# النموذج الثانى

## اولا: الجـــــبر

١) أ – إذا كان $^{م+ن}ل_{٢} = ٢١٠$ ، $^{ن-٣}ق_{٣} = ٣٥$ أوجد كلا من م ، ن

ب – ضع المقدار $١ - \sqrt{٣}\,ت$ على الصورة المثلثية ثم أوجد جذريه التربيعيين فى الصور الأسية

### الحل

أ – $\because\ ^{م+ن}ل_{٢} = ٢١٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore\ ^{م+ن}ل_{٢} = ١٥ \times ١٤ \quad \Leftarrow \quad \therefore\ م + ن = ١٥ \qquad (١)$

، $\because\ ^{ن-٣}ق_{٣} = ٣٥ \quad \Leftarrow \quad \therefore \dfrac{^{ن-٣}ل_{٣}}{\underline{|٣}} = ٣٥ \quad \Leftarrow \quad \therefore\ ^{ن-٣}ل_{٣} = ٣٥ \times ٦ = ٧ \times ٦ \times ٥$

$\therefore\ ن - ٣ = ٧ \quad \Leftarrow \quad \therefore\ ن = ٧ + ٣ = ١٠$ #

بالتعويض فى ١ $\quad \therefore\ م + ١٠ = ١٥ \quad \Leftarrow \quad \therefore\ م = ١٥ - ١٠ = ٥$ #

ب – المقدار $= ١ - \sqrt{٣}\,ت$

$\therefore\ س = ١$ ، $ص = -\sqrt{٣} \quad \Leftarrow \quad \therefore\ ل = \sqrt{س^{٢} + ص^{٢}} = \sqrt{(١)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = ٢$

، $جتا\theta = \dfrac{س}{ل} = \dfrac{١}{٢}$ ، $جا\theta = \dfrac{ص}{ل} = \dfrac{-\sqrt{٣}}{٢}$

$\because$ س موجب ، ص سالب $\therefore\ \theta$ فى الربع الرابع

$\therefore\ \theta = ٣٦٠^{\circ} - ٦٠^{\circ} = ٣٠٠^{\circ} = \dfrac{٣٠٠}{١٨٠}ط = \dfrac{٥ط}{٣}$

$\therefore$ الصورة المثلثية للعدد هى $ع = ل(جتا\theta + ت\,جا\theta) = ٢(جتا\dfrac{٥ط}{٣} + ت\,جا\dfrac{٥ط}{٣})$ #

والصورة الأسية للعدد هى $ع = ل\,هـ^{\theta ت} = ٢\,هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت}$

الجذرين التربيعيين للعدد هما $ع^{\frac{١}{٢}} = (٢\,هـ^{\frac{٥ط}{٣}ت})^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\frac{٥ط}{٣} + ٢ر ط}{٢}ت}$ حيث ر = ٠ ، ١

بوضع ر = ٠ الجذر الأول $= \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\frac{٥ط}{٣} + ٠}{٢}ت} = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٥ط}{٦}ت}$ #

بوضع ر = ١ الجذر الثانى $= \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\frac{٥ط}{٣} + ٢ط}{٢}ت} = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{١١ط}{٦}ت}$ #

٢) أ – باستخدام طريقة كرامر حل المعادلات:

$2\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = -2 \quad ، \quad \text{س} + \text{ص} - \text{ع} = 0 \quad ، \quad 3\text{س} + 2\text{ص} + 5\text{ع} = 3$

ب – أذا كانت الحدود الثانى والثالث والرابع فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية هى ١٦ ، ١١٢ ، ٤٤٨ اوجد قيم س ، أ ، ن

## الحل

أ – المعادلات هى : $2\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = -2 \quad ، \quad \text{س} + \text{ص} - \text{ع} = 0 \quad ، \quad 3\text{س} + 2\text{ص} + 5\text{ع} = 3$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2(5+2) - 1(5+3) + 1(2-3) = 14 - 8 - 1 = 5$$

$$، \therefore \Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2(5+2) - 1(0+3) + 1(0-3) = -14 - 3 - 3 = -20$$

$$، \therefore \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(0+3) + 2(5+3) + 1(3-0) = 6 + 16 + 3 = 25$$

$$، \therefore \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-0) - 1(3-0) - 2(2-3) = 6 - 3 + 2 = 5$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{5} = -4 \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{25}{5} = 5 \quad ، \quad \text{ع} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\therefore \text{م.ح} = \{(-4 ، 5 ، 1)\} \quad \#$$

ب – $\text{ح}_2 = 16 \quad ، \quad \text{ح}_3 = 112 \quad ، \quad \text{ح}_4 = 448$ فى مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$

$$\because \frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{الثانى}}{\text{الأول}}$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_3}{\text{ح}_2} = \frac{\text{ن} - 2 + 1}{2} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} \Leftarrow \therefore \frac{112}{16} = \frac{\text{ن} - 1}{2} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} \therefore 14 = (\text{ن} - 1)\frac{\text{أ}}{\text{س}} \quad (1)$$

$$\therefore \frac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3} = \frac{\text{ن} - 3 + 1}{3} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} \Leftarrow \therefore \frac{448}{112} = \frac{\text{ن} - 2}{3} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} \therefore 12 = (\text{ن} - 2)\frac{\text{أ}}{\text{س}} \quad (2)$$

بقسمة المعادلتين ١ ، ٢ $\therefore \frac{14}{12} = \frac{\text{ن} - 1}{\text{ن} - 2} \Leftarrow \therefore 7\text{ن} - 14 = 6\text{ن} - 6 \Leftarrow \therefore \text{ن} = 8 \quad \#$

بالتعويض فى ١ $\therefore 14 = \frac{7\text{أ}}{\text{س}} \Leftarrow \therefore \text{أ} = 2\text{س} \quad (3)$

$\because$ ح$_{ر+1}$ = $^{ن}$ق$_{ر}$ (الثانى)$^{ر}$ × (الأول)$^{ن-ر}$

$\therefore$ ح$_{2}$ = $^{8}$ق$_{1}$ × (أ)$^{1}$ × (س)$^{7}$ ⟸ $\therefore 16 = 8 \times$ أ $\times$ س$^{7}$ بالتعويض من ٣

$\therefore 16 = 8 \times 2$س $\times$ س$^{7}$ ⟸ $\therefore$ س$^{8} = 1$ ⟸ $\therefore$ س $= \pm 1$ ، $\therefore$ أ $= \pm 2$ #

٣) أ – اوجد قيمة $\left(\frac{\omega}{1+2\omega^{2}}\right)^{2} + \left(\frac{\omega^{2}}{1+2\omega}\right)^{2}$ حيث $\omega$ هى احد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح:

ب – باستخدام خصائص المحددات أوجد قيمة
$$\begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & أس_1 + لص_1 \\ س_2 & ص_2 & أس_2 + لص_2 \\ س_3 & ص_3 & أس_3 + لص_3 \end{vmatrix}$$

## الحل

أ – المقدار $= \left(\frac{\omega}{1+2\omega^{2}}\right)^{2} + \left(\frac{\omega^{2}}{1+2\omega}\right)^{2} = \frac{\omega^{2}}{1+4\omega^{2}+4\omega^{4}} + \frac{\omega^{4}}{1+4\omega+4\omega^{2}}$

$= \frac{\omega^{2}}{1+4(\omega^{2}+\omega)} + \frac{\omega}{1+4(\omega+\omega^{2})} = \frac{\omega^{2}}{1+4(-1)} + \frac{\omega}{1+4(-1)} = \frac{\omega^{2}+\omega}{-3} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

ب – المحدد =
$$\begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & أس_1 + لص_1 \\ س_2 & ص_2 & أس_2 + لص_2 \\ س_3 & ص_3 & أس_3 + لص_3 \end{vmatrix}$$

نجزئ المحدد الى محددين بتجزئة العمود الثالث

$$= \left( \begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & أس_1 \\ س_2 & ص_2 & أس_2 \\ س_3 & ص_3 & أس_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & لص_1 \\ س_2 & ص_2 & لص_2 \\ س_3 & ص_3 & لص_3 \end{vmatrix} \right)$$

نأخذ أ عامل مشترك من ع٣ للمحدد الأول ونأخذ ل عامل مشترك من ع٣ للمحدد الثانى

$$= \left( أ \begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & س_1 \\ س_2 & ص_2 & س_2 \\ س_3 & ص_3 & س_3 \end{vmatrix} + ل \begin{vmatrix} س_1 & ص_1 & ص_1 \\ س_2 & ص_2 & ص_2 \\ س_3 & ص_3 & ص_3 \end{vmatrix} \right)$$

المحدد الأول = صفر لتساوى ع١ ، ع٣
والمحدد الثانى = صفر لتساوى ع٢ ، ع٣

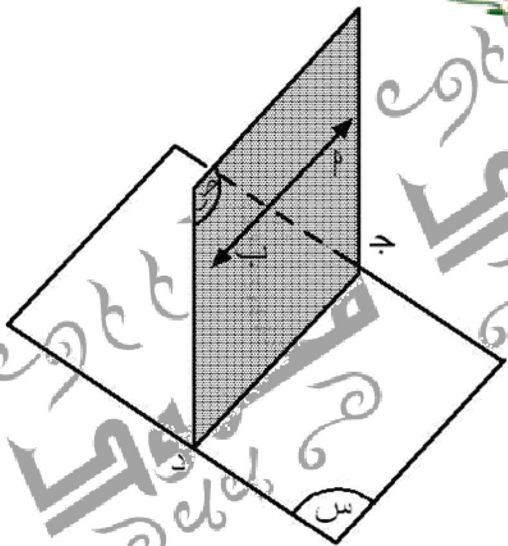
$= ($ أ $\times 0 +$ ل $\times 0) = 0$

## ثانيا : الهندسة الفراغية

١) أ – اثبت أنه إذا وازى مستقيم مستويا فإنه يوازى جميع المستقيمات التى تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التى تحتوى ذلك المستقيم.

ب – س ص ع ل أضلاعه ليست فى مستوى واحد ورسم المستوى ى يوازى $\overline{\text{س ع}}$ ويوازى $\overline{\text{ص ل}}$ ويقطع $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ص ع}}$ ، $\overline{\text{ع ل}}$ ، $\overline{\text{ل س}}$ فى هـ ، و ، ن ، م على الترتيب اثبت أن: $\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{ن و}}{\text{ص ل}} = ١$

### الحل




أ – المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س ، ص اى مستو يحتوى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

، المستوى ص يقطع المستوى س فى $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

المطلوب: اثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

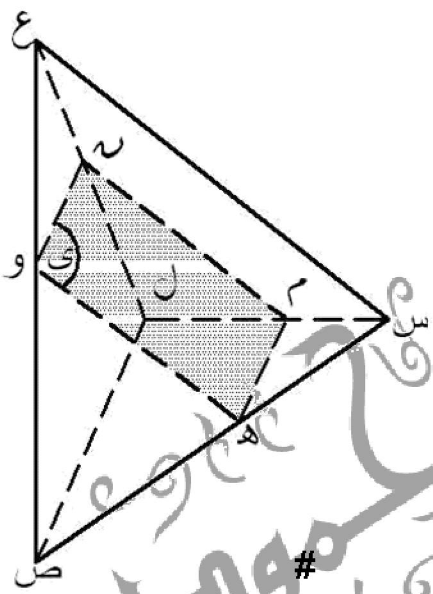
البرهان:

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى س ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ المستوى س = $\emptyset$

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊂ المستوى س ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = $\emptyset$

، ∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يقعان فى مستو واحد وهو ص

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ وهو المطلوب




ب – ∵ المستوى ى // $\overline{\text{س ع}}$ ، ∵ المستوى ى ∩ المستوى ع س ص = $\overline{\text{هـ و}}$

∴ $\overline{\text{س ع}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$

∴ $\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} = \frac{\text{ص و}}{\text{ص ع}}$ (١)

، ∵ المستوى ى // $\overline{\text{ص ل}}$ ، ∵ المستوى ى ∩ المستوى ع ل ص = $\overline{\text{ن و}}$

∴ $\overline{\text{ن و}}$ // $\overline{\text{ص ل}}$

∴ $\frac{\text{ن و}}{\text{ص ل}} = \frac{\text{ع و}}{\text{ع ص}}$ (٢)

بجمع ١ ، ٢

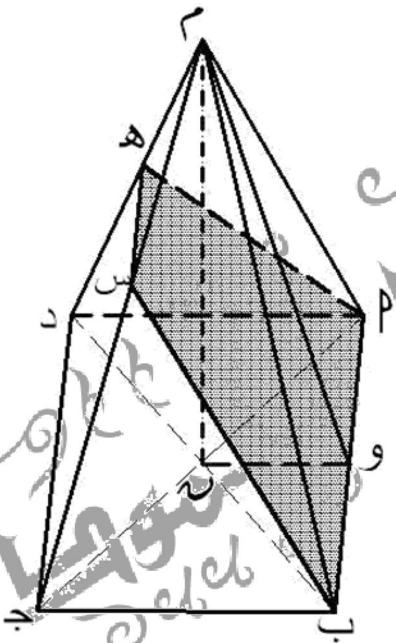
∴ $\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{ن و}}{\text{ص ل}} = \frac{\text{ص و}}{\text{ص ع}} + \frac{\text{ع و}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ص و} + \text{ع و}}{\text{ص ع}} = \frac{\text{ص ع}}{\text{ص ع}} = ١$ #

٢) أ ب ج د مربع طول ضلعه ٣ سم تقاطع قطراه في ن ، ورسم $\overline{\text{ن م}}$ ⊥ المستوى أ ب ج د وكان م ن = ٦ سم

أوجد قياس الزاوية الزوجية م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ج وإذا مر مستوى بالضلع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وقطع $\overline{\text{م د}}$ في هـ وقطع $\overline{\text{م ج}}$ في س

اثبت أن أ ب س هـ شبه منحرف

## الحل




**العمل:** نرسم م و ⊥ أ ب ونصل ن و

**البرهان:**

∵ $\overline{\text{ن م}}$ ⊥ المستوى أ ب ج د

∴ ن مسقط م على المستوى أ ب ج د ، ∵ و ∈ للمستوى أ ب ج د

∴ ن و مسقط المائل م و على المستوى أ ب ج د

، ∵ م و ⊥ أ ب ∴ ن و ⊥ أ ب

∴ الزاوية م و ن هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية م – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ج

∴ ظا(∠ م و ن) = $\frac{\text{م ن}}{\text{ن و}} = \frac{٦}{١٫٥} = ٤$

∴ ق(∠ م و ن) = ٧٥° ٥٧َ ٤٩ً #

، ∵ د ج // أ ب ∴ د ج ∥ المستوى أ ب س هـ

، ∵ المستوى أ ب س هـ ∩ المستوى م ج د = س هـ

∴ د ج // س هـ ∴ س هـ // أ ب (١)

في △ م ج د نجد أن س هـ ≠ ج د

، ∵ ج د = أ ب ∴ س هـ ≠ أ ب (٢)

من ١ ، ٢ ∴ الشكل أ ب س هـ شبه منحرف #

> **تذكر أن:**
> الشكل الرباعي يكون شبه منحرف إذا كان فيه ضلعان متقابلان متوازيان وغير متساويين

٣) و أ ب ج هرم ثلاثي فيه $\overline{\text{و ج}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و ب}}$ وقياس الزاوية الزوجية التي حرفها $\overleftrightarrow{\text{و ج}}$ تساوي ١٢٠°

فإذا كان و أ = و ب = ١٢ سم ، و ج = ٦ سم

(١) أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب ج

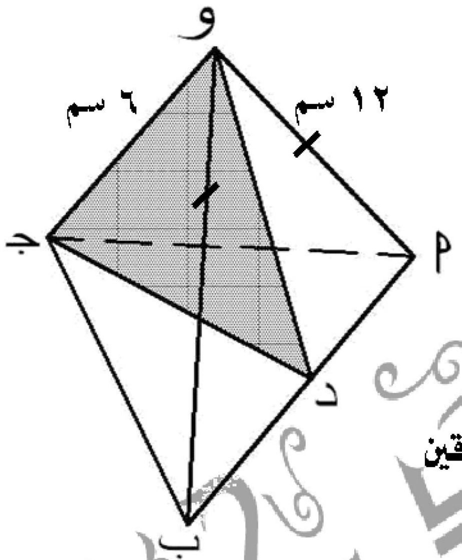
(٢) احسب قياس الزاوية الزوجية التي حرفها $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

## الحل

العمل: نرسم و د ⊥ أ ب ونصل جـ د

∵ و جـ ⊥ و أ ∴ Δ أ و جـ قائم الزاوية فى و ، ∵ و جـ = ٦ سم ، و أ = ١٢ سم

∴ أجـ = $\sqrt{١٢^{٢} + ٦^{٢}} = ٦\sqrt{٥}$ سم #




∵ و جـ ⊥ و ب ∴ Δ ب و جـ قائم الزاوية فى و

، ∵ و جـ = ٦ سم ، و ب = ١٢ سم

∴ ب جـ = $\sqrt{١٢^{٢} + ٦^{٢}} = ٦\sqrt{٥}$ سم #

، ∵ و أ ⊥ و جـ ، ∵ و ب ⊥ و جـ

∴ الزاوية أ و ب هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية التى حرفها $\overleftrightarrow{\text{وجـ}}$

∴ ق(∠ أ و ب) = ١٢٠° ، ∵ و أ = و ب ∴ Δ أ و ب متساوى الساقين

∴ ق(∠ و أ ب) = ق(∠ و ب أ) = ٣٠°

∴ و د = $\frac{١}{٢}$ أ و = ٦ سم ، ∵ و د ⊥ أ ب ∴ د منتصف أ ب

∴ أ د = $\sqrt{١٢^{٢} - ٦^{٢}} = ٦\sqrt{٣}$ سم ∴ أ ب = ٢ أ د = $١٢\sqrt{٣}$ سم #

في Δ أ جـ ب ∵ أ جـ = ب جـ ، د منتصف أ ب ∴ جـ د ⊥ أ ب ، ∵ و د ⊥ أ ب (عملا)

∴ الزاوية و د جـ هى زاوية مستوية للزاوية الزوجية التى حرفها $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

∵ Δ د و جـ قائم الزاوية فى و (لأن $\overline{\text{وجـ}}$ ⊥ كل من $\overline{\text{وأ}}$ ، $\overline{\text{وب}}$ فيكون ⊥ المستوى أ و جـ وبالتالى يكون ⊥ و د)

، ∵ و جـ = ٦ سم ، و د = ٦ سم ∴ Δ د و جـ قائم الزاوية ومتساوى الساقين ∴ ق(∠ و د جـ) = ٤٥° #

ومع أطيب تمنياتي بالنجاح

والتفوق بإذن الله

مهندس / السيد محمود