & ١ \\ \text{ك} & ٢ & ٣ \\ \text{س} & ٢ & ١ \end{vmatrix}$ [ك = -٤]

٤٧- مصر٨٧ : إذا كانت ω أحد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

اثبت أن $\begin{vmatrix} ١ & ت & \omega^2 \\ \omega ت & -\omega & ٠ \\ \omega^2 ت & -\omega^2 & \omega \end{vmatrix} = ٠$

٤٨- مصر٩٣– مصر٨٤ : باستخدام خواص المحددات

اثبت أن : $\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ أ & ب & س \end{vmatrix} = (س - أ)(س - ب)(س + أ + ب)$

٤٩- مايو٩٦ : بدون فك المحدد أوجد مجموعة حل المعادلة

$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & س^2 - ٢ & ٤ \end{vmatrix} =$ صفر {٠ ، ٣ ، -٣}

٥٠- دور أول ٢٠٠٣ إذا كان $\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ك & ط & هـ \end{vmatrix} = ٢$ فأوجد قيمة

$\begin{vmatrix} ٢س & ٢ص & ٢ع \\ ٥ل + س & ٥م + ص & ٥ن + ع \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$ [١٤٠]

٥١- دور أول ٢٠٠٢ بدون فك المحدد اثبت أن

$\begin{vmatrix} أ - أب & ١ & ب - ٣ \\ أب - أجـ & ب & جـ - ٣ب \\ أجـ - أ & جـ & ١ - ٣جـ \end{vmatrix} =$ صفر

٥٢- مايو٩٩ : باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات التالية :

س + ص = ٥ ، ٢س + ٥ص – ٤ع = ٣ ، ٢س + ٤ص – ٥ع = -٤ [(٢ ، ٣ ، ٤)]

مسائل مطلوب حلها

دور أول ٢٠١١

(١) إذا كان $^{س + ص}ل_٤ = ٣٦٠$ ، $\underline{|س + ص} = ٥٠٤٠$

فأوجد قيمة $^{ص}ق_{٢س}$

(٢) أوجد القيمة العددية للمقدار : $\left(\frac{١}{\omega^2(\omega + ٣)} - \frac{١}{١ + ٣\omega^4} \right)^2$

(٣) إذا كانت الحدود الثاني والثالث والرابع من مفكوك $(س + ص)^ن$ حسب قوى س التنازلية هى على الترتيب ٢٤٠ ، ٧٢٠ ، ١٠٨٠ فما قيمة كل من س ، ص ، ن ؟

(٤) بدون فك المحددات اثبت أن :

$\begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ص & س & ٠ \\ ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \end{vmatrix}$

حلول جبر ٣ث

١. (أ) $^{10}ل_ر = ٧٢٠ = ١٠ × ٩ × ٨$

$^{10}ل_ر = {}^{10}ل_٣ \Leftarrow ر = ٣$

(ب) $^نل_٢ = ٤٢ = ٧ × ٦$

$^نل_٢ = {}^٧ل_٢ \Leftarrow ن = ٧$

(جـ) $^نق_٢ = ١٥ \quad \frac{^نل_٢}{|٢} = ١٥$

$^نل_٢ = ٣٠ = ٦ × ٥$

$^نل_٢ = {}^٦ل_٢ \Leftarrow ن = ٦$

حل آخر $^نق_٢ = ١٥ \Leftarrow \frac{ن(ن-١)}{٢×١} = ١٥$

$ن(ن-١) = ٣٠ = ٦×٥ \Leftarrow ن = ٦$

(ء) $^نق_{ن-٢} = ٢١$

$^نق_٢ = ٢١ \Leftarrow \frac{ن(ن-١)}{٢×١} = ٢١$

$ن(ن-١) = ٤٢$ ومنها $ن(ن-١) = ٧ × ٦ \Leftarrow ن = ٧$

(هـ) $|ن = ٧٢٠$

$|ن = |٦ \Leftarrow ن = ٦$

(و) $\frac{|ن-٢}{|ن-٤} = ٤٢$

$\frac{(ن-٢)(ن-٣)|ن-٤}{|ن-٤} = ٤٢$

$(ن-٢)(ن-٣) = ٧ × ٦ \Leftarrow ن-٢ = ٧$

$\Leftarrow ن = ٩$

(ى) $^نق_٨ = {}^نق_{١٢} \Leftarrow ن = ٨ + ١٢ = ٢٠$

(ط) $\frac{^نق_٥}{^نق_٤} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{ن-٥+١}{٥} = \frac{٣}{٥} \Leftarrow ن = ٧$

---

٢. $|ر = ٢٤ \Leftarrow |ر = |٤ \Leftarrow ر = ٤$

$^نل_٤ = ٣٦٠ = {}^٦ل_٤$

$ن = ٦ \Leftarrow {}^{٢ن}ق_ر = {}^{١٢}ق_٤ = ٤٩٥$

٣. $|ن = ٧٢٠ \Leftarrow |ن = |٦ \Leftarrow ن = ٦$

$^{ن+١}ق_ر : {}^{ن+١}ق_{ر-١} = ٣ : ٥$

$\frac{^{(ن+١)}ق_ر}{^{(ن+١)}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{(ن+١)-ر+١}{ر} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{(٦+١)-ر+١}{ر} = \frac{٣}{٥} \Leftarrow \frac{٨-ر}{ر} = \frac{٣}{٥}$

$٣ر = ٤٠ - ٥ر \quad ر = ٥$

$^{ن+١}ل_{ر-٢} = {}^٧ل_٣ = ٢١٠$

---

٤. $^٦ل_ر = ١٢٠ \Leftarrow {}^٦ل_ر = {}^٦ل_٣ \Leftarrow ر = ٣$

$\frac{^{(ن+١)}ق_ر}{^{(ن+١)}ق_{ر-١}} = ٣$

$\frac{(ن+١)-٣+١}{٣} = ٣ \Leftarrow \frac{(ن-١)}{٣} = ٣$

$ن-١ = ٩ \Leftarrow ن = ١٠$

$|ن-٢ر = |٤ = ٢٤$

---

٥. الطرف الأيسر $= {}^{ن+١}ق_{ر+١}$

الطرف الأيسر $= \frac{|ن+١}{|ر+١ \; |ن-ر}$ .... (١)

الأيمن $= {}^نق_ر + {}^نق_{ر+١}$

$= \frac{|ن}{|ر\;|ن-ر} + \frac{|ن}{|ر+١\;|ن-ر-١}$

$= \frac{(ر+١)|ن + (ن-ر)|ن}{|ر+١\;|ن-ر}$

$= \frac{(ر+١+ن-ر)|ن}{|ر+١\;|ن-ر} = \frac{(ن+١)|ن}{|ر+١\;|ن-ر}$

الأيمن $= \frac{|ن+١}{|ر+١\;|ن-ر}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$^نق_ر + {}^نق_{ر+١} = {}^{ن+١}ق_{ر+١}$

(أ) $\frac{^{١٧}ق_٦ + {}^{١٧}ق_٥}{^{١٨}ق_٥} = \frac{^{١٨}ق_٦}{^{١٨}ق_٥}$

$= \frac{١٨-٦+١}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

(ب) الأيمن $= {}^نق_{ر+١} + ٢\,{}^نق_ر + {}^نق_{ر-١}$

$= ({}^نق_{ر+١} + {}^نق_ر) + ({}^نق_ر + {}^نق_{ر-١})$

$= {}^{ن+١}ق_{ر+١} + {}^{ن+١}ق_ر = {}^{ن+٢}ق_{ر+١}$

---

٦. $^نق_ر : {}^{ن-١}ق_{ر-١} =$

$= \frac{|ن}{|ر\;|ن-ر} \div \frac{|ن-١}{|ر-١\;|ن-ر}$

$= \frac{|ن}{|ر\;|ن-ر} \times \frac{|ر-١\;|ن-ر}{|ن-١}$

$= \frac{ن|ن-١}{ر|ر-١\;|ن-ر} \times \frac{|ر-١\;|ن-ر}{|ن-١}$

$\frac{^نق_ر}{^{ن-١}ق_{ر-١}} = \frac{ن}{ر}$

$$\frac{{}^{٢٥}ق_{٤} + {}^{٢٤}ق_{٣}}{{}^{٢٤}ق_{٣} + {}^{٢٣}ق_{٢}} = \frac{\frac{{}^{٢٥}ق_{٤}}{{}^{٢٤}ق_{٣}} + ١}{١ + \frac{{}^{٢٣}ق_{٢}}{{}^{٢٤}ق_{٣}}}$$

$$= \frac{\frac{٢٥}{٤} + ١}{١ + \frac{٣}{٢٤}} = \frac{\frac{٢٩}{٤}}{\frac{٢٧}{٢٤}} = \frac{٥٨}{٩}$$

---

٧. $\left(س + \frac{٢}{س^{٢}}\right)^{١٢}$

(١) رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٢}{٢} + ١ = ٧$

$ح_{٧} = {}^{ن}ق_{٦}$ (الثاني)^{٦} (الأول)$^{ن-٦}$

$= {}^{١٢}ق_{٦} \left(\frac{٢}{س^{٢}}\right)^{٦} (س)^{ن-٦}$

$= {}^{١٢}ق_{٦} (٢)^{٦} (س)^{-٦}$

معامل الحد الأوسط $= {}^{١٢}ق_{٦} (٢)^{٦} = ٥٩١٣٦$

(٢) نفرض أن $ح_{ر+١}$ هو الحد الخالي من س

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (الثاني)^{ر} (الأول)$^{ن-ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر} \left(\frac{٢}{س^{٢}}\right)^{ر} (س)^{١٢-ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر} (٢)^{ر} \times س^{-٢ر} \times س^{١٢-ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر} (٢)^{ر} \times س^{١٢-٣ر}$

$١٢ - ٣ر = ٠ \Leftarrow ر = ٤$

$ح_{٥}$ هوالحد الخالي من س

$ح_{٥} = {}^{١٢}ق_{٤} (٢)^{٤} = ٧٩٢٠$

---

٨. $\left(أس + \frac{١}{ب س}\right)^{١٠}$

نفرض أن $ح_{ر+١}$ هو الحد الخالي من س

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (الثاني)^{ر} (الأول)$^{ن-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} \left(\frac{١}{ب س}\right)^{ر} (أ س)^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} \times \frac{١}{ب^{ر} س^{ر}} \times (أ)^{١٠-ر} \times س^{١٠-ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} \times \frac{أ^{١٠-ر}}{ب^{ر}} \times س^{١٠-٢ر}$

$١٠ - ٢ر = ٠ \Leftarrow ر = ٥$

$ح_{٦}$ هوالحد الخالي من س

$ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} \times \frac{أ^{٥}}{ب^{٥}}$

معامل $ح_{٧} = {}^{١٠}ق_{٦} \times \frac{أ^{٤}}{ب^{٦}}$

الحد الأوسط = معامل $ح_{٧}$

${}^{١٠}ق_{٥} \times \frac{أ^{٥}}{ب^{٥}} = {}^{١٠}ق_{٦} \times \frac{أ^{٤}}{ب^{٦}} \quad .... \times \frac{ب^{٦}}{أ^{٤}}$

${}^{١٠}ق_{٥}\ أب = {}^{١٠}ق_{٦} \Leftarrow أب = \frac{{}^{١٠}ق_{٦}}{{}^{١٠}ق_{٥}}$

$أب = \frac{٥}{٦} \Leftarrow ٦أب = ٥$

---

٩. $(١ + س)^{٨} = ١ + {}^{٨}ق_{١}س + {}^{٨}ق_{٢} س^{٢} + ... + س^{٨}$

$ح_{٤} = ٧ \Leftarrow {}^{ن}ق_{٣} س^{٣} = ٧$

${}^{٨}ق_{٣} س^{٣} = ٧ \Leftarrow ٥٦ س^{٣} = ٧$

$س^{٣} = \frac{١}{٨} \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٨}{٢} + ١ = ٥$

$\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}} = \frac{٨ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{س}{١} =$

$\frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٥}$

---

١٠. $\left(٤س^{٢} + \frac{١}{٢س}\right)^{١٥}$

(١) نفرض أن $ح_{ر+١}$ هو الحد الخالي من س

$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر}$ (الثاني)^{ر} (الأول)$^{ن-ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} \left(\frac{١}{٢ س}\right)^{ر} (٤س^{٢})^{١٥-ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} \frac{١}{٢^{ر} س^{ر}} (٤)^{١٥-ر} \times س^{٣٠-٢ر}$

$= {}^{١٥}ق_{ر} (٢)^{٣٠-٣ر} \times س^{٣٠-٣ر}$

$٣٠ - ٣ر = ٠ \Leftarrow ر = ١٠$

$ح_{١١}$ هوالحد الخالي من س

$ح_{١١} = {}^{١٥}ق_{١٠} = ٣٠٠٣$

(٢) رتبة أول حد أوسط $= \frac{١٥ + ١}{٢} = ٨$

$ح_{٨}$ ، $ح_{٩}$ هما الحدان الأوسطان

$ح_{٨} = ح_{٩}$

$\frac{ح_{٩}}{ح_{٨}} = ١ \Leftarrow \frac{ن - ٨ + ١}{٨} \times \frac{\text{الثاني}}{\text{الأول}} = ١$

$$\frac{١٥ - ٨ + ١}{٨} \times \frac{\left(\frac{١}{٢س}\right)}{٤ س^{٢}} = ١$$

$$\frac{١}{٨ س^{٣}} = ١ \quad \Leftarrow \quad س = \frac{١}{٢}$$

---

١١. $\left(\frac{س^{٣}}{٢} - \frac{٤}{س}\right)^{١١}$

(١) نفرض أن $ح_{ر+١}$ هوالحدالمشتمل على $س^{٥}$

$$ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} (\text{الثاني})^{ر} (\text{الأول})^{ن-ر}$$

$$= {}^{١١}ق_{ر} \left(\frac{-٤}{س}\right)^{ر} \left(\frac{س^{٣}}{٢}\right)^{١١-ر}$$

$$= {}^{١١}ق_{ر} \times \frac{(-٤)^{ر}}{س^{ر}} \times \frac{س^{٣٣-٣ر}}{٢^{١١-ر}}$$

$$= {}^{١١}ق_{ر} \times \frac{(-٤)^{ر}}{٢^{١١-ر}} \times س^{٣٣-٤ر}$$

$$٣٣ - ٤ر = ٥ \quad \Leftarrow \quad ر = ٧$$

$ح_{٨}$ هوالحد المشتمل على $س^{٥}$

$$ح_{٨} = {}^{١١}ق_{٧} \times \frac{(-٤)^{٧}}{٢^{٤}} \times س^{٥}$$

$$\text{معامل } س^{٥} = {}^{١١}ق_{٧} \times \frac{(-٤)^{٧}}{٢^{٤}} = -٣٣٧٩٢٠$$

ثانيا: رتبة أول حد أوسط $= \frac{١١+١}{٢} = ٦$

$ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$ هما الحدان الأوسطان

$$ح_{٦} + ح_{٧} = ٠ \quad \frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = -١$$

$$\frac{١١ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{\left(\frac{-٤}{س}\right)}{\frac{س^{٣}}{٢}} = -١$$

$$\frac{-٨}{س^{٤}} = -١ \quad \Leftarrow \quad س^{٤} = ٨$$

$$س = \pm \sqrt[٤]{٨}$$

---

١٢. في مفكوك $\left(س^{ك} + \frac{١}{س}\right)^{٦}$

(١) نفرض أن $ح_{ر+١}$ هو الحد الخالي من س

$$ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} (\text{الثاني})^{ر} (\text{الأول})^{٦-ر}$$

$$= {}^{٦}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{ك})^{٦-ر}$$

$$= {}^{٦}ق_{ر} س^{-ر} \times س^{٦ك-ك ر}$$

$$= {}^{٦}ق_{ر} س^{-ر+٦ك-ك ر}$$

$$-ر + ٦ك - ك ر = ٠$$

$$(٦ - ر) ك = ر$$

$$ك = \frac{ر}{٦ - ر}$$

$ر \le ٦ - ر$ ، $٦ - ر > ٠$

$٢ر \le ٦$ ، $٦ > ر$

$ر \le ٣$ ، $٦ > ر$

$٦ > ر \le ٣ \quad \Leftarrow \quad ر \in [٣ ، ٦[$

ر = ٣ ، ك = ١

ر = ٤ ، ك = ٢

ر = ٥ ، ك = ٥

ثانيا: ر = ٥ ، ك = ٥

الحد الخالي من س هو $ح_{٦} = {}^{٦}ق_{٥}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{٦}{٢} + ١ = ٤$

$$ح_{٤} = {}^{٦}ق_{٣} \left(\frac{١}{س}\right)^{٣} (س^{٥})^{٦-٣}$$

$$= {}^{٦}ق_{٣} س^{-٣} س^{١٥} = {}^{٦}ق_{٣} س^{١٢}$$

معامل $ح_{٤}$ هو ${}^{٦}ق_{٣}$

$$\frac{ح_{٦}}{\text{معامل } ح_{٤}} = \frac{{}^{٦}ق_{٥}}{{}^{٦}ق_{٣}} = \frac{٣}{١٠}$$

---

١٣. $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٣ن}$

(١) نفرض $ح_{ر+١}$ هوالحدالمشتمل على $س^{٣ن}$

$$ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} (\text{الثاني})^{ر} (\text{الأول})^{٣ن-ر}$$

$$= {}^{٣ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} (س^{٢})^{٣ن-ر}$$

$$= {}^{٣ن}ق_{ر} (س)^{-ر} (س)^{٦ن-٢ر}$$

$$= {}^{٣ن}ق_{ر} س^{٦ن-٣ر}$$

$٦ن - ٣ر = ٣ن$ ، $ر = ن$

$ح_{ن+١}$ هوالحد المشتمل على $س^{٣ن}$

$$ح_{ن+١} = {}^{٣ن}ق_{ن} \times س^{٣ن}$$

معامل الحد المشتمل على $س^{٣ن}$ هو ${}^{٣ن}ق_{ن}$

(٢) إذا كانت ن = ٦ يصبح المفكوك هو

$$\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{١٨}$$

معامل الحد المشتمل على $س^{٣ن}$ هو ${}^{١٨}ق_{٦}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{١٨}{٢} + ١ = ١٠$

$ح_{١٠}$ هو الحد الأوسط

$$ح_{١٠} = {}^{١٨}ق_{٩} \left(\frac{١}{س}\right)^{٩} (س^{٢})^{٩}$$

$$= {}^{١٨}ق_{٩} س^{٩}$$

معامل الحد الأوسط $= {}^{١٨}ق_{٩}$

$\frac{\text{معامل الحد المشتمل على } س^{ن}}{\text{معامل الحد الأوسط}} = \frac{{}^{١٨}ق_٦}{{}^{١٨}ق_٩} = \frac{٢١}{٥٥}$

١٤. $س^{١٩} - ١٩ س^{١٨} ص + \frac{١٩\times١٨}{٢\times١} س^{١٧} ص^٢ - \frac{١٩\times١٨\times١٧}{٣\times٢\times١} س^{١٦} ص^٣ + ... - ص^{١٩}$

$= س^{١٩} - {}^{١٩}ق_١ س^{١٨} ص + {}^{١٩}ق_٢ س^{١٧} ص^٢ - {}^{١٩}ق_٣ س^{١٦} ص^٣ + ... - ص^{١٩}$

$= (س - ص)^{١٩} = (٣ - ٤)^{١٩} = -١$

١٥. $(٣س - ١)^٥$

$= أ س^٥ + ب س^٤ + جـ س^٣ + ء س^٢ + هـ س + و$

بوضع س = ١ في الطرفين ينتج أن

$٢^٥ = أ + ب + جـ + ء + هـ + و = ٣٢$

١٦. $(١ + جـ س)^ن$

$= ١ + ٢٠ س + أ_١ س^٢ + أ_٢ س^٣ + ...(١)$

، $(١ + جـ س)^ن = ١ + {}^نق_١ جـ س + {}^نق_٢ جـ^٢ س^٢ + {}^نق_٣ جـ^٣ س^٣ + ...(٢)$

بمقارنة معاملات س في (١) ، (٢)

${}^نق_١ جـ = ٢٠$ ن جـ = ٢٠ .... (٣)

$أ_١ = {}^نق_٢ جـ^٢$ ، $أ_٢ = {}^نق_٣ جـ^٣$

لكن $١٦ أ_١ = ٣ أ_٢$ معطى $\frac{أ_٢}{أ_١} = \frac{١٦}{٣}$

$\frac{{}^نق_٣ جـ^٣}{{}^نق_٢ جـ^٢} = \frac{١٦}{٣}$ ومنها $\frac{ن - ٣ + ١}{٣} جـ = \frac{١٦}{٣}$

$(ن - ٢) جـ = ١٦$

ن جـ - ٢ جـ = ١٦ .... (٤)

بالتعويض من (٣) في (٤)

٢٠ - ٢ جـ = ١٦ ⟸ جـ = ٢

بالتعويض في (٣)

٢ن = ٢٠ ⟸ ن = ١٠

١٧. $(١-س)^٧(١+س)^٧ = (١-س^٢)^٧$

والمطلوب معامل $س^٦$

نفرض أن $ح_{ر+١}$ هو الحد المشتمل على $س^٦$

$ح_{ر+١} = {}^نق_ر (\text{الثاني})^ر (\text{الأول})^{ن-ر}$

$= {}^٧ق_ر (-س^٢)^ر = {}^٧ق_ر (-١)^ر س^{٢ر}$

٢ر = ٦ ⟸ ر = ٣

$ح_٤ = {}^٧ق_٣ (-١)^٣ س^٦$

معامل $ح_٤ = {}^٧ق_٣ (-١)^٣ = -٣٥$

١٨. $(١ + س)^ن =$

$= ١ + {}^نق_١ س + {}^نق_٢ س^٢ + ... + س^ن$

$(١ + س)^ن$

$= {}^نق_. + {}^نق_١ س + {}^نق_٢ س^٢ + ... + {}^نق_ن س^ن$

نضع س = ١ في الطرفين

$٢^ن = {}^نق_. + {}^نق_١ + {}^نق_٢ + ... + {}^نق_ن$

١٩. $(أ-س)^{١٤} = جـ_. + جـ_١ س + جـ_٢ س^٢ + جـ_٣ س^٣ + ...+ جـ_{١٤} س^{١٤}$

$(أ-س)^{١٤} = أ^{١٤} - {}^{١٤}ق_١ س أ^{١٣} + {}^{١٤}ق_٢ س^٢ أ^{١٢} - {}^{١٤}ق_٣ س^٣ أ^{١١} + {}^{١٤}ق_٤ س^٤ أ^{١٠} + ...$ بالمقارنة

$جـ_٢ = {}^{١٤}ق_٢ أ^{١٢}$

$جـ_٣ = -{}^{١٤}ق_٣ أ^{١١}$

$جـ_٤ = {}^{١٤}ق_٤ أ^{١٠}$

$٤ جـ_٤ + ١١ (جـ_٣ + جـ_٢) = $ صفر

$٤ \times {}^{١٤}ق_٤ أ^{١٠} + ١١(-{}^{١٤}ق_٣ أ^{١١} + {}^{١٤}ق_٢ أ^{١٢}) =$ صفر

بالقسمة على $أ^{١٠}$

$٤ \times {}^{١٤}ق_٤ - ١١ \times {}^{١٤}ق_٣ أ + ١١ \times {}^{١٤}ق_٢ أ^٢ = ٠$

بالقسمة على ${}^{١٤}ق_٣$

$٤ \times \frac{{}^{١٤}ق_٤}{{}^{١٤}ق_٣} - ١١ أ + ١١ \frac{{}^{١٤}ق_٢}{{}^{١٤}ق_٣} أ^٢ = ٠$

$٤ \times \frac{١١}{٤} - ١١ أ + ١١ \times \frac{١}{٤} أ^٢ = ٠ \quad .... \times \frac{٤}{١١}$

$أ^٢ - ٤ أ + ٤ = ٠$

$(أ - ٢)^٢ = ٠$ أ = ٢

٢٠. $ع_١ = ٤(جتا \frac{٥ط}{٦} + ت جا \frac{٥ط}{٦})$ ،

$ع_٢ = (جتا \frac{ط}{٢} + ت جا \frac{ط}{٢})$ ، $ت^٢ = -١$

$ع_١ ع_٢ = ٤(جتا \frac{٥ط}{٦} + ت جا \frac{٥ط}{٦}) \times (جتا \frac{ط}{٢} + ت جا \frac{ط}{٢})$

$= ٤(جتا \frac{٤ط}{٣} + ت جا \frac{٤ط}{٣})$

$= ٤(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت) = -٢ - ٢\sqrt{٣} ت$

$ع_١ ع_٢ = ل هـ^{\theta ت}$ ، $\theta = ٢٤٠° = \frac{٤ط}{٣}$

$ع_١ ع_٢ = ٤ هـ^{\frac{٤}{٣}ط ت}$

$\sqrt{ع_١ ع_٢} = \left(٤ هـ^{\frac{٤}{٣}ط ت}\right)^{\frac{١}{٢}}$

$\sqrt{ع_١ ع_٢} = ٢\, هـ^{\frac{θ + ٢ط ر}{٢} ت}$

$\sqrt{ع_١ ع_٢} = ٢\, هـ^{\frac{\frac{٤}{٣}ط + ٢ط ر}{٢} ت}$

$\sqrt{ع_١ ع_٢} = ٢\, هـ^{\frac{٤ط + ٦ط ر}{٦} ت}$ ، ر = ٠ ، ١

ر = ٠ $\Longleftarrow \sqrt{ع_١ ع_٢} = ٢\, هـ^{\frac{٢ط}{٣} ت}$

ر = ١ $\Longleftarrow \sqrt{ع_١ ع_٢} = ٢\, هـ^{\frac{٥ط}{٣} ت}$

٢١. $ع_١ = جتا \frac{٧ط}{٤} - ت\, جا \frac{٧ط}{٤}$ ،

جتا$θ$ موجبة ، جا$θ$ سالبة في الربع الرابع

$θ = ٢ط - هـ = ٢ط - \frac{٧ط}{٤} = \frac{ط}{٤}$

$ع_١ = ل\, هـ^{\frac{ط}{٤} ت} \Longleftarrow ع_١ = هـ^{\frac{ط}{٤} ت}$ .... (١)

$ع_٢ = -١ + ت$

$ل = \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٢}$

جتا$θ = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا$θ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$θ$ في الربع الثاني $θ = ١٨٠ - ٤٥$

$θ = ١٣٥° = \frac{٣ط}{٤}$

$ع_٢ = ل\, هـ^{θ ت}$ ومنها $ع_٢ = \sqrt{٢}\, هـ^{\frac{٣ط}{٤} ت}$ ..... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

$ع = (ع_١)^٢ (ع_٢)^٦$

$ع = (هـ^{\frac{ط}{٤} ت})^٢ (\sqrt{٢}\, هـ^{\frac{٣ط}{٤} ت})^٦$

$ع = هـ^{\frac{ط}{٢} ت} \times ٨\, هـ^{\frac{٩ط}{٢} ت}$

$ع = ٨\, هـ^{٥ط ت} \Longleftarrow ع = ٨\, هـ^{ط ت}$

---

٢٢. $ع^٣ = \frac{١}{١ + \sqrt{٣} ت} \times \frac{١ - \sqrt{٣} ت}{١ - \sqrt{٣} ت}$

$= \frac{١ - \sqrt{٣} ت}{١ - ٣ ت^٢} = \frac{١ - \sqrt{٣} ت}{٤}$

$ع^٣ = \frac{١}{٤} - \frac{\sqrt{٣}}{٤} ت = ل(جتاθ + ت\, جاθ)$

$ل = \sqrt{\frac{١}{١٦} + \frac{٣}{١٦}} = \frac{١}{٢}$

جتا$θ = \frac{س}{ل} = \frac{١}{٢}$ ، جا$θ = \frac{ص}{ل} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

حيث $θ$ في الربع الرابع

$θ = ٣٦٠ - ٦٠ = ٣٠٠°$ ، $θ = \frac{٥}{٣} ط$

$ع^٣ = ل\,(جتاθ + ت\, جاθ)$

$ع^٣ = \frac{١}{٢} (جتا \frac{٥}{٣}ط + ت\, جا \frac{٥}{٣}ط)$

$ع = \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}} \left(جتا \frac{٥}{٣}ط + ت\, جا \frac{٥}{٣}ط\right)^{\frac{١}{٣}}$

$= \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}} \left(جتا \frac{\frac{٥}{٣}ط + ٢ط ر}{٣} + ت\, جا \frac{\frac{٥}{٣}ط + ٢ط ر}{٣}\right)$

ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

$ع = \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}} \left(جتا \frac{٥ط + ٦ط ر}{٩} + ت\, جا \frac{٥ط + ٦ط ر}{٩}\right)$

ر = ٠ $ع = \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}} \left(جتا \frac{٥ط}{٩} + ت\, جا \frac{٥ط}{٩}\right)$

ر = ١ $ع = \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}} \left(جتا \frac{١١ط}{٩} + ت\, جا \frac{١١ط}{٩}\right)$

ر = ٢ $ع = \frac{١}{\sqrt[٣]{٢}} \left(جتا \frac{١٧ط}{٩} + ت\, جا \frac{١٧ط}{٩}\right)$

---

٢٣. $ع = \frac{-١ + \sqrt{٣} ت}{٢}$

$ع_١ = \frac{١ - ع}{١ + ع} = \frac{١ - (\frac{-١ + \sqrt{٣} ت}{٢})}{١ + (\frac{-١ + \sqrt{٣} ت}{٢})} \times \frac{٢}{٢}$

$= \frac{٢ + ١ - \sqrt{٣} ت}{٢ - ١ + \sqrt{٣} ت} = \frac{٣ - \sqrt{٣} ت}{١ + \sqrt{٣} ت} \times \frac{١ - \sqrt{٣} ت}{١ - \sqrt{٣} ت}$

$= \frac{٣ - ٤\sqrt{٣} ت + ٣ ت^٢}{١ - ٣ ت^٢}$

$ع_١ = \frac{-٤\sqrt{٣} ت}{٤} = -\sqrt{٣} ت = \sqrt{٣} \times -ت$

$= \sqrt{٣} \left(جتا \frac{٣ط}{٢} + ت\, جا \frac{٣ط}{٢}\right)$

$= \sqrt{٣}\, هـ^{θ ت} = \sqrt{٣}\, هـ^{\frac{٣ط}{٢} ت}$

$\sqrt{ع_١} = \sqrt{\sqrt{٣}}\, هـ^{\frac{\frac{٣ط}{٢} + ٢ط ر}{٢} ت}$ ، ر = ٠ ، ١

$\sqrt{ع_١} = \sqrt[٤]{٣}\, هـ^{\frac{٣ط + ٤ط ر}{٤} ت}$

ر = ٠ ⟸ $\sqrt{ع_1} = \sqrt[4]{3}\ هـ^{\frac{3ط}{4}ت}$

ر = ١ ⟸ $\sqrt{ع_1} = \sqrt[4]{3}\ هـ^{\frac{7ط}{4}ت}$

---

٢٤. $\left(\dfrac{١ + جا ى + ت جتا ى}{١ + جا ى - ت جتا ى}\right)^{ن}$

$= \left(\dfrac{١ + جا\left(\frac{ط}{٢} - ٢\theta\right) + ت\ جتا\left(\frac{ط}{٢} - ٢\theta\right)}{١ + جا\left(\frac{ط}{٢} - ٢\theta\right) - ت\ جتا\left(\frac{ط}{٢} - ٢\theta\right)}\right)^{ن}$

$= \left(\dfrac{١ + جتا ٢\theta + ت\ جا ٢\theta}{١ + جتا ٢\theta - ت\ جا ٢\theta}\right)^{ن}$

$= \left(\dfrac{١ + ٢\ جتا^{٢}\theta - ١ + ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}{١ + ٢\ جتا^{٢}\theta - ١ - ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}\right)^{ن}$

$= \left(\dfrac{٢\ جتا^{٢}\theta + ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}{٢\ جتا^{٢}\theta - ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}\right)^{ن}$

$= \left(\dfrac{٢\ جتا^{٢}\theta + ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}{٢\ جتا^{٢}\theta - ٢\ جا\theta\ جتا\theta\ ت}\right)^{ن}$

بالقسمة على ٢جتاθ بسطا ومقاما

المقدار = $\left(\dfrac{جتا\theta + ت\ جا\theta}{جتا\theta - ت\ جا\theta}\right)^{ن}$

$= \left(\dfrac{جتا\theta + ت\ جا\theta}{جتا(-\theta) + ت\ جا(-\theta)}\right)^{ن}$

$= (جتا ٢\theta + ت\ جا ٢\theta)^{ن}$

ى = $\frac{ط}{٢} - ٢\theta$ ⟸ $٢\theta = \frac{ط}{٢} -$ ى

المقدار = $\left[جتا\left(\frac{ط}{٢} - ى\right) + ت\ جا\left(\frac{ط}{٢} - ى\right)\right]^{ن}$

$= \left(جتا\ ن\left(\frac{ط}{٢} - ى\right) + ت\ جا\ ن\left(\frac{ط}{٢} - ى\right)\right)$

---

٢٥. (١ - ت) س + (١ + ت) ص = ٢ت

(س + ص) + (- س + ص) ت = ٢ت

س + ص = ٠ .... (١)

- س + ص = ٢ .... (٢)

بجمع (١) ، (٢)

٢ ص = ٢ ⟸ ص = ١

بالتعويض في (١)

س + ١ = ٠ ⟸ س = - ١

س + ت ص = - ١ + ت

= ل (جتا θ + ت جا θ)

ل = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{٢}$

جتا هـ = $\frac{س}{ل} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{ص}{ل} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

هـ تقع في الربع الثاني

هـ = ١٨٠ - ٤٥ = ١٣٥° = $\frac{٣ط}{٤}$

س + ت ص = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣ط}{٤}$ + ت جا $\frac{٣ط}{٤}$)

$(س + ت ص)^{٨} = (\sqrt{٢})^{٨} (جتا \frac{٣ط}{٤} + ت جا \frac{٣ط}{٤})^{٨}$

= ١٦ (جتا ١٠٨٠° + ت جا ١٠٨٠°)

= ١٦ (١ + ٠) = ١٦

∴ $(س + ت ص)^{٨} = ١٦$

<u>حل آخر لثانيا :</u>

$(س + ت ص)^{٨} = (- ١ + ت)^{٨}$

$= [(- ١ + ت)^{٢}]^{٤} = [- ١ + ت^{٢} - ٢ت]^{٤}$

$= (- ٢ت)^{٤} = ١٦ت^{٤} = ١٦ \times ١ = ١٦$

---

٢٦. نفرض أن $\sqrt{٣ + ٤ ت}$ = س + ص ت

بتربيع الطرفين

س^{٢} - ص^{٢} + ٢س ص ت = ٣ + ٤ ت

س^{٢} - ص^{٢} = ٣ .... (١)

٢ س ص = ٤ .... (٢)

بتربيع كل من (١) ، (٢)

س^{٤} - ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٩ ... (١)$'$

٤ س^{٢} ص^{٢} = ١٦ .... (٢)$'$

بالجمع

س^{٤} + ٢س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٢٥

(س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥

س^{٢} + ص^{٢} = ٥ .... (٣)

بجمع (١) ، (٣)

٢ س^{٢} = ٨ ⟸ س = ± ٢

بالتعويض في (٢)

± ٤ص = ٤ ⟸ ص = ± ١

س + ص ت = ± ٢ ± ١ت

$\sqrt{٣ + ٤ت}$ = ± (٢ + ت)

---

٢٧. ع^{٢} - ٤ ع + ٨ = صفر

أ = ١ ، ب = - ٤ ، جـ = ٨

ع = $\dfrac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

$= \dfrac{٤ \pm \sqrt{١٦ - ٣٢}}{٢} = \dfrac{٤ \pm \sqrt{- ١٦}}{٢}$

$= \dfrac{٤ \pm \sqrt{١٦ ت^{٢}}}{٢} = \dfrac{٤ \pm ٤ ت}{٢}$ = ٢ ± ٢ت

---

٢٨. إذا كان ع + ٢ = ت (ع - ٢)

$\text{ع} + ٢ = \text{ت ع} - ٢\,\text{ت}$

$\text{ع} - \text{ت ع} = -٢ - ٢\,\text{ت}$

$\text{ع}\,(١ - \text{ت}) = -٢ - ٢\,\text{ت}$

$\text{ع} = \frac{-٢ - ٢\,\text{ت}}{١ - \text{ت}} \times \frac{-١ + \text{ت}}{١ + \text{ت}}$

$= \frac{-٢ - ٤\,\text{ت} - ٢\,\text{ت}^٢}{١ - \text{ت}^٢} = \frac{-٤\,\text{ت}}{٢} = -٢\text{ت}$

$= ٢(-\text{ت}) = ٢\left(\text{جتا}\frac{٣\text{ط}}{٢} + \text{ت جا}\frac{٣\text{ط}}{٢}\right)$

$\text{ع} = ٢\,\text{هـ}^{\frac{٣\text{ط}}{٢}\text{ت}}$

$\sqrt{\text{ع}} = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{\frac{٣\text{ط}}{٢} + ٢\text{ط ر}}{٢}\text{ت}} = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٣\text{ط} + ٤\text{ط ر}}{٤}\text{ت}}$

، ر = ٠ ، ١

$\text{ر} = ٠ \Longleftarrow \sqrt{\text{ع}} = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٣\text{ط}}{٤}\text{ت}}$

$\text{ر} = ١ \Longleftarrow \sqrt{\text{ع}} = \sqrt{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٧\text{ط}}{٤}\text{ت}}$

---

٢٩. $|٣ + ٤\,\text{ت}| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

$|-٣| = \sqrt{٩ + ٠} = ٣$

$|٢\,\text{ت}| = \sqrt{٠ + ٤} = ٢$

ملحوظة : $|\text{ت}| = |-\text{ت}| = |-١| = ١$

---

٣٠. $|٢ + \text{ت ص} + \text{س}| + \text{س} + \text{ت ص} = ٠$

$|(٢ + \text{س}) + \text{ت ص}| = -\text{س} - \text{ت ص}$

بتربيع الطرفين

$(٢ + \text{س})^٢ + \text{ص}^٢ = (-\text{س} - \text{ت ص})^٢$

$٤ + ٤\text{س} + \text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{س}^٢ + \text{ص}^٢\,\text{ت}^٢ + ٢\text{س ص ت}$

$٤ + ٤\text{س} + \text{ص}^٢ = -\text{ص}^٢ + ٢\,\text{س ص ت}$

$٤ + ٤\text{س} + ٢\,\text{ص}^٢ = ٢\,\text{س ص ت}$

$٤ + ٤\text{س} + ٢\text{ص}^٢ = ٠$ .... (١)

$٢\,\text{س ص} = ٠ \Longleftarrow$ س = ٠ وإما ص = ٠

بالتعويض في (١)

عند $\text{س} = ٠ \Longleftarrow ٤ + ٢\,\text{ص}^٢ = ٠$

$\text{ص} = \sqrt{٢}\,\text{ت}$ مرفوض حيث ص $\in$ ح

عند $\text{ص} = ٠ \Longleftarrow ٤ + ٤\,\text{س} = ٠$

$\text{س} = -١$

---

٣١. $(٢ + ٧\omega + ٢\omega^٢)(٢ + ٧\omega^٢ + ٢\omega^٤)$

$= [٢(١ + \omega^٢) + ٧\omega][٢ + ٧\omega^٢ + ٢\omega]$

$= (-٢\omega + ٧\omega)(٧\omega^٢ - ٢\omega^٢)$

$= ٥\omega \times ٥\omega^٢ = ٢٥\omega^٣ = ٢٥$

---

٣٢. $(١ + ٢\omega^٥ + \frac{١}{\omega^٢})(١ + ٢\omega + \frac{١}{\omega^٤})$

$= (١ + ٢\omega^٢ + \omega)(١ + ٢\omega + \omega^٢)$

$= (-\omega^٢ + ٢\omega^٢)(٢\omega - \omega)$

$= \omega^٢ \times \omega = \omega^٣ = ١$

---

٣٣. $(١ + \frac{١}{\omega} + \text{ت})(١ + \frac{١}{\omega^٢} + \text{ت})$

$= (١ + \omega^٢ + \text{ت})(١ + \omega + \text{ت})$

$= (\text{ت} - \omega)(\text{ت} - \omega^٢)$

$= \text{ت}^٢ - \omega^٢\,\text{ت} - \omega\,\text{ت} + \omega^٣$

$= -١ - \text{ت}(\omega^٢ + \omega) + ١$

$= -\text{ت} \times -١ = \text{ت}$

---

٣٤. $\left(\frac{٧ + ٤\omega}{٧\omega^٢ + ٤} + \frac{٥\omega^٢ - ٣}{٥ - ٣\omega}\right)^٢$

$= \left(\frac{٧\omega^٣ + ٤\omega}{٧\omega^٢ + ٤} + \frac{٥\omega^٢ - ٣\omega^٣}{٥ - ٣\omega}\right)^٢$

$= \left(\frac{\omega(٧\omega^٢ + ٤)}{(٧\omega^٢ + ٤)} + \frac{\omega^٢(٥ - ٣\omega)}{(٥ - ٣\omega)}\right)^٢$

$(\omega + \omega^٢)^٢ = (-١)^٢ = ١$

---

٣٥. $\frac{٢ + \omega}{٢\omega - \omega^٢} + \frac{٢ + \omega^٢}{٢\omega^٢ - \omega}$

$= \frac{(٢ + \omega)(٢\omega^٢ - \omega) + (٢ + \omega^٢)(٢\omega - \omega^٢)}{(٢\omega - \omega^٢)(٢\omega^٢ - \omega)}$

$\frac{٤\omega^٢ - ٢\omega + ٢\omega^٣ - \omega^٢ + ٤\omega + ٢\omega^٣ - ٢\omega^٢ - \omega^٤}{٤\omega^٣ - ٢\omega^٢ - ٢\omega^٤ + \omega^٣}$

$= \frac{٤\omega^٢ - ٢\omega + ٢ - \omega^٢ + ٤\omega + ٢ - ٢\omega^٢ - \omega}{٤ - ٢\omega^٢ - ٢\omega + ١}$

$\frac{\omega^٢ + \omega + ٤}{٥ - ٢(\omega + \omega^٢)} = \frac{-١ + ٤}{٥ - ٢ \times -١} = \frac{٣}{٧}$

---

٣٦. $\text{س}^٢ + (١ + ٢\omega + \omega^٢)(١ + \omega + ٢\omega^٢)$

= صفر

$\text{س}^٢ + (٢\omega - \omega)(٢\omega^٢ - \omega^٢) = ٠$

$\text{س}^٢ + (\omega)(\omega^٢) =$ صفر

$\text{س}^٢ + \omega^٣ =$ صفر

$\text{س}^٢ = -١ \Longleftarrow \text{س}^٢ = \text{ت}^٢$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $\text{س} = \pm\,\text{ت}$

---

٣٧. $\left(\frac{\text{س} + \omega^٤\,\text{ص}}{\omega^٢\,\text{س} + \text{ص}} - \frac{\text{س} + \omega^٢\,\text{ص}}{\omega\,\text{س} + \text{ص}}\right)^٤$

$$=\left(\frac{\omega^3\text{س}+\omega\text{ص}}{\omega^2\text{س}+\text{ص}}-\frac{\omega^3\text{س}+\omega^2\text{ص}}{\omega\text{س}+\text{ص}}\right)^4$$

$$=\left(\frac{\omega(\omega^2\text{س}+\text{ص})}{(\omega^2\text{س}+\text{ص})}-\frac{\omega^2(\omega\text{س}+\text{ص})}{(\omega\text{س}+\text{ص})}\right)^4$$

$$=(\omega-\omega^2)^4=(\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^4$$

$$=9\,\text{ت}^4=9\times1=9$$

---

٣٨. $\left(\frac{\omega}{1+2\omega}\right)^2+\left(\frac{\omega^2}{1+2\omega^2}\right)^2$

$$=\frac{\omega^2}{1+4\omega+4\omega^2}+\frac{\omega^4}{1+4\omega+4\omega^2}$$

$$=\frac{\omega^2+\omega^4}{1+4\omega+4\omega^2}=\frac{\omega^2+\omega}{1+4(\omega+\omega^2)}$$

$$=\frac{-1}{1+4\times-1}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

---

٣٩. $\left(\frac{\omega^2}{1+2\omega^2}\right)^4+\left(\frac{1+2\omega}{\omega}\right)^4=\text{أ}\omega^2$

الطرف الأيمن

$$=\frac{\omega^8}{\left[(1+2\omega^2)^2\right]^2}+\frac{\left[(1+2\omega)^2\right]^2}{\omega^4}$$

$$=\frac{\omega^2}{(1+4\omega^2+4\omega^4)^2}+\frac{(1+4\omega+4\omega^2)^2}{\omega^4}$$

$$=\frac{\omega^2}{(1+4\omega^2+4\omega)^2}+\frac{(1+4\omega+4\omega^2)^2}{\omega}$$

$$=\frac{\omega^2}{(1+4(\omega^2+\omega))^2}+\frac{(1+4(\omega+\omega^2))^2}{\omega}$$

$$=\frac{\omega^2}{(-3)^2}+\frac{(-3)^2}{\omega}=\frac{\omega^2}{9}+\frac{9}{\omega}$$

$$=\frac{\omega^3+81}{9\omega}=\frac{82}{9\omega}$$

∴ المعادلة هي $\text{أ}\omega^2=\frac{82}{9\omega}$

$9\,\text{أ}\,\omega^3=82 \Leftarrow \text{أ}=\frac{82}{9}$

---

٤٠. ل $=$ أ $+$ ب ، م $=$ أω $+$ بω^2 ، ن $=$ أω^2 $+$ بω

م ن $=$ (أω $+$ بω^2)(أω^2 $+$ بω)

م ن $=$ أ$^2\omega^3$ $+$ أبω^2 $+$ أبω^4 $+$ ب$^2\omega^3$

$=$ أ^2 $+$ أب $(\omega^2+\omega)$ $+$ ب^2

$=$ أ^2 $-$ أب $+$ ب^2

$$\frac{\text{ل م ن}}{\text{أ}^3+\text{ب}^3}=\frac{(\text{أ}+\text{ب})(\text{أ}^2-\text{أب}+\text{ب}^2)}{\text{أ}^3+\text{ب}^3}=\frac{\text{أ}^3+\text{ب}^3}{\text{أ}^3+\text{ب}^3}=1$$

---

٤١. نفرض أن ع $=\frac{1-3\omega-3\omega^2}{1+10\omega+10\omega^2}$

$$=\frac{1-3(\omega+\omega^2)}{1+10(\omega+\omega^2)}=\frac{1-3\times-1}{1-10}$$

$$=\frac{4}{-9}$$

ع $=\frac{4}{9}$ ت^2 $\Leftarrow$ $\sqrt{\text{ع}}=\pm\frac{2}{3}$ ت

∴ $\frac{2}{3}$ ت هو أحد الجذرين التربيعيين

---

٤٢. $\left(\frac{\omega}{1-\omega}-\omega^2\right)^2$

$$=\left(\frac{\omega-\omega^2+\omega^3}{1-\omega}\right)^2=\left(\frac{\omega-\omega^2+1}{1-\omega}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-\omega^2-\omega^2}{1-\omega}\right)^2=\frac{(-2\omega^2)^2}{1-2\omega+\omega^2}$$

$$=\frac{4\omega^4}{-\omega-2\omega}=\frac{4\omega}{-3\omega}=-\frac{4}{3}$$

---

٤٣. نفرض أن ع $=$ س $+$ ص ت

$\bar{\text{ع}}$ $=$ س $-$ ص ت

ع^2 $=$ (س $+$ ص ت)^2

ع^2 $=$ س^2 $-$ ص^2 $+$ ٢ س ص ت

ع^2 $+$ $\bar{\text{ع}}$ $=$ صفر

س^2 $-$ ص^2 $+$ ٢س ص ت $+$ س $-$ ص ت $=$ ٠

(س^2 $-$ ص^2 $+$ س) $+$ (٢ س ص $-$ ص) $=$ ٠

س^2 $-$ ص^2 $+$ س $=$ ٠ .... (١)

٢ س ص $-$ ص $=$ ٠ .... (٢)

من (٢) ص (٢ س $-$ ١) $=$ ٠

ص = ٠ أ، س = $\frac{١}{٢}$ بالتعويض في (١)

عند ص = ٠

$\text{س}^٢ + \text{س} = ٠$ س (س + ١) = ٠

س = ٠ أ، س = - ١

(س ، ص) = (٠ ، ٠) ع = ٠

(س ، ص) = (- ١ ، ٠) ع = - ١

عند س = $\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٤} - \text{ص}^٢ + \frac{١}{٢} = ٠$

$\text{ص}^٢ = \frac{٣}{٤}$ ص = $\pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(س ، ص) = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

ع = $\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(س ، ص) = ($\frac{١}{٢}$ ، - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

ع = $\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

---

٤٤. بدون فك المحدد اثبت أن :

(١) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ ١ & \text{ب} & \text{جـ أ} \\ ١ & \text{جـ} & \text{أ ب} \end{vmatrix}$

ص٣ – ص١ ، ص٢ – ص١

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ ٠ & \text{ب - أ} & \text{جـ أ - ب جـ} \\ ٠ & \text{جـ - أ} & \text{أ ب - ب جـ} \end{vmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ ٠ & \text{ب - أ} & \text{- جـ(ب - أ)} \\ ٠ & \text{جـ - أ} & \text{- ب(جـ - أ)} \end{vmatrix}$

أخذ العامل المشترك (جـ - أ)(ب - أ)

$\Delta = \text{(جـ - أ)(ب - أ)} \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ ٠ & ١ & \text{- جـ} \\ ٠ & ١ & \text{- ب} \end{vmatrix}$

(- ١) × ص٢ + ص٣

$\Delta = \text{(جـ - أ)(ب - أ)} \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب جـ} \\ ٠ & ١ & \text{- جـ} \\ ٠ & ٠ & \text{جـ - ب} \end{vmatrix}$

Δ = (جـ - أ)(ب - أ) × ١ × ١ × (جـ - ب)

Δ = (أ – ب) (ب – جـ) (جـ - أ)

....

(٢) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & ١ + \text{ب}^٢ & \text{ب جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب جـ} & ١ + \text{جـ}^٢ \end{vmatrix}$

ص٣ – جـ ص١ ، ص٢ – ب ص١

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ \times ١ \times ١ = ١$

....

(٣) $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{ب جـ} & \text{جـ أ + أ ب} \\ ١ & \text{جـ أ} & \text{أ ب + ب جـ} \\ ١ & \text{أ ب} & \text{ب جـ + جـ أ} \end{vmatrix}$

ع٢ + ع٣

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & \text{ب جـ} & \text{ب جـ + جـ أ + أ ب} \\ ١ & \text{جـ أ} & \text{جـ أ + أ ب + ب جـ} \\ ١ & \text{أ ب} & \text{أ ب + ب جـ + جـ أ} \end{vmatrix}$

$= \text{(ب جـ + جـ أ + أ ب)} \begin{vmatrix} ١ & \text{ب جـ} & ١ \\ ١ & \text{جـ أ} & ١ \\ ١ & \text{أ ب} & ١ \end{vmatrix}$

Δ = (ب جـ + جـ أ + أ ب) × صفر = صفر

....

(٤)

$\begin{vmatrix} \text{س + ص + ٢} & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & \text{٢س + ص + ١} & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س + ٢ص + ١} \end{vmatrix}$

ع١ + ع٢ + ع٣

$\begin{vmatrix} \text{٢س + ٢ص + ٢} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{٢س + ٢ص + ٢} & \text{٢س + ص + ١} & \text{ص} \\ \text{٢س + ٢ص + ٢} & \text{س} & \text{س + ٢ص + ١} \end{vmatrix}$

أخذ العامل المشترك (٢س + ٢ص + ٢)

Δ = (٢س + ٢ص + ٢) ×

$\begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & \text{٢س + ص + ١} & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س + ٢ص + ١} \end{vmatrix}$

ص٢ – ص١ ، ص٣ – ص١

المحدد = (٢س+٢ص+٢)×

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{٠} & \text{س + ص + ١} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{س + ص + ١} \end{vmatrix}$$

= (٢س+٢ص+٢)×١×(س+ص+١)×(س+ص+١)

$= \text{٢ (س + ص + ١)}^{\text{٣}}$

(٥)

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{س} \\ \text{-٢س+٢س}^{\text{٢}} & \text{١+٢س}^{\text{٢}} & \text{٢س}^{\text{٣}} \\ \text{-٣س+٣س}^{\text{٢}} & \text{٣س}^{\text{٢}} & \text{١+٣س}^{\text{٣}} \end{vmatrix}$$

ع٢ – ع١ ، ع٣ – س × ع١

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{-٢س+٢س}^{\text{٢}} & \text{١+٢س} & \text{٢س}^{\text{٢}} \\ \text{-٣س+٣س}^{\text{٢}} & \text{٣س} & \text{١+٣س}^{\text{٢}} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \text{١} \times \begin{vmatrix} \text{١ + ٢ س} & \text{٢ س}^{\text{٢}} \\ \text{٣ س} & \text{١ + ٣ س}^{\text{٢}} \end{vmatrix}$$

$\Delta = \text{(١+٢س)(١+٣س}^{\text{٢}}\text{) – ٣س×٢س}^{\text{٢}}$

$\Delta = \text{١+٣س}^{\text{٢}}\text{ + ٢س+ ٦س}^{\text{٣}}\text{ – ٦س}^{\text{٣}}$

$\Delta = \text{١ + ٢ س + ٣ س}^{\text{٢}}$

---

٤٥. (س – ١) أحد عوامل المحدد

$$\begin{vmatrix} \text{س - ١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{س + ١} \\ \text{-١} & \text{١} & \text{س + ك} \end{vmatrix}$$

س = ١ تجعل المحدد = صفر

$$\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{-١} & \text{١} & \text{١ + ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

ص٢ + ص٣

$$\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{٢} & \text{٣ + ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$$\text{(- ١)} \times \begin{vmatrix} \text{١} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{٣ + ك} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

٣ + ك – ٢ × ٢ = ٠ ك = ١

٤٦.

$$\begin{vmatrix} \text{س + ١} & \text{٣} & \text{١} \\ \text{ك} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{س} & \text{٢} & \text{١} \end{vmatrix}$$

س عامل من عوامل المحدد

س = ٠ تجعل المحدد = ٠

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٣} & \text{١} \\ \text{ك} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٠} & \text{٢} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

ع٢ – ٢ ع٣

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{ك} & \text{-٤} & \text{٣} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

$$\text{١} \times \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} \\ \text{ك} & \text{-٤} \end{vmatrix} = \text{٠}$$

- ٤ – ك = ٠ ك = - ٤

---

٤٧. $-\omega = \omega\,\text{ت}^{\text{٢}}$ ، $-\omega^{\text{٢}} = \omega^{\text{٢}}\,\text{ت}^{\text{٢}}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{ت} & \omega^{\text{٢}} \\ \omega\,\text{ت} & -\omega & \text{٠} \\ \omega^{\text{٢}}\,\text{ت} & -\omega^{\text{٢}} & \omega \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{ت} & \omega^{\text{٢}} \\ \omega\,\text{ت} & \omega\,\text{ت}^{\text{٢}} & \text{٠} \\ \omega^{\text{٢}}\,\text{ت} & \omega^{\text{٢}}\,\text{ت}^{\text{٢}} & \omega \end{vmatrix}$$

بأخذ ت عامل مشترك من العمود الثاني

$$\Delta = \text{ت} \begin{vmatrix} \text{١} & \text{١} & \omega^{\text{٢}} \\ \omega\,\text{ت} & \omega\,\text{ت} & \text{٠} \\ \omega^{\text{٢}}\,\text{ت} & \omega^{\text{٢}}\,\text{ت} & \omega \end{vmatrix}$$

= ت × صفر = صفر

٤٨.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{س} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{س} \end{vmatrix}$$

بجمع الأعمدة الثلاثة

$$\Delta = \begin{vmatrix} س + أ + ب & أ & ب \\ س + أ + ب & س & ب \\ س + أ + ب & ب & س \end{vmatrix}$$

بأخذ عامل مشترك (س + أ + ب)

$$\Delta = (س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ١ & س & ب \\ ١ & ب & س \end{vmatrix}$$

ص٣ − ص١ ، ص٢ − ص١

$$\Delta = (س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ٠ & س - أ & ٠ \\ ٠ & ب - أ & س - ب \end{vmatrix}$$

بتبديل ع٢ ، ع٣

$$\Delta = -(س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & أ \\ ٠ & ٠ & س - أ \\ ٠ & س - ب & ب - أ \end{vmatrix}$$

بتبديل ص٢ ، ص٣

$$\Delta = +(س + أ + ب) \begin{vmatrix} ١ & ب & أ \\ ٠ & س - ب & ب - أ \\ ٠ & ٠ & س - أ \end{vmatrix}$$

$= (س + أ + ب) \times ١ \times (س - ب)(س - أ)$

$= (س + أ + ب)(س - أ)(س - ب)$

.٤٩

$$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ١ & س^٢ - ٢ & ٤ \end{vmatrix} = صفر$$

ص٣ − ص١

$$\begin{vmatrix} ١ & ٧ & ٤ \\ ٠ & ١ & س \\ ٠ & س^٢ - ٩ & ٠ \end{vmatrix} = صفر$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٧ \\ ٠ & س & ١ \\ ٠ & ٠ & س^٢ - ٩ \end{vmatrix} = صفر$$

$١ \times س\,(س^٢ - ٩) = ٠$

$س = ٠$ أ، $س = ٣$ أ، $س = -٣$

.٥٠

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢س & ٢ص & ٢ع \\ ٥ل + س & ٥م + ص & ٥ن + ع \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ٢ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٥ل + س & ٥م + ص & ٥ن + ع \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$$

ص٢ − ص١

$$\Delta = ٢ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٥ل & ٥م & ٥ن \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١٠ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ٧ك - ٣ل & ٧ط - ٣م & ٧هـ - ٣ن \end{vmatrix}$$

ص٣ + ٣ ص٢

$$\Delta = ١٠ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ٧ك & ٧ط & ٧هـ \end{vmatrix}$$

$$\Delta = ١٠ \times ٧ \times \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ل & م & ن \\ ك & ط & هـ \end{vmatrix}$$

$\Delta = ١٠ \times ٧ \times ٢ = ١٤٠$

.٥١

$$\begin{vmatrix} أ - أب & ١ & ب - ٣ \\ أب - أجـ & ب & جـ - ٣ب \\ أجـ - أ & جـ & ١ - ٣جـ \end{vmatrix}$$

أ×ع٣ + ع١

$$\Delta = \begin{vmatrix} -٢أ & ١ & ب - ٣ \\ -٢أب & ب & جـ - ٣ب \\ -٢أجـ & جـ & ١ - ٣جـ \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -٢أ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ب - ٣ \\ ب & ب & جـ - ٣ب \\ جـ & جـ & ١ - ٣جـ \end{vmatrix}$$

$= -٢أ \times صفر = صفر$

٥٢. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

$\text{ع}_2 - \text{ع}_1$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -7$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \\ -4 & 4 & -5 \end{vmatrix}$

$\text{ع}_1 - 5\text{ع}_2$

$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -22 & 5 & -4 \\ -24 & 4 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -22 & -4 \\ -24 & -5 \end{vmatrix} = -14$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix}$

$\text{ع}_2 - 5\text{ع}_1$

$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -4 \\ 2 & -14 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -7 & -4 \\ -14 & -5 \end{vmatrix} = -21$

$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix}$

$\text{ع}_2 - \text{ع}_1 \ ، \ \text{ع}_3 - 5\text{ع}_1$

$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -7 \\ 2 & 2 & -14 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -14 \end{vmatrix} = -28$

$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = 2 \ ، \ \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = 3 \ ، \ \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = 4$

الحل = (٢ ، ٣ ، ٤)