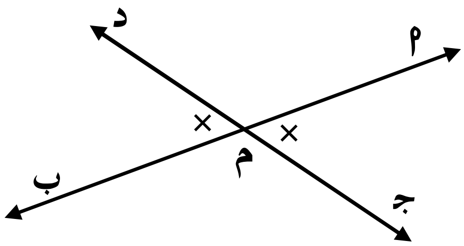
البرهان الاستدلالي

نظرية (١) :
إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتان فى القياس.

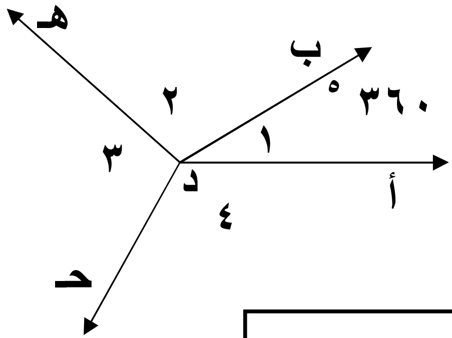


∵ أ ب ∩ د ج = { م }

∴ ق{∠ أ م ج } = ق{∠ د م ب} بالتقابل بالرأس

، ق{∠ أ م د } = ق{∠ ج م ب} بالتقابل بالرأس

نظرية (٢) :
مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوى ٣٦٠ °

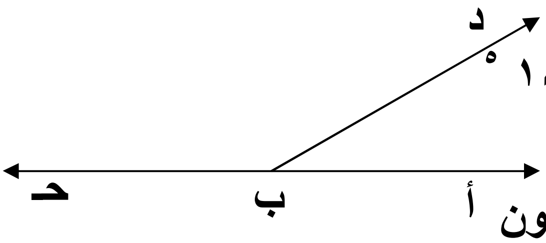


ق(∠١) + ق(∠٢) + ق(∠٣) + ق(∠ ٤) = ٣٦٠ °

نظرية (٣) :
مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوى ١٨٠ °

ملاحظات :

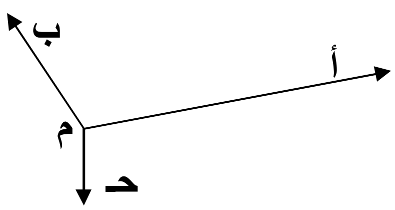
١ - الزاويتان المتكاملتان المتجاورتان يكون ضلعيهما المتطرفين على استقامة واحدة



∵ ق(∠ أ ب د) + ق(∠ د ب حـ) = ١٨٠ °

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ على استقامة واحدة .

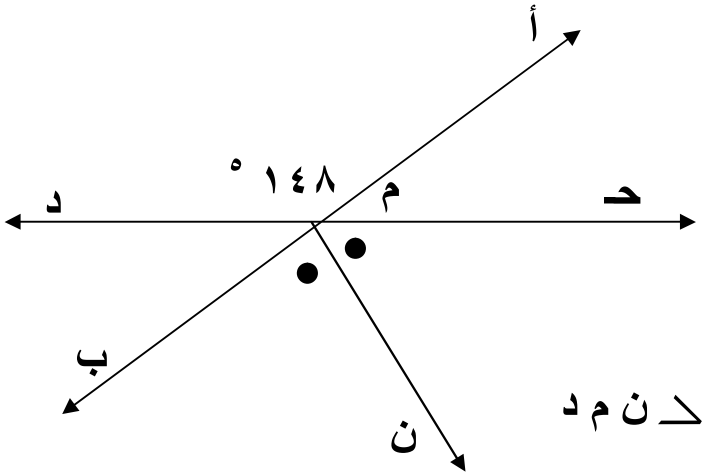
٢ - ا لزاويتان ا لمتجاورتان غيرا لمتكاملتان يكون ضلعيها ا لمتطرفان ليس على استقامة واحدة .



∵ ق(∠ أ م ب) + ق(∠ ب م حـ) ≠ ١٨٠ °

∴ $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م حـ}}$ ليس على استقامة واحدة .

مثال : فى ا لشكل ا لمقابل :



أ ب ∩ حـ د = { م }

، م ن ينصف ∠ حـ م ب

، ق(∠ أ م د) = ١٤٨ °

إ حسب بالدرجات قياس

كل من ∠ حـ م أ ، ∠ أ م ن ، ∠ ن م د

البرهان :

∵ ق(∠ حـ م د) = ١٨٠ ° لأنها مستقيمة .

∴ ق(∠ حـ م أ) = ١٨٠ ° ــ ١٤٨ ° = ٣٢ °

∵ أ ب ∩ د جـ = { م }

∴ ق(∠ أ م د) = ق(∠ حـ م ب) = ١٤٨ ° بالتقابل بالرأس .

∵ م ن ينصف ∠ ب م حـ

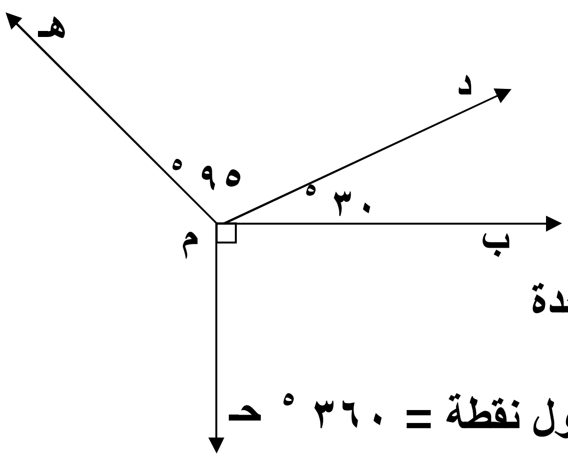
∴ ق(∠ أ م ن) = ق(∠ ن م ب) = ١٤٨ ÷ ٢ = ٧٤

∵ ق(∠ أ م حـ) = ق(∠ د م ب) = ٣٢ ° بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠ ن م د) = ق(∠ ن م ب) + ق (∠ ب م د)

= ٧٤ ° + ٣٢ ° =١٠٦

مثال:فى الشكل ا لمقابل :



ق(ب م̂ د) = ٣٠ ° ، ق(د م̂ هـ) = ٩٥ °

ق(ب م حـ) = ٩٠ °

إ حسب ق(حـ م̂ هـ)

ثم أ وجد ق(حـ م̂ هـ)المنعكسة

ثم أثبت أن: م ب ، م هـ ليس على استقامة واحدة

البرهان :

∵ مجموع قياسات ا لزوا يا ا لمتجمعة حول نقطة = ٣٦٠ °

∴ ق(حـ م̂ هـ) = ٣٦٠ ° ــ (٩٠ ° + ٣٠ ° + ٩٥ °)

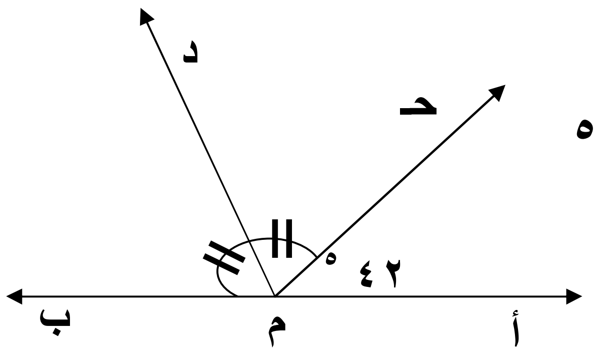
= ٣٦٠ ° ــ ٢١٥ ° = ١٤٥ °

∴ ق(حـ م̂ هـ) ا لمنعكسة = ٣٦٠ ° ــ ١٤٥ ° = ٢١٥ °

∵ ق(ب م̂ د) + ق(د م̂ هـ) = ٣٠ ° + ٩٥ ° = ١٢٥ ° = ١٨٠ °

∴ م ب ، م هـ ليس على استقامة واحدة .

مثال: في ا لشكل ا لمقابل :



م ∋ أ ب ، ق(∠ أ م حـ) = ٤٢ ٥

، م د ينصف ∠ ب م حـ

أوجد : ق(∠ ب م حـ)

البرهان :

∵ م ∋ أ ب

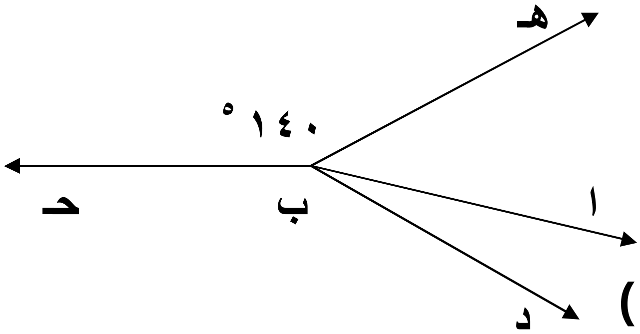
∴ ق(∠ أ م حـ) + ق(∠ حـ م ب) = ١٨٠

∴ ٤٢ + ق(∠ حـ م ب) = ١٨٠ ــ ٤٢ = ١٣٨

∵ م د ينصف ∠ ب م حـ

∴ ق(∠ ب م د) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م حـ) = $\frac{١}{٢}$ × ١٣٨ ° = ٦٩ °

مثال: في ا لشكل ا لمقابل :



ق(∠ هـ ب حـ) = ١٤٠ °

، ق(∠ د ب هـ) = ٩٠ °

، ق(∠ أ ب هـ) = ٢ ق(∠ أ ب د)

أثبت أن : ب أ ، ب حـ ليس على استقامة واحدة

البرهان : ∵ ق(∠ د ب هـ) = ٩٠ ° ، ق(∠ أ ب هـ) = ٢ ق(∠ أ ب د)

∴ ق(∠ أ ب د) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ ب هـ)

∵ ق(∠ أ ب هـ) + ق(∠ أ ب د) = ٩٠

∴ ٢ ق(∠ أ ب د)+ ق(∠ أ ب د) = ٩٠

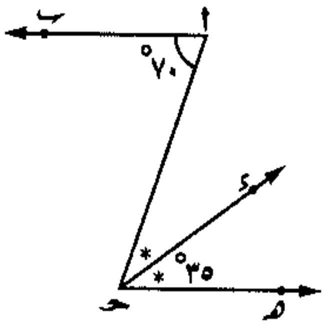
∴ ٣ ق(∠ أ ب د) = ٩٠ ∴ ق(∠ أ ب د) = ٩٠ ÷ ٣ = ٣٠

∴ ق(∠ أ ب هـ) = ٩٠ – ٣٠ = ٦٠

∵ ق(∠ أ ب هـ) + ق(∠ هـ ب حـ) = ٦٠ + ١٤٠ = ٢٠٠

∴ ب أ ، ب حـ ليس على استقامة واحدة .

مثال : في الشكل المقابل :



حـ ء ينصف ∠ أ حـ هـ

، ق (∠ ب أ حـ) = ٧٠°

، ق (∠ ء حـ هـ) = ٣٥°

أثبت أن : أ ب // حـ هـ

البرهان : ∵ جـ د ينصف ∠ أ جـ هـ

∴ ق{∠ هـ جـ د } = ق{∠ د جـ أ} = ٣٥ °

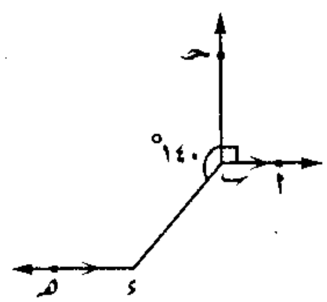
∴ ق{∠ أ جـ هـ } = ٧٠ °

∵ ق{∠ ب أ جـ } = ق{∠ أ جـ هـ } = ٧٠ ° و هما في وضع تبادل

∴ أ ب] جـ هـ

مثال :

في الشكل المقابل :



ب أ // ء هـ ، ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

، ق (∠ حـ ب ء) = ١٤٠°

أوجد : ق (∠ ب ء هـ)

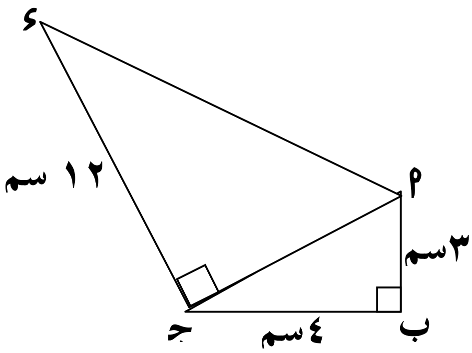
البرهان : ∵ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠ °

∴ ق{∠ أ ب د } = ٣٦٠ ° - (٩٠ + ١٤٠) = ٣٦٠ – ٢٣٠ = ١٣٠ °

∵ ب أ] د هـ ، ب د قاطع لهم

∴ ق{∠ أ ب د } = ق{∠ ب د هـ } = ١٣٠ °

مثال : فى الشكل المقابل :



ق(∠ب) = ق(∠أ جـ ء) = ٩٠ °

، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ ء = ١٢ سم

احسب : محيط الشكل أ ب جـ د

البرهان : فى △ أ ب جـ ∵ ق(∠ب) = ٩٠

∴ (أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

= ٩ + ١٦ = ٢٥

فى △ أ جـ د ∵ ق(∠أ جـ ء) = ٩٠ °

∴ (أ د)^2 = (أ جـ)^2 + (د جـ)^2

= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

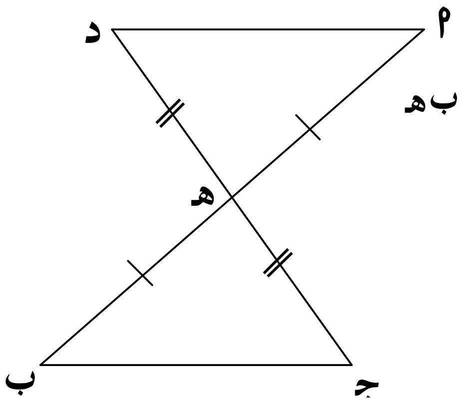
∴ أ جـ = ١٣ سم

∴ محيط الشكل أ ب جـ د = مجموع أطوال أضلاعه

= أ ب + ب جـ + جـ د + أ د

= ٣ + ٤ + ١٢ + ١٣ = ٣٢ سم

مثال : فى الشكل المقابل :



أ ب ∩ جـ د = { هـ } ، د هـ = جـ هـ ، أ هـ = ب هـ

١- اثبت أن : △ أ هـ د ≡ △ ب هـ جـ

٢- برهن أن : أ د // جـ ب

البرهان : △△ أ هـ د ، ب هـ جـ

١- د هـ = جـ هـ

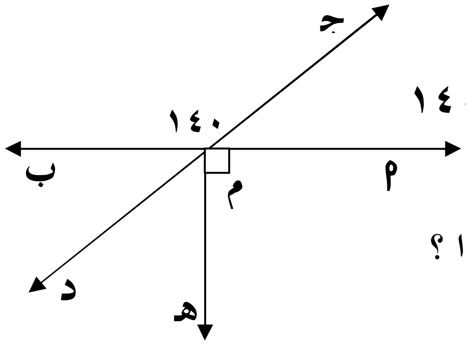
٢- أ هـ = ب هـ

٣- ق(∠ ب هـ جـ) = ق(∠ أ هـ د) بالتقابل بالرأس

∴ ينطبق المثلثان و نجد أن : ق(∠ أ) = ق(∠ ب) و هما فى وضع التبادل

∴ أ د // جـ ب

تمارين على البرهان الاستدلالى



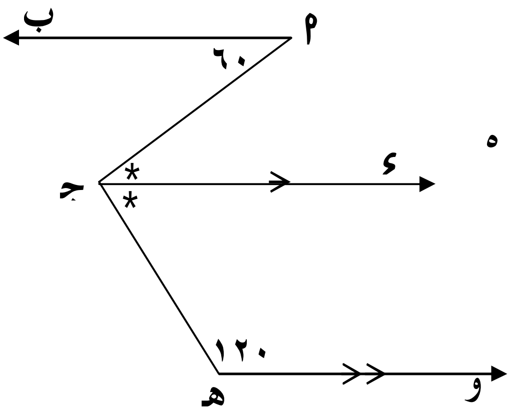
[١] فى الشكل المقابل : *

م ∈ $\overleftrightarrow{}$ ٕ ب ، $\overrightarrow{}$ م هـ ⊥ $\overleftrightarrow{}$ ٕ ب ، ق{∠ جـ م ب} = ١٤٠

، ق{∠ ب م د} = ٤٠

١- **هل** $\overrightarrow{}$ م جـ ، $\overrightarrow{}$ م د على استقامة واحدة ؟ و لماذا ؟

٢- **أوجد :** ق{∠ هـ م د}



[٢] فى الشكل المقابل :

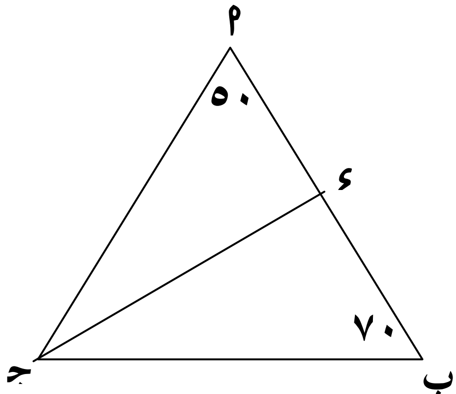
ق{∠ ٕ جـ ء} = ق{∠ ء جـ هـ}

، $\overrightarrow{}$ جـ ء] $\overrightarrow{}$ هـ و ، ق{∠ ٕ} = ٦٠ °

، ق{∠ هـ} = ١٢٠ °

١ - أوجد : ق{∠ ء جـ هـ}

٢ - اثبت أن : $\overrightarrow{}$ ٕ ب] $\overrightarrow{}$ جـ ء

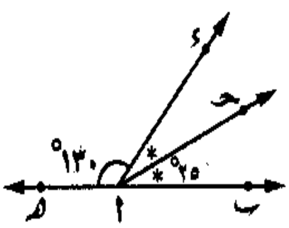


[٣] فى الشكل المقابل :

ق{∠ٕ} = ٥٠ ° ، ق{∠ ب} = ٧٠ °

، $\overrightarrow{}$ جـ ء ينصف ∠ ٕ جـ ب

أوجد : ق{∠ ب ء جـ}

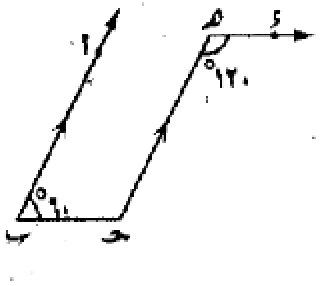


[٤] فى الشكل المقابل :

ق(∠ب ٕ جـ) = ٢٥° ، $\overrightarrow{}$ ٕجـ ينصف ∠ب ٕء

، ق(∠ء ٕ هـ) = ١٣٠°

أثبت أن : النقط ب ، ٕ ، هـ على استقامة واحدة.

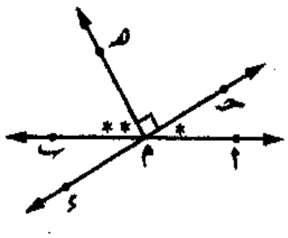


[٥] فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ب أ}} \,//\, \overline{\text{حـ هـ}}$ ، ق(∠ أ ب حـ) = ٦٠°

، ق(∠ ء هـ حـ) = ١٢٠°

أثبت أن : $\overrightarrow{\text{هـ ء}} \,//\, \overline{\text{ب حـ}}$

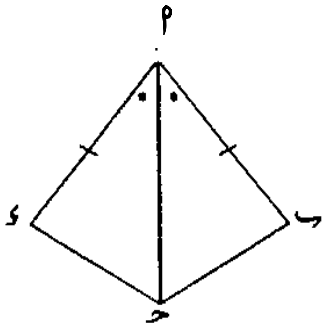


[٦] فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـ ء}} = \{\text{م}\}$ ، $\overrightarrow{\text{م هـ}} \perp \overrightarrow{\text{م حـ}}$

، ق(∠ أ م حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ هـ م ب)

أوجد : ق(∠ هـ م أ)

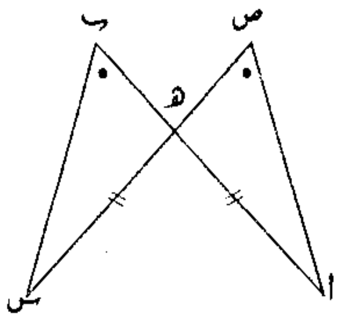


[٧] فى الشكل المقابل :

الشكل ا ب حـ ء فيه ا ب = ا ء

$\overrightarrow{\text{ا حـ}}$ ينصف ب $\hat{\text{ا}}$ ء

أثبت أن ب حـ = ء حـ



[٨] فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{ا ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{س ص}} = \{\text{هـ}\}$

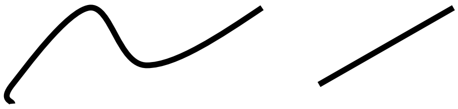
ا هـ = س هـ ، ق($\hat{\text{ص}}$) = ق($\hat{\text{ب}}$)

أثبت أن Δ ا س ص ≡ Δ س ب هـ

، ص هـ = ب هـ

المضلعات

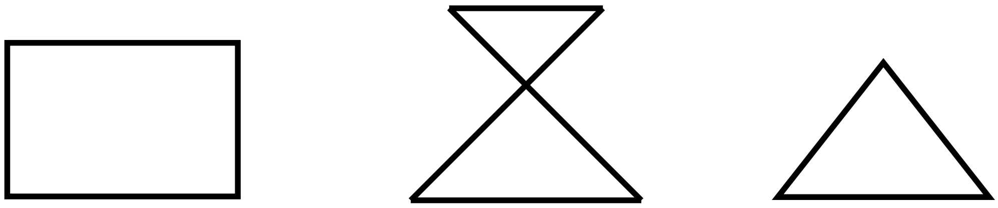
(١) **الخط البسيط : هو خط لا يقطع نفسه .**



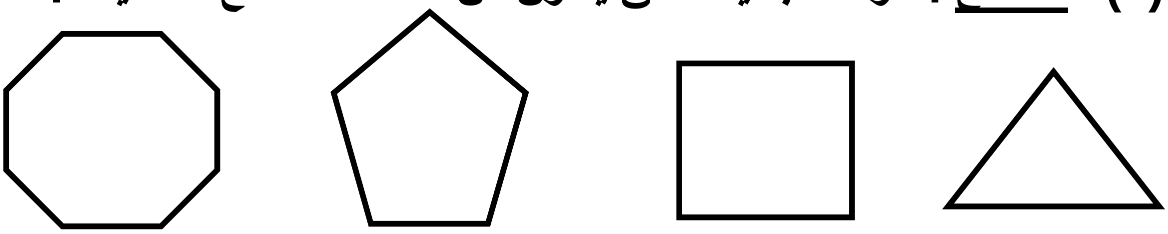
(٢) **الخط غير البسيط : هو خط يقطع نفسه مرة أو أكثر .**

(١) **الخط المفتوح : هو خط لا ينتهي عند النقطة التي بدأ منها .**

(٢) **الخط المغلق : هو خط ينتهي عند النقطة التي بدأ منها .**



(٣) **المضلع : هو خط بسيط مغلق يتكون من اتحاد عدة قطع مستقيمة .**



مضلع ثلاثي   رباعي   خماسي   سداسي

(٤) **رأس المضلع : هي نقطة ناتجة من تقاطع ضلعين (قطعتين في المضلع)**

(٥) **ضلع المضلع : هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين متتاليين .**

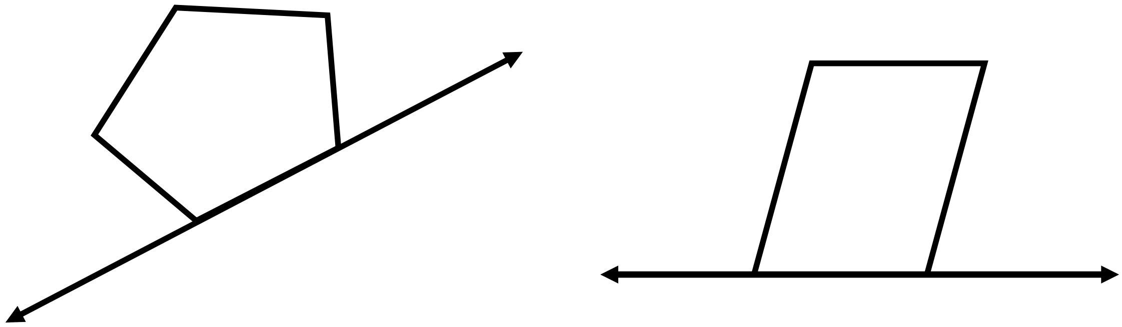
(٦) **قطر المضلع : هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين .**

ملحوظة : عدد أقطار المثلث = صفر ، عدد أقطار الشكل الرباعي = ٢

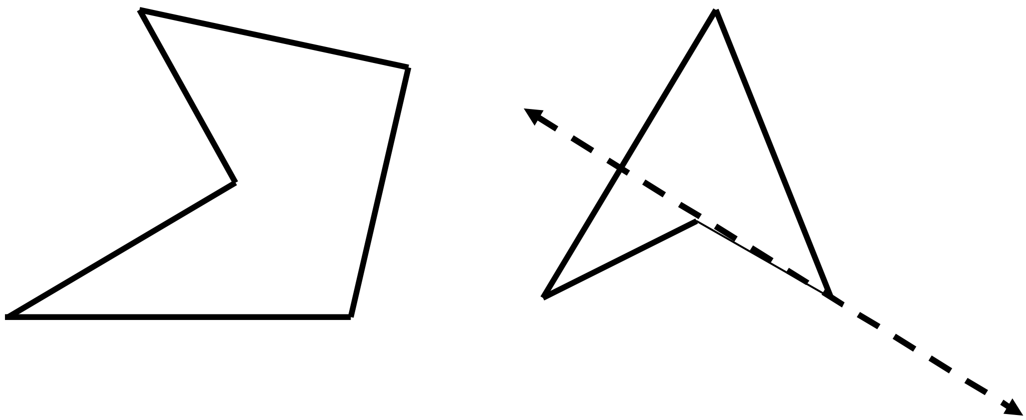
عدد أقطار الشكل الخماسي = ٥ ، عدد أقطار الشكل السداسي = ٩

(٧) أنواع المضلع :

(أ) المضلع المحدب : هو مضلع إذا مر برأسين متتاليين مستقيم تكون بقية الرؤوس واقعة في أحد جانبي هذا المستقيم .
و قياس كل زاوية من زواياه أقل من ١٨٠ ْ



(ب) المضلع المقعر : إذا مر مستقيم برأسين متتاليين و كانت بقية الرؤوس تقع علي جانبي المستقيم و قياس إحدى زواياه أكبر من ١٨٠ ْ



(١٠) عدد رؤوس المضلع = عدد أضلاعه = عدد زواياه

(١١) محيط المضلع = مجموع أطوال أضلاعه

سؤال للتفكير

أكمل ما يأتي :

(١) المضلع هو خط ٠٠٠٠٠ يتكون من عدة ٠٠٠٠٠ تسمي ٠٠٠٠٠٠
(٢) القطر هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسيين ٠٠٠٠٠٠٠
(٣) الضلع هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسيين ٠٠٠٠٠٠٠
(٤)الخط البسيط هو ٠٠٠٠٠ ، الخط غير البسيط هو ٠٠٠٠
(٥) عدد أقطار الشكل الرباعى = ٠٠٠٠ ، عدد أقطار المضلع السداسى = ٠٠٠
(٦) عدد رؤوس المضلع = عدد ٠٠٠٠ = عدد ٠٠٠٠٠

* إيجاد مجموع قياسات الزوايا الداخلة لأي مضلع *

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الذي عدد أضلاعه ن
= (ن ـ ٢) × ١٨٠ °

مثلا : المضلع الثلاثي (المثلث) : ن = ٣
مجموع قياسات زواياه = (٣ ـ ٢) × ١٨٠
= ١ × ١٨٠ = ١٨٠
المضلع الرباعي : ن = ٤
مجموع قياسات زواياه = (٤ ـ ٢) × ١٨٠
= ٢ × ١٨٠ = ٣٦٠
المضلع الخماسي : ن = ٥
مجموع قياسات زواياه = (٥ ـ ٢) × ١٨٠
= ٣ × ١٨٠ = ٥٤٠
و هكذا باقي المضلعات ....

- **المضلع المنتظم** : هو مضلع يتوفر فيه شرطان معاً
(١) جميع أضلاعه متساوية في الطول
(٢) جميع زواياه متساوية في القياس

- **قياس الزاوية الداخلة للمضلع المنتظم :**

قياس كل زاوية من زواياه مضلع منتظم عدد أضلاعه ن
= $\frac{(\text{ن} - ٢)}{\text{ن}}$ × ١٨٠

مثلا : المضلع الثلاثي المنتظم (المثلث المتساوي الأضلاع)
قياس كل زاوية من زواياه = $\frac{(\text{ن} - ٢)}{\text{ن}}$ × ١٨٠
= $\frac{(٣ - ٢)}{٣}$ × ١٨٠
= $\frac{١}{٣}$ × ١٨٠ = ٦٠

المضلع الرباعي المنتظم (المربع) : ن = ٤

قياس كل زاوية من زواياه = $\frac{(٤ - ٢)}{٤} \times ١٨٠$

$= \frac{٢}{٤} \times ١٨٠ = ٩٠$

المضلع السداسي المنتظم (المسدس): ن = ٦

قياس كل زاوية من زواياه = $\frac{(٦ - ٢)}{٦} \times ١٨٠$

$= \frac{٤}{٦} \times ١٨٠ = ١٢٠$

مثال : مضلع ثماني منتظم طول ضلعه = ٦ سم أوجد قياس زاويته ومحيطه

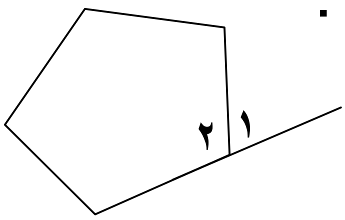
الحل :

مضلع ثماني منتظم : ن = ٨ ، قياس زاويته = $\frac{(ن - ٢)}{ن} \times ١٨٠$

$= \frac{(٨ - ٢)}{٨} \times ١٨٠ = \frac{٦}{٨} \times ١٨٠ = ١٣٥$

محيط المضلع الثماني المنتظم = ن × طول ضلعه = ٨ × ٦ = ٤٨ سم

- مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع عدد أضلاعه ن :

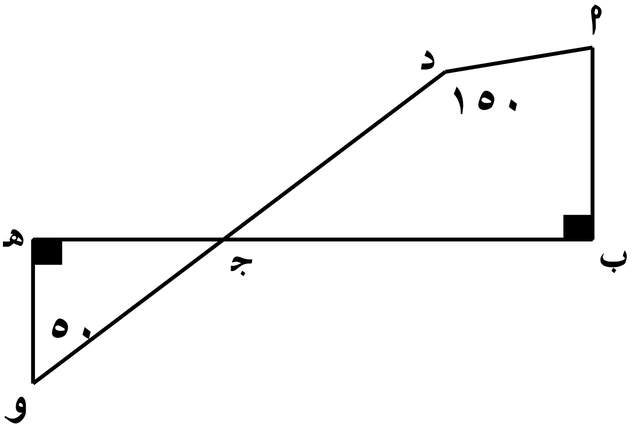


عند أى رأس من رءوس مضلع نجد أن :

مجموع قياسى الزاويتين الداخلة و الخارجة = ١٨٠ °

ق(∠ ١) + ق(∠ ٢) = ١٨٠ °

> لأى مضلع محدب عدد أضلاعه ن :
> مجموع قياسات الزوايا الخارجة + مجموع قياسات الزوايا الداخلة = ن × ١٨٠
>
> مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب عدد أضلاعه ن = ٣٦٠ °



مثال : فى الشكل المقابل :

ق(∠م)=٨٠ ° ، ق(∠ د)= ١٥٠

، ق(∠ب)= ق(∠هـ)=٩٠ °

، ق(∠و)= ٥٠ °

أوجد : ق(∠م)

الحل :

فى △ جـ هـ و : ∵ ق(∠هـ)=٩٠ ° ، ق(∠و)= ٥٠ °

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ ــ (٩٠ + ٥٠) = ١٨٠ -١٤٠ = ٤٠

∵ ب هـ ∩ د و = { جـ }

∴ ق(∠ د جـ و) = ق(∠ هـ جـ و) = ٤٠ بالتقابل بالرأس

∵ مجموع الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠ °

∴ ق(∠م) = ٣٦٠ ــ (٩٠ + ٤٠ + ١٥٠)

= ٣٦٠ ــ ٢٨٠= ٨٠

ملاحظة :

عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه س° = $\frac{٣٦٠°}{١٨٠ - س°}$

مثال : مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخلة ١٤٤ ° ، أوجد عدد أضلاعه .

الحل :

عدد أضلاع المضلع المنتظم الذى قياس إحدى زواياه ١٤٤ ° = $\frac{٣٦٠°}{١٨٠ - ١٤٤}$

= $\frac{٣٦٠}{٣٦}$

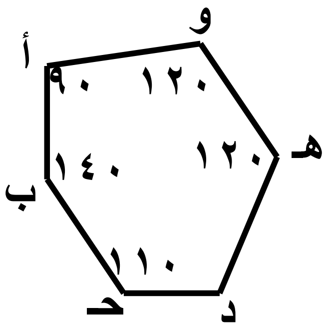
= ١٠ أضلاع

سؤال للتفكير

(١) مضلع سداسي منتظم طول ضلعه ٧ سم أوجد مجموع قياسات زواياه و قياس كل زاوية من زواياه ثم أوجد محيطه .

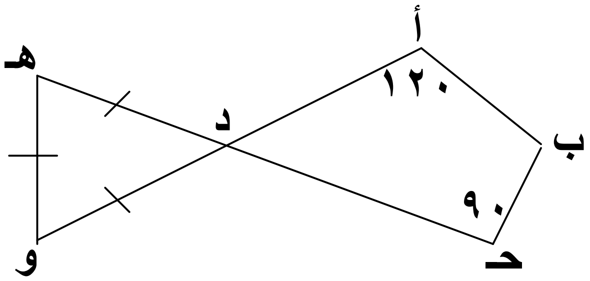
(٢) أكمل ما يأتي :
(أ) المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ١٢ يكون قياس زاويته ٠٠٠٠ °
(ب) المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه ٨ يكون مجموع زواياه ٠٠٠٠ °
(جـ) مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخله ١٢٠ ° عدد أضلاعه ٠٠٠٠

(٣) في الشكل المقابل : أ ب حـ د هـ و شكل سداسي
فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم
حـ د = ٣، ٥ سم ، د هـ = ٢ سم
هـ و = ١، ٥ سم ، و أ = ٣ سم
أوجد ق ($\hat{د}$) ثم أوجد محيط الشكل



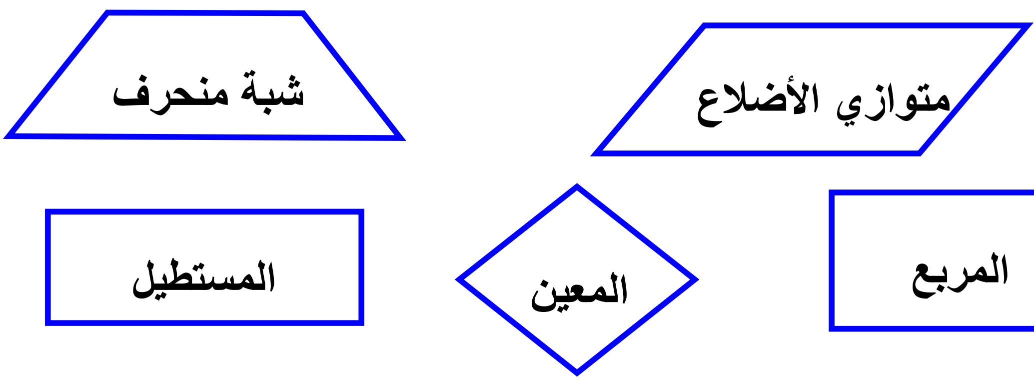
(٤) مضلع ثمانى منتظم طول ضلعه ٥ سم أوجد قياس زاويته و محيطه.

(٥) فى الشكل المقابل :
د هـ و مثلث متساوى الاضلاع
أوجد : ق(∠ب)

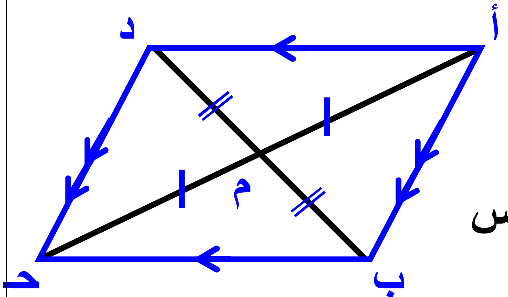


ا لشــكل الــربــاعــي

الشكل الرباعي : هو اتحاد أربعة قطع مستقيمة تسمي أضلاعه .



(١) متوازي الأضلاع : هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين .



خواصه :

(١) كل ضلعين متقابلين متساويين في الطول

أ ب = د حـ ، أ د = ب حـ

(٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتين في القياس

ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{حـ}$) ، ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{د}$)

(٣) مجموع آي زاويتين متتاليتين يساوي ١٨٠ °

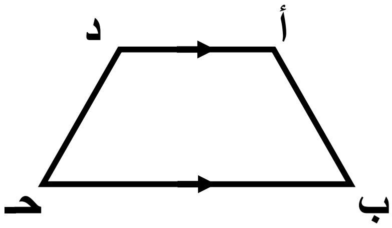
مثلا : ق ($\hat{أ}$) + ق ($\hat{ب}$) = ١٨٠ ، ق ($\hat{ب}$) + ق ($\hat{حـ}$) = ١٨٠

(٤) القطران ينصف كل منهما الآخر

م أ = م حـ ، م ب = م د

---

(٢) الشبة المنحرف : هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان والضلعين الآخرين غير متوازيين .



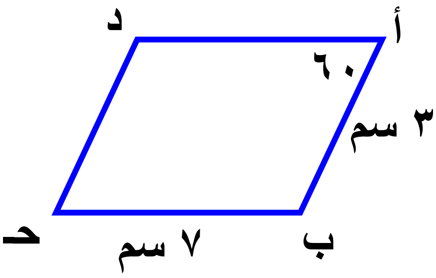
إذا كان أ ب حـ د شبة منحرف

فإن : أ د // ب حـ

حقيقة :

آي شكل رباعي فيه ضلعين متقابلين متوازيان متساويان في الطول يكون الشكل متوازي أضلاع .

مثال : أكمل ما ياتي :



أ ب حـ د متوازي أضلاع

ب حـ = ... سم

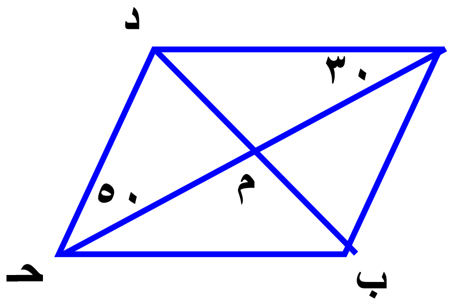
حـ د = ... سم

ق ($\hat{حـ}$) = ... °

ق ($\hat{ب}$) = ... °

محيط متوازى الاضلاع = (... + ...) × ٢ = ...

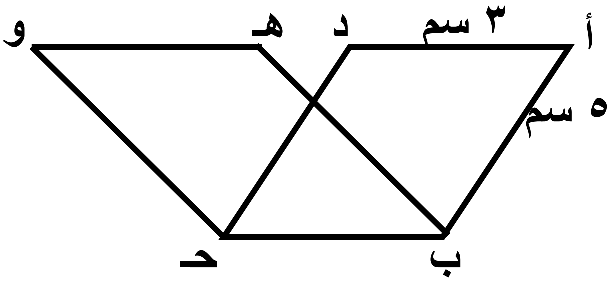
مثال : الشكل المقابل : أ ب حـ د متوازي أضلاع أ حـ = ١٢ سم ، ب د = ٩ سم
ق(د أ̂ حـ) = ٣٠ ° ،
ق(أ حـ̂ د) = ٥٠ °



فإن :

(١) م ب = ... = ... سم
(٢) م أ = ... = ٦ سم
(٢) ق (أ حـ̂ ب) = ... °
(٣) ق (ب أ̂ حـ) = ... °
(٤) ق (أ ب̂ حـ) = ق (أ د̂ حـ) = ... °

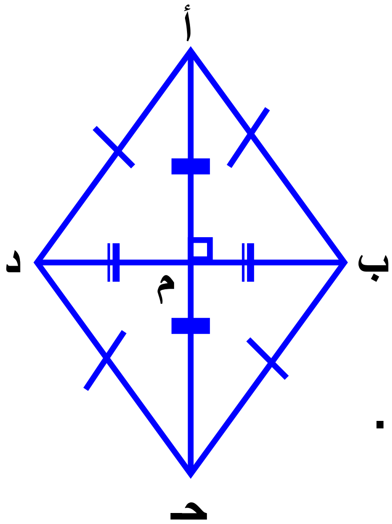
مثال : في الشكل الموضح :
أ ب حـ د ، هـ ب حـ ومتوازيا أضلاع
أ ب = هـ ب = ٥ سم
أ د = ٣ سم أوجد طول $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{حـ و}}$



---

* حالات خاصة لمتوازي الأضلاع *

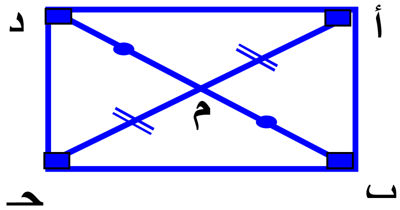
(١) **المعين** : هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول .



خواصه :

(١) الأضلاع الأربعة متساوية في الطول .
(٢) القطران متعامدان وغير متساويين في الطول .
(٣) القطران ينصفان زاويتي الرأس الوصل بينهما .
(٤) له خواص متوازي الأضلاع .

(٢) المستطيل : هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .



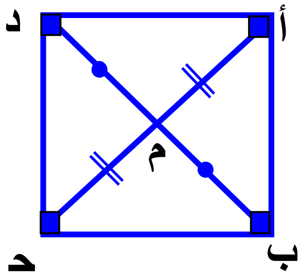
خواصه :

(١) زواياه الأربعة قائمة .

(٢) القطران متساويان في الطول وغير متعامدان

(٣) له خواص متوازي الأضلاع

(٤) المربع : هو معين إحدى زواياه قائمة .



أو هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان في الطول

أو هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران تساويان في الطول و إحدى زواياه قائمة.

خواصه :

(١) القطران متساويان في الطول لأنه مستطيل

(٢) القطران متعامدان لأنه معين

(٣) أضلاعه الأربعة متساوية في الطول لأنه معين

(٤) زواياه الأربعة قائمة

(٥) القطران ينصفان زاويا الرأس لأنه معين

(٦) له خواص متوازي الأضلاع

• متى يكون الشكل الرباعى متوازى الأضلاع ؟

يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا تحققت إحدى الحالات الآتية :

(١) إذا توازى فيه كل ضلعين متقابلين .

(٢) إذا تساوى فيه طولا كل ضلعين متقابلين .

(٣) إذا تساوى فيه قياسا كل زاويتين متقابلتين .

(٤) إذا توازى ضلعان متقابلان فيه وتساويا فى الطول .

(٥) إذا نصف القطران كلاً منهما الآخر .

• حقيقة هندسية : فى أى شكل رباعى إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فيه كان الشكل متوازى أضلاع .

عزيزى الطالب لاحظ عند حل التمارين :

• لإثبات أن الشكل الرباعى (مستطيل أو معين أو مربع) .

أثبت أولا : أن الشكل متوازى أضلاع

⇐ **لإثبات أن متوازى الأضلاع مستطيل** أثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :

(١) إحدي زواياه قائمة . (٢) قطراه متساويان فى الطول .

⇐ **لإثبات أن متوازى الأضلاع معين** أثبت إحدى الخاصيتين الآتيتين :

(١) كل ضلعان متجاوران فيه متساويان فى الطول . (٢) قطراه متعامدان .

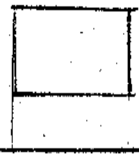
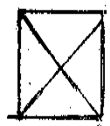
⇐ **لإثبات أن متوازى الأضلاع مربع** أثبت إحدى الخواص الآتية :

(١) إحدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متساويان فى الطول .

(٢) إحدى زواياه قائمة وقطراه متعامدان .

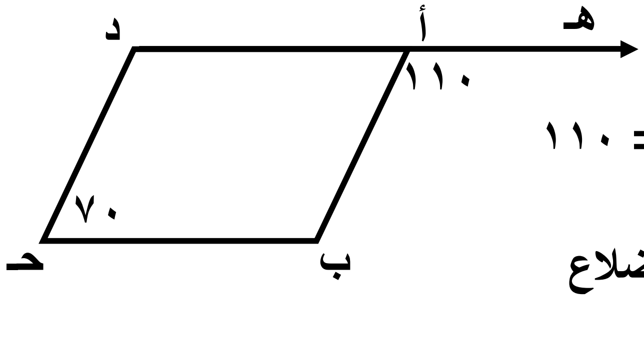
(٣) قطراه متساويان فى الطول ومتعامدان .

ملخص عن متوازى الأضلاع وحالاته الخاصة

الشكل	تعريفه	أضلاعه	زواياه	قطراه
متوازى الأضلاع 	شكل رباعى كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان	كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول	كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس	كل منهما ينصف الآخر وغير متساويين فى الطول بوجه عام .
المستطيل 	متوازى أضلاع قياس إحدى زواياه ٩٠°	كل ضلعين متقابلين متســاويان فى الطول	قياس كل منها ٩٠°	متساويان فى الطول وينصف كل منهما الآخر .
المعين 	متوازى أضلاع أضلاعه متساوية فى الطول	متساوية فى الطول	كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس	كل منهما ينصف الآخر ومتعامدان وكل منهما ينصف زاويتى الرأسين الواصل بينهما وغير متساويين فى الطول
المربع 	مستطيل أضلاعه متساوية فى الطول.	متساوية فى الطول	قياس كل منها ٩٠°	كل منهما ينصف الآخر ومتعامدان ومتساويان فى الطول وكل منهما يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع أى ضلع من أضلاع المربع .

مسائل علي متوازي الأضلاع

[١] في الشكل المقابل :



$\overleftrightarrow{أ د} \parallel \overline{ب حـ}$ ، ق(هـ أ $\hat{ب}$) = ١١٠

ق(∠ حـ) = ٧٠

أثبت أن : أ ب حـ د متوازي أضلاع

البرهان :

∵ أ د // ب حـ ، أ ب قاطع لهما

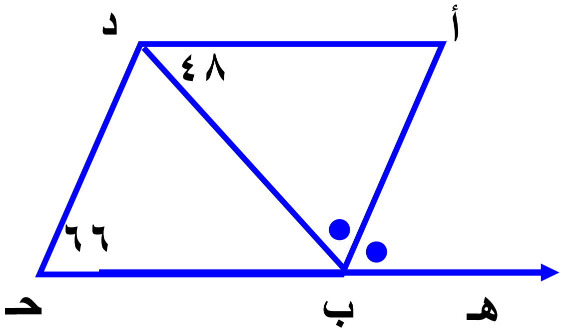
∴ ق(هـ أ̂ ب) = ق (ب̂) = ١١٠ بالتبادل

∵ ق (ب̂) + ق (حـ̂) = ١٨٠ وهما داخلتان وفي جهة واحدة

∵ أ ب // د حـ ، أ د // ب حـ

∴ أ ب حـ د متوازي أضلاع

مثال : في الشكل الموضح :



أ د // ب حـ ، ب أ ينصف د ب̂ هـ

أثبت أن : أ ب حـ د متوازي أضلاع

البرهان :

∵ أ د // ب حـ ، د ب قاطع لهما

∴ ق (أ د̂ ب) = ق (د ب̂ حـ) = ٤٨ بالتبادل

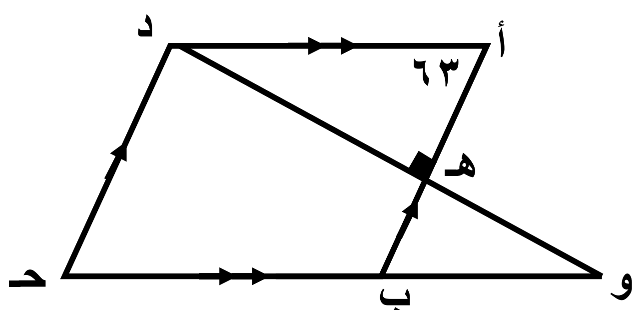
∵ ب ∈ حـ هـ ∴ ق (د ب̂ هـ) = ١٨٠ ـ ٤٨ = ١٣٢

∵ ب أ ينصف د ب̂ هـ

∴ ق (أ ب̂ هـ) = ق (حـ̂) = ١٣٢ ÷ ٢ = ٦٦ وهما متناظرتان

∵ أ ب // د حـ ، أ د // ب حـ ∴ أ ب حـ د متوازي أضلاع

مثال : في الشكل المقابل :



أ ب حـ د متوازي أضلاع

د هـ ⊥ أ ب

، د هـ ∩ أ ب = { هـ }

، د هـ ∩ حـ ب = { و }

، ق (أ̂) = ٦٣

أوجد قياس الزوايا د حـ̂ ب ، أ د̂ و ، ب و̂ د

البرهان :

∵ أ ب حـ د متوازي أضلاع ، ق($\hat{أ}$) = ٦٣

∴ ق (ب $\hat{حـ}$ د) = ق ($\hat{أ}$) = ٦٣ أولا

في المثلث أ د هـ :

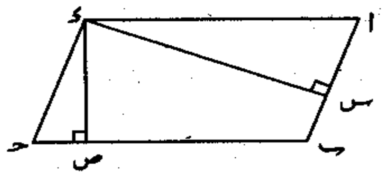
∵ ق($\hat{أ}$) = ٦٣ ، ق (أ $\hat{هـ}$ د) = ٩٠

∴ ق(أ $\hat{د}$ هـ) = ق (أ $\hat{د}$ و) = ١٨٠ ـ (٦٣ ـ ٩٠) = ٢٧ ثانيا

∵ $\overline{أ د}$ // $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{د و}$ قاطع لهما

∴ ق(حـ $\hat{و}$ د) = ق(أ $\hat{د}$ و) = ٢٧ بالتبادل ثالثا

☺ **مثال (١) : فى الشكل المقابل :**



$\overline{اس}$ ⊥ $\overline{اب}$ ، $\overline{ءص}$ ⊥ $\overline{بحـ}$

أثبت أن : ق($\hat{ا}$) = ق(س $\hat{ء}$ ص)

◄ البرهان ►

∵ ا ب حـ ء متوازى أضلاع

∴ ق($\hat{ا}$) + ق($\hat{ب}$) = ١٨٠° ...... (١)

فى الشكل س ب ص ء :

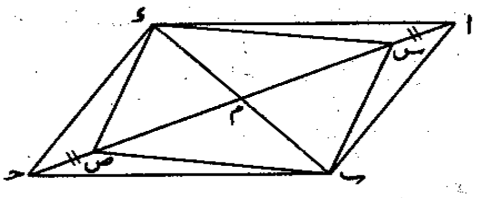
∵ مجموع قياسات زواياه الداخلة = (٤ − ٢) × ١٨٠° = ٣٦٠°

∴ ق($\hat{ب}$) + ق(س $\hat{ء}$ ص) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠°)

= ٣٦٠° − ١٨٠° = ١٨٠° .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق($\hat{ا}$) = ق(س $\hat{ء}$ ص)

مثال :(٢) فى الشكل المقابل :



إذا كان ا ب حـ ء متوازى أضلاع

س ، ص ∈ $\overline{احـ}$ حيث ا س = ص حـ

أثبت أن : س ب ص ء متوازى أضلاع

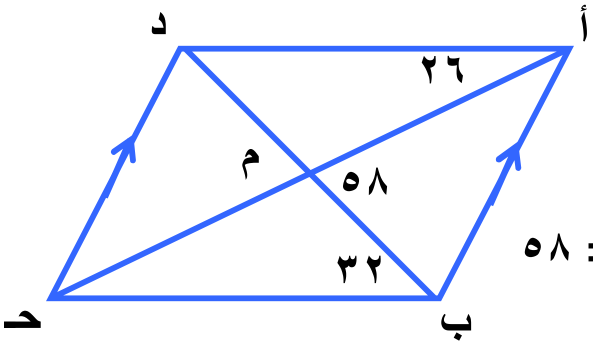
◄ البرهان ►

∵ ا ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ ا م = م حـ ، ب م = م ء

∵ ا س = حـ ص ∴ س م = م ص

∴ س ب ص ء متوازى أضلاع لأن القطران ينصف كلاً منهما الآخر .

[٤] في الشكل المقابل :



م نقطة تقاطع قطري الشكل الرباعي

أ ب حـ د ، أ ب] د حـ ،

ق(∠ د أ حـ) = ٢٦ ، ق(∠ أ م ب) = ٥٨

ق(∠ أ ب حـ) = ٣٢

برهن أن : أ ب حـ د متوازي أضلاع

البرهان : ∵ ∠ أ م ب خارجة عن المثلث م ب حـ

∴ ق(∠ م حـ ب) = ٥٨ ـ ٣٢ = ٢٦

∵ ق(∠ د أ حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = ٢٦ وهما متبادلتان

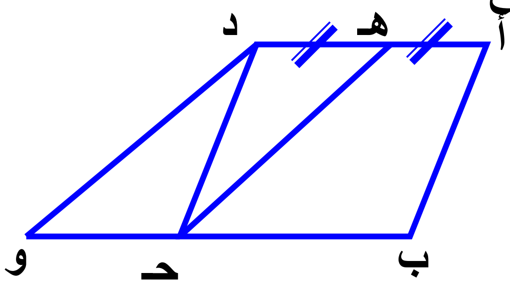
∴ أ د // ب حـ

∵ أ د // ب حـ ، أ ب // د حـ

∴ أ ب حـ د متوازي أضلاع

سؤال للتفكير

[١] فى الشكل المقابل : أ ب حـ د متوازي أضلاع



، هـ منتصف أ د ، و ∌ ب حـ

، و ∈ ب حـ بحيث ب حـ = ٢ حـ و

أثبت أن : الشكل د هـ حـ و متوازي أضلاع

---

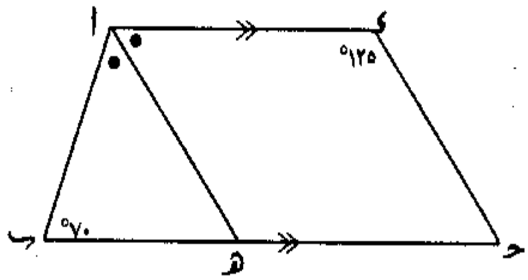
[٢] أ ب حـ د متوازي أضلاع ، س ∈ أ د ، ص ∈ ب حـ بحيث

ب س تنصف $\hat{ب}$ ، د ص تنصف $\hat{د}$

أثبت أن : الشكل ب س د ص متوازي أضلاع

---

[٣] فى الشكل المقابل :



اى // حـ هـ ، ق(ب) = °٧٠

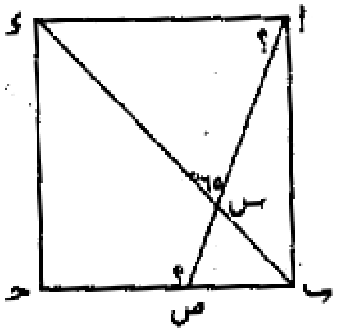
، ق(ا ى حـ) = °١٢٥

، اهـ ينصف ب ا ى

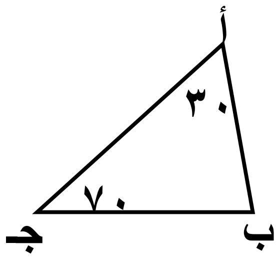
أثبت أن : الشكل ا ى حـ هـ متوازى أضلاع

[٤] في الشكل المقابل :

ا ب حـ ء مربع ، رسم ا س يقطع
ب ء في س ، ويقطع ب حـ في ص
بحيث ق(ا س ء) = ٦٥°
أوجد : ق(س أ ء) ، ق(حـ ص س)



المثلث

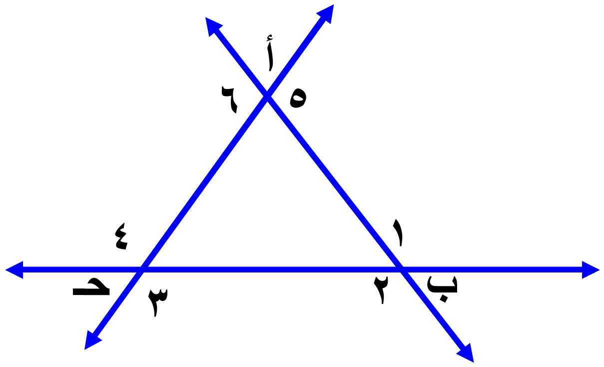


نظرية : مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث يساوي ١٨٠ °

ق(∠ب)= ١٨٠ ـ (٣٠ + ٧٠) = ١٨٠ ـ ١٠٠ = ٨٠

ملاحظة : إذا علم قياس زاويتين يمكن إيجاد قياس الزاوية الثالثة

الزاوية الخارجة للمثلث: هي زاوية ناتجة من امتداد ضلع وتقاطع ضلع آخر فيه

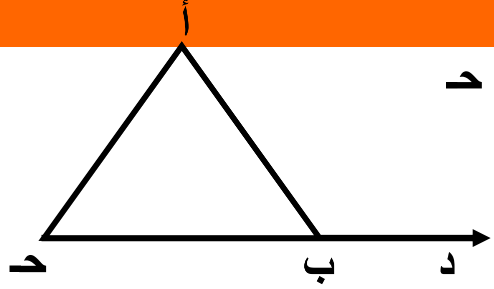


الزوايا الخارجة عن المثلث أ ب حـ

(١̂ ، ٢̂ ، ٣̂ ، ٤̂ ، ٥̂ ، ٦̂)

نتائج علي النظرية :

[١] قياس أي زاوية خارجة للمثلث تساوي مجموع قياس الزاويتين الداخلتين عدا قياس المجاورة لها .



∵ ∠ أ ب د زاوية خارجة عن المثلث أ ب حـ

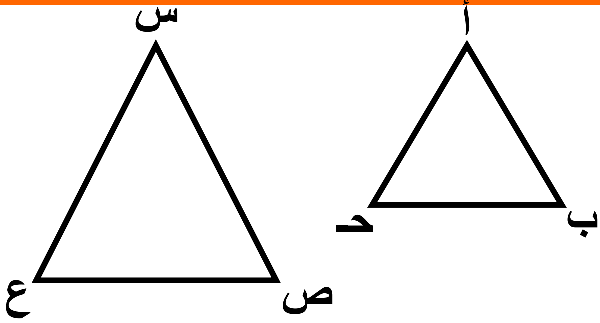
∴ ق(أ ب̂ د) = ق(أ̂) + ق(حـ̂)

ملحوظة :

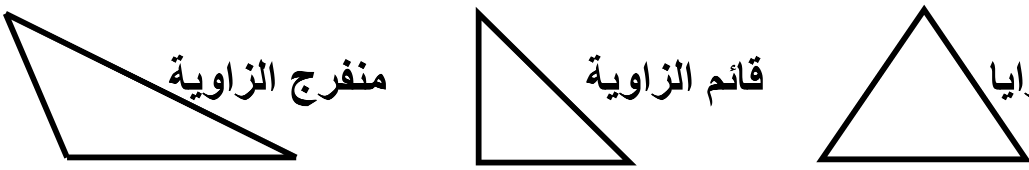
قياس الزاوية الخارجة للمثلث أكبرمن قياس أى زاوية للمثلث عدا المجاورة لها

[٢] إذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر في القياس كان قياس الزاوية الثالثة من المثلث الأول مساوياً لقياس الزاوية الثالثة من المثلث الآخر

إذا كان: ق (ب^) = ق (ص^)
، ق (حـ^) = ق (ع^)
فإن : ق (أ^) = ق (س^)



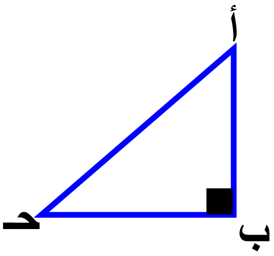
[٣] في آي مثلث توجد زاويتان حادتان علي الأقل .



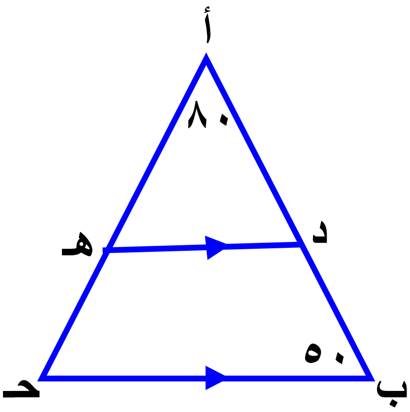
حاد الزوايا قائم الزاوية منفرج الزاوية

[٤] إذا ساوي قياس زاوية في مثلث مجموع قياس الزاويتين الآخرين كان المثلث قائم الزاوية .

إذا كان ق (ب^) = ق (أ^) + ق (حـ^)
فإن ق (ب^) = ٩٠ ْ
لان ق(أ^) + ق(ب^) + ق(حـ^) = ١٨٠ ْ

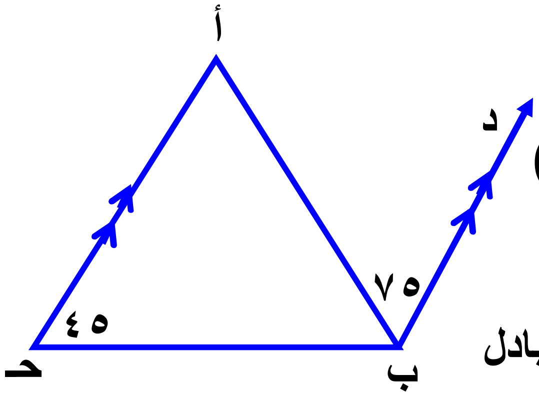


مثال : في الشكل المقابل :
أ ب حـ مثلث فيه ق (أ^) = ٨٠ ْ
ق (ب^) = ٥٠ ، د هـ // ب حـ
احسب قياسات زوايا كل من المثلثين
أ د هـ ، أ ب حـ بالدرجات .



البرهان : △ أ ب حـ
∵ مجموع الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠
∴ ق (حـ^) = ١٨٠ ـ (٨٠ + ٥٠)
= ١٨٠ ـ ١٣٠ = ٥٠
∵ د هـ // ب حـ ، أ ب قاطع لهما
∴ ق (أ د^ هـ) = ق (أ ب^ حـ) = ٥٠ بالتناظر
∴ ق (أ هـ^ د) = ١٨٠ ـ (٨٠ + ٥٠)
= ١٨٠ ـ ١٣٠ = ٥٠

مثال : في الشكل المقابل :



ب د // حـ أ ، ق(د ب^ أ) = ٧٥

ق(حـ^) = ٤٥ ، احسب ق (أ ب حـ)

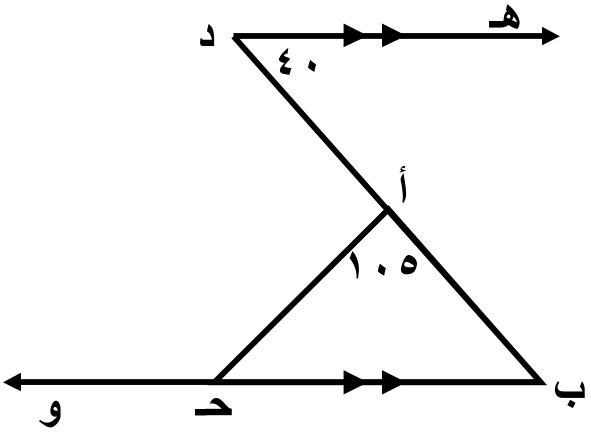
الحل : ∵ ب د // حـ أ ، أ ب قاطع لهما

∴ ق(د ب^ أ) = ق (ب أ^ حـ) = ٧٥ بالتبادل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ق (أ ب^ حـ) = ١٨٠ ـ (٧٥ + ٤٥) = ١٨٠ ـ ١٢٠ = ٦٠

مثال : في الشكل المقابل :



د هـ // ب و ، ق (د^) = ٤٠

، ق (ب أ^ حـ) = ١٠٥

احسب قياس ∠ أ حـ و

البرهان :

∵ د هـ // ب و ، د ب قاطع لهما

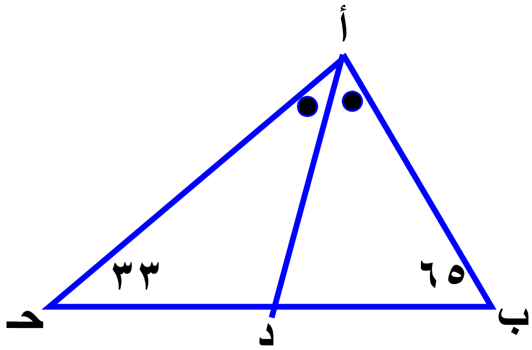
∴ ق(ه د^ ب) = ق (ب^) = ٤٠ بالتبادل

∵ أ حـ^ و خارجة عن المثلث أ ب حـ

∴ ق (أ حـ^ و) = ق (ب أ^ حـ) + ق (ب^)

= ١٠٥ + ٤٠ = ١٤٥

مثال : في الشكل الموضح :



أ ب حـ مثلث فيه

أ د ينصف ب أ^ حـ ، ق(ب^) = ٦٥

، ق (حـ^) = ٣٣

أوجد قياس كل من أ د^ ب ، أ د^ حـ

الحل : ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث أ ب حـ = ١٨٠

∴ ق(ب أ̂ حـ) = ١٨٠ ـ (٦٥ + ٣٣)

= ١٨٠ ـ ٩٨ = ٨٢

∵ أ د ينصف ب أ̂ حـ

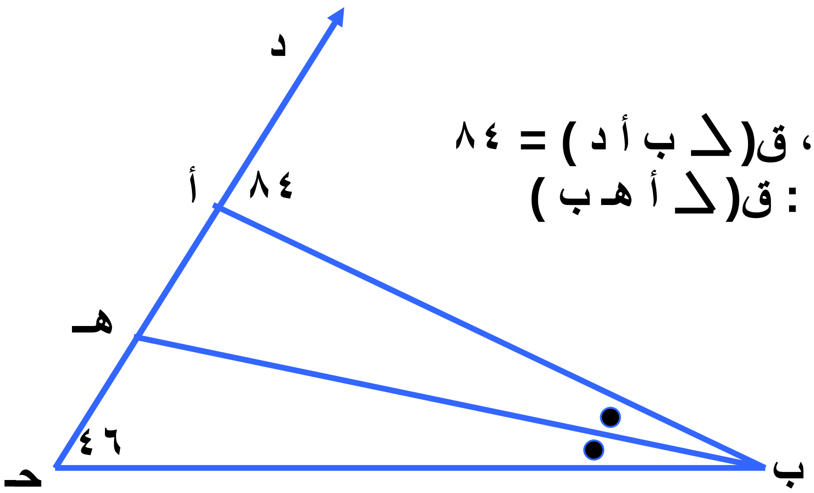
∴ ق (ب أ̂ د) = ق (حـ أ̂ د) = $\frac{٨٢}{٢}$ = ٤١

△ أ ب د : ق(أ د̂ ب) = ١٨٠ ـ (٦٥ + ٤١)

= ١٨٠ ـ ١٠٦ = ٧٤

△ أ د حـ : ق (أ د̂ حـ) = ١٨٠ ـ (٣٣ + ٤١)= ١٨٠ ـ ٧٤ = ١٠٦

مثال الشكل المقابل :



ب هـ ينصف ∠ أ ب حـ ، ق(∠ ب أ د) = ٨٤

، ق(∠ حـ) = ٤٦ أوجد : ق(∠ أ هـ ب)

البرهان :

∵ ∠ د أ ب خارجة عن المثلث أ ب حـ

∴ ق(∠ د أ ب) = ق(∠ ب) + ق(∠ حـ)

∴ ق(∠ ب) = ٨٤ ـ ٤٦ = ٣٨

∵ ب هـ ينصف ∠ ب

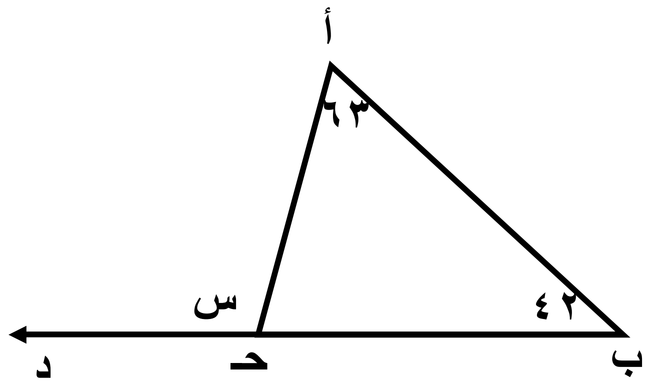
∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ هـ ب حـ) = $\frac{٣٨}{٢}$ = ١٩

∵ ∠ د أ ب خارجة عن المثلث أ ب هـ

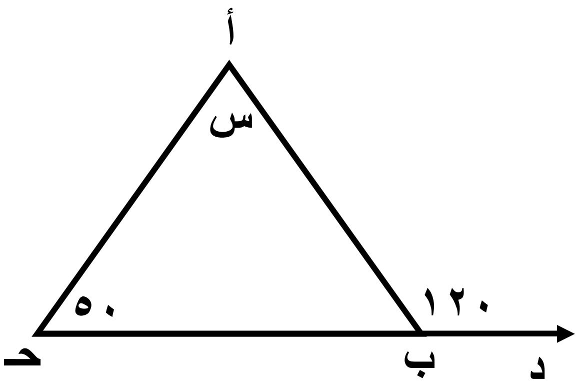
∴ ق(∠ أ هـ ب) = ٨٤ ـ ١٩ = ٦٥

سؤال للتفكير

(١) في الأشكال الآتية احسب قياس الزاوية س مع بيان السبب :



الشكل (١)



الشكل (٢)

---

[٢] في الشكل المقابل :

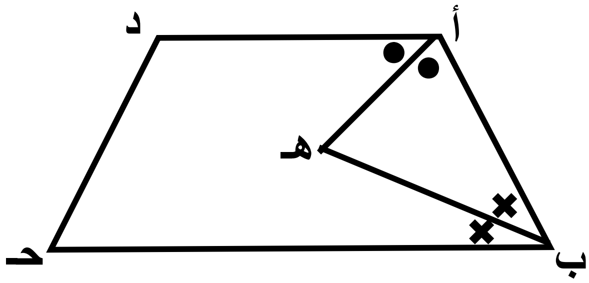
الشكل أ ب حـ د فيه

أ هـ ينصف ∠ ب أ د

، ب هـ ينصف ∠ أ ب حـ

، أ د [ب حـ

اثبت أن : أ هـ ⊥ ب هـ



---

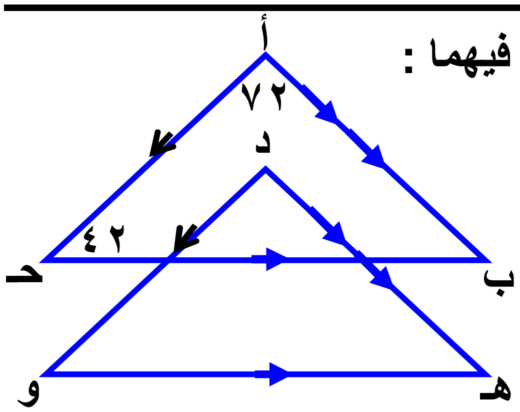
[٣] في الشكل المقابل : أ ب حـ ، د هـ و مثلثان فيهما :

أ ب // د هـ ، أ حـ // د و

، ب حـ // هـ و

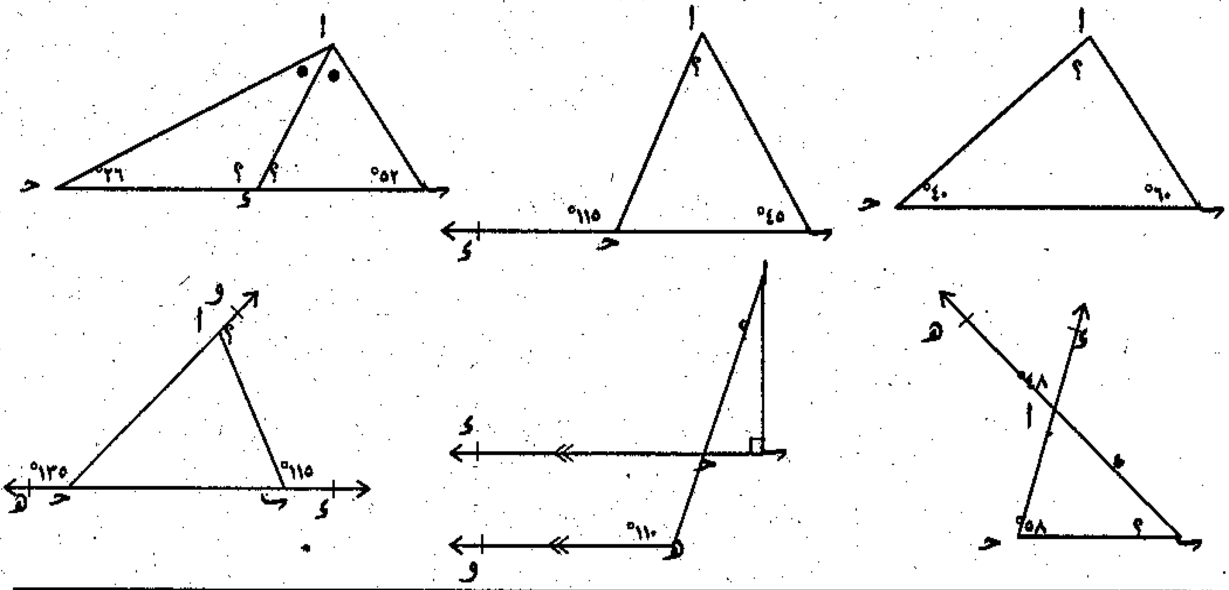
، ق(أ^) = ٧٢ ، ق (حـ^) = ٤٨

احسب قياسات الزوايا الداخلة للمثلث د هـ و



تمارين على الوحدة الأولى

١ في كل من الأشكال الآتية أوجد قياس الزاوية المجهولة والمشار إليها بعلامة استفهام (؟)



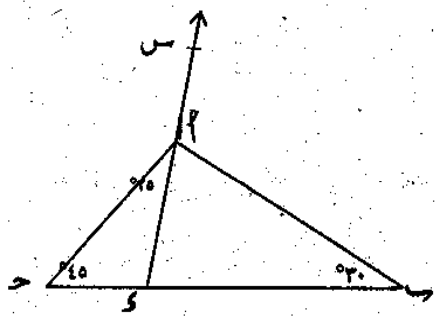
٢ في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه ق(∠ب) = ٣٠°

، ق(∠حـ) = ٤٥°، ا ∈ $\overleftrightarrow{\text{ى س}}$

، ق(∠حـ أ ى) = ٢٥°، أوجد بالبرهان

ق(∠ا ى ب) ، ق(∠س أ ب)



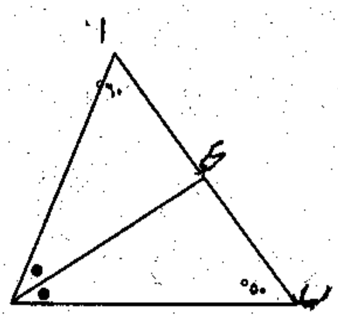
٣ في الشكل المقابل :

ا ب حـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠°

، ق(∠ب) = ٥٠°

، $\overleftrightarrow{\text{حـ ى}}$ ينصف ∠ا حـ ب

أوجد ق(∠ا ى حـ)



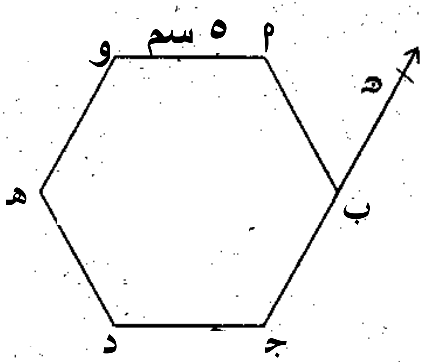
٤ في الشكل المقابل :

ا ب حـ ى هـ و سداسي منتظم ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{حـ ب}}$

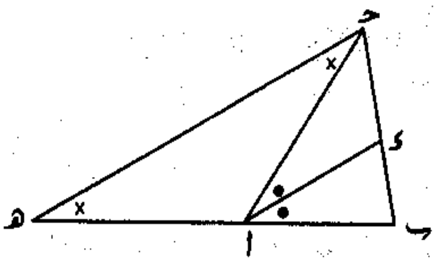
أوجد بالبرهان : ق(∠ا ب هـ)

وإذا كان او = ٥ سم

احسب محيط الشكل ا ب حـ ى هـ و



٥ **فى الشكل المقابل :**



ب أ ∩ حـ هـ = { هـ }

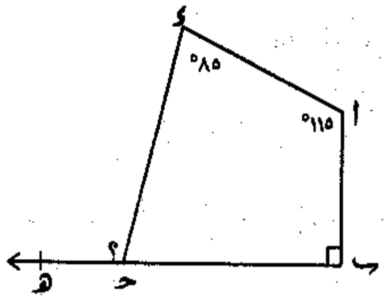
ق(أ حـ هـ) = ق(أ هـ حـ)

أ ء ينصف (ب أ حـ)

برهن أن : أ ء // هـ حـ

---

٦ **فى الشكل المقابل :**



أ ب حـ ء شكل رباعى فيه :

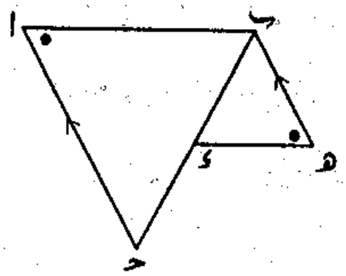
ق(أ) = °١١٥ ، ق(ب) = °٩٠

، ق(ء) = °٨٥ ، هـ ∈ ب حـ

أوجد ق(ء هـ حـ)

---

٧ **فى الشكل المقابل :**



إذا كان : حـ أ // هـ ب

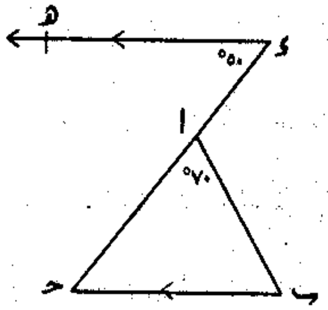
، ق(أ) = ق(هـ)

أثبت أن :

أ ب // هـ ء

---

٨ **فى الشكل المقابل :**



ء هـ // ب حـ

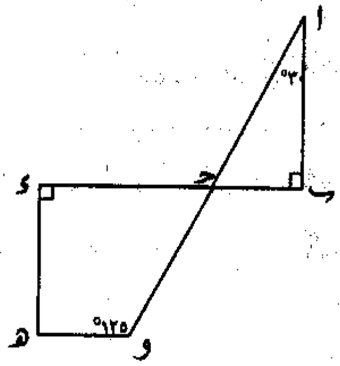
، ق(أ ء هـ) = °٥٠

، ق(ب أ حـ) = °٧٠

أوجد بالبرهان : ق(حـ) ، ق(ب)

---

٩ **فى الشكل المقابل :**



أ و ∩ ب ء = { حـ }

، ق(ب) = ق(ء) = °٩٠

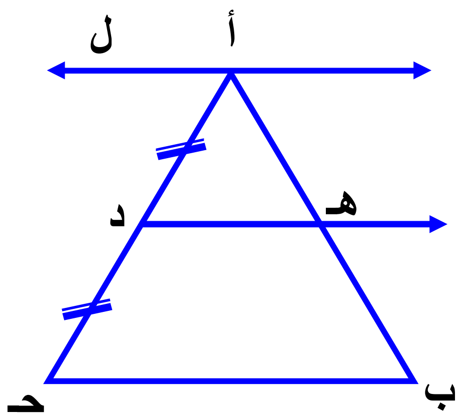
، ق(أ) = °٣٠ ، ق(و) = °١٢٥

أوجد بالبرهان : ق(ء حـ و) ، ق(هـ)

تابع المثلث

نظرية :

الشعاع المرسوم من منتصف ضلع موازيا أحدا لضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث



المعطيات : أ د = د حـ ، د هـ [ب حـ

العمل : نرسم مستقيما ل يمر بالنقطة أ بحيث ل [ب حـ

المطلوب : إثبات أن : أ هـ = هـ ب

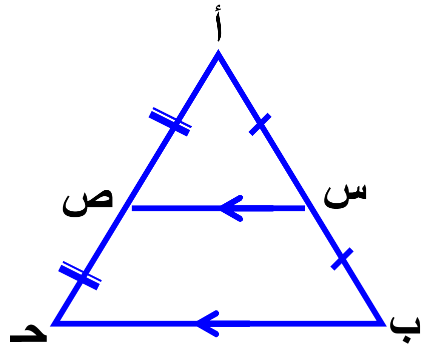
البرهان :

∵ ل [د هـ [ب حـ ، أ حـ ، أ ب قاطعان لها حيث أ د = د حـ

∴ أ هـ = هـ ب

نتيجة :

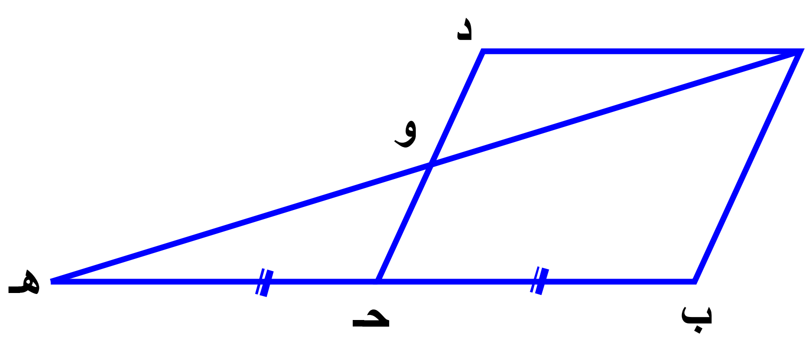
القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث .



∵ س ص مرسومة بين منصفي أ ب ، أ حـ

∴ س ص [ب حـ

مثال : في الشكل المقابل : أ



أ ب حـ د متوازي أضلاع

، ب حـ = حـ هـ

أثبت أن : أ و = و هـ

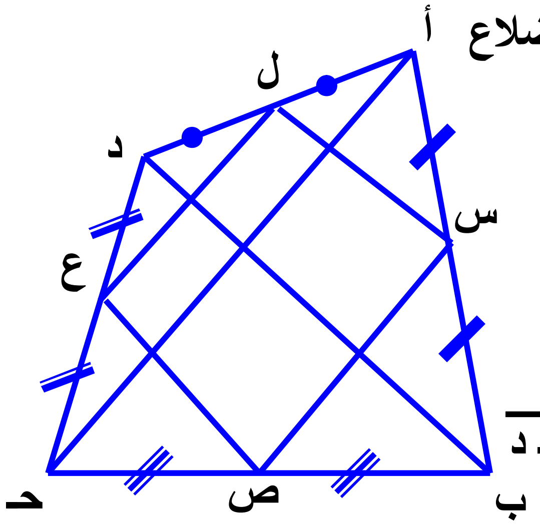
البرهان :

∵ أ ب حـ د متوازي أضلاع ∴ أ ب [د حـ ∴ أ ب [حـ و

∵ حـ منتصف ب هـ في المثلث أ ب هـ ∴ أ و = و هـ

مثال : أ ب حـ د شكل رباعي فيه س ، ص ، ع ، ل منتصفات الأضلاع أ ب، ب حـ ، حـ د ، د أ علي الترتيب

برهن أن : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع



الحل : نرسم أ حـ ، ب د

Δ أ ب د :

∵ س ل مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ د

∴ س ل [ب د (١)

Δ ب حـ د :

∵ ص ع مرسومة بين منتصفي حـ ب ، حـ د

∴ ص ع [ب د (٢)

Δ أ ب حـ ∵ س ص مرسومة بين منتصفي أ ب ، ب حـ

∴ س ص [أ حـ (٣)

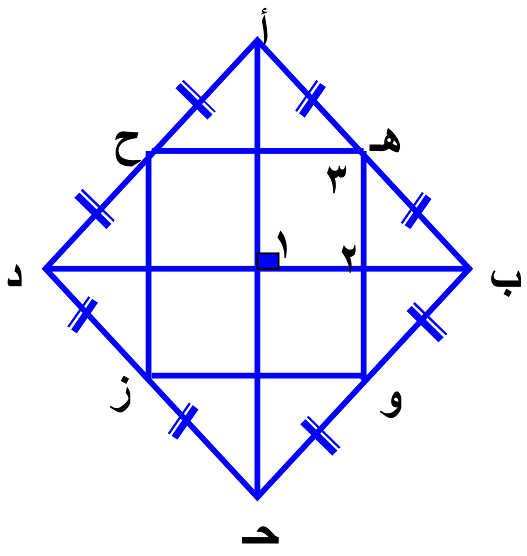
Δ أ د حـ : ∵ ل ع مرسومة بين منتصفي أ د ، د حـ

∴ ل ع [أ حـ (٤)

من ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نجد أن :

س ل [ص ع ، س ص [ل ع ∴ س ص ع ل متوازي الأضلاع

مثال : أ ب حـ د معين فيه هـ ، و ، ز ، ح منتصفات الأضلاع أ ب ، ب حـ ، حـ د ، د أ علي الترتيب أثبت أن : الشكل هـ و ز ح مستطيل .



الحل : نرسم أ حـ ، ب د

Δ أ ب د :

∵ هـ ح مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ د

∴ هـ ح [ب د (١)

Δ ب حـ د :

∵ و ز مرسومة بين منتصفي ب حـ ، حـ د

∴ و ز [ب د (٢)

بالمثل : نجد أن هـ و [أ حـ (٣)

ح ز [أ حـ (٤)

∵ هـ و [ح ز ، هـ ح [و ز ∴ هـ و ز ح متوازي أضلاع

∵ أ ب حـ د معين ∴ قطراه متعامدان

∵ أ حـ ⊥ ب د ∴ ق (∠ ١) = ٩٠

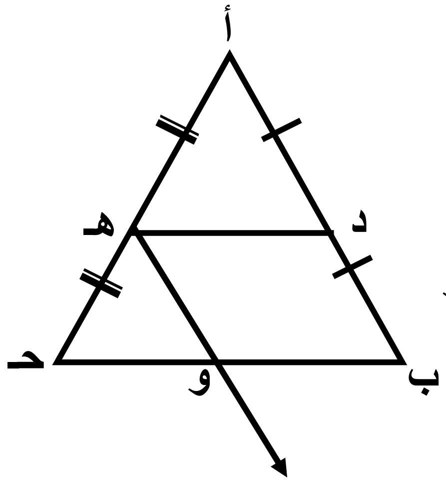
∵ هـ و ⊥ أ حـ ∴ ق (∠ ٢) = ٩٠

∵ هـ ح [ب د ∴ ق (∠ ٣) = ٩٠

∴ هـ و ز ح مستطيل

نظرية :

طول القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوى نصف طول الضلع الثالث .



المعطيات : أ د = د ب ، أ هـ = هـ حـ

المطلوب : أثبت أن : د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

العمل : نرسم هـ و [أ ب ويقطع ب حـ في و

البرهان :

∵ د منتصف أ ب ، هـ منتصف أ حـ

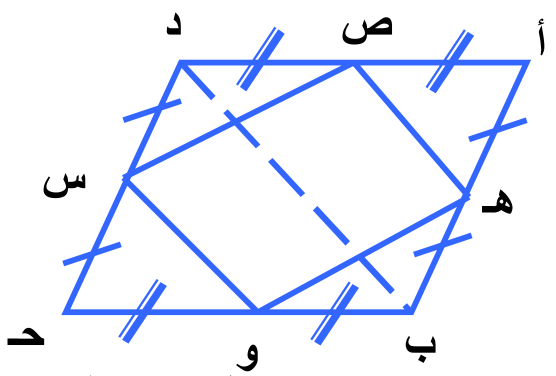
∴ د هـ [ب حـ (نتيجة)

∵ هـ و [أ ب ، أ هـ = هـ حـ ∴ حـ و = و ب = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∵ د هـ [ب و ، ب د [و هـ

∴ الشكل د هـ و ب متوازي أضلاع ∴ د هـ = ب و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

مثال: في الشكل المقابل :



أ ب حـ د متوازي أضلاع ، هـ ، و ، س ، ص منتصفات أضلاعه أ ب ، ب حـ ، حـ د ، د أ

برهن أن : هـ و س ص متوازي أضلاع

البرهان :

في ▲ أ ب د :

∵ $\overline{\text{هـ ص}}$ مرسومة بين منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ د}}$

∴ $\overline{\text{هـ ص}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ ، هـ ص = $\frac{1}{2}$ ب د ------ (١)

في ▲ ب حـ د :

∵ $\overline{\text{و س}}$ مرسومة بين منتصفي ب حـ ، د حـ

∴ $\overline{\text{و س}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ ، و س = $\frac{1}{2}$ ب د ------ (٢)

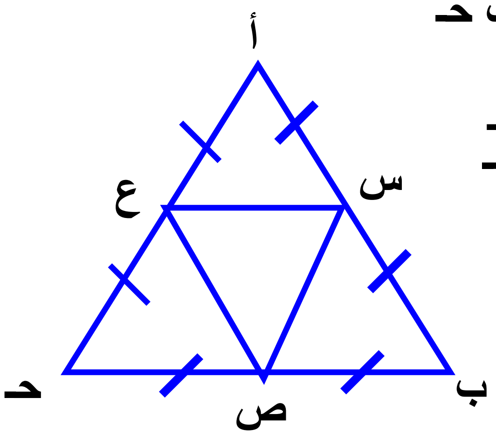
من (١) ، (٢) نجد أن :

∴ $\overline{\text{هـ ص}}$ // و س ، هـ ص = وس

∴ هـ و س ص متوازي أضلاع

مثال : إذا كانت س ، ص ، ع منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ في المثلث علي الترتيب . أثبت أن : محيط المثلث أ ب حـ = ٢ محيط المثلث س ص ع

الحل :



∵ $\overline{\text{س ص}}$ مرسومة بين منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ حـ (١)

∵ $\overline{\text{س ع}}$ مرسومة بين منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ س ع = $\frac{1}{2}$ ب حـ (٢)

∵ $\overline{\text{ص ع}}$ مرسومة بين منتصفي $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$

∴ ص ع = $\frac{1}{2}$ أ ب (٣)

بجمع ١ ، ٢ ، ٣ نجد أن :

س ص + س ع + ص ع = $\frac{1}{2}$ أ حـ + $\frac{1}{2}$ ب حـ + $\frac{1}{2}$ أ ب

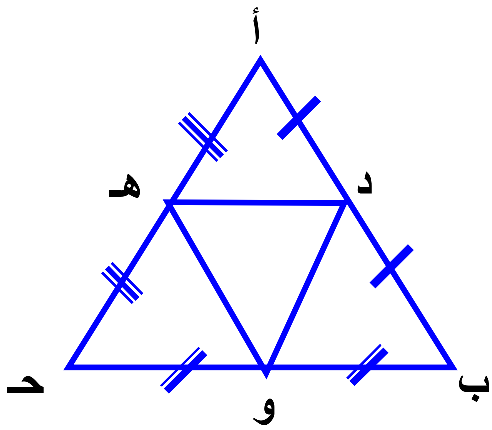
محيط المثلث س ص ع = $\frac{1}{2}$ (أ حـ + ب حـ + أ ب) = $\frac{1}{2}$ محيط △ أ ب حـ

∴ محيط المثلث أ ب حـ = ٢ محيط المثلث أ ب حـ

مثال : أ ب حـ مثلث ، د ، هـ ، و منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ علي الترتيب وكان د هـ = ٤ سم ، د و = ٢,٥سم ، هـ و = ٣ سم

أحسب محيط المثلث أ ب حـ .

الحل :



∵ د هـ مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ حـ

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ ب حـ = ٢ د هـ = ٨ سم

∵ د و مرسومة بين منتصفي أ ب ، ب حـ

∴ د و = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

∴ أ حـ = ٢ د و = ٥ سم

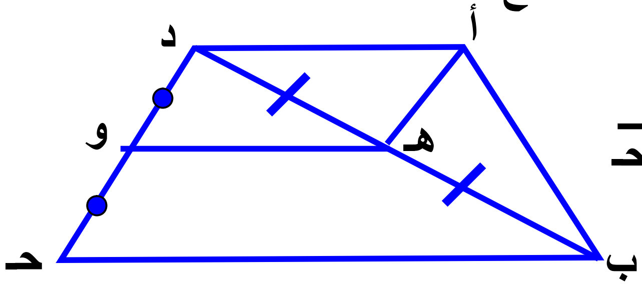
∵ و هـ مرسومة بين منتصفي أ حـ ، ب حـ

∴ و هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب ∴ أ ب = ٢ و هـ = ٦ سم

∴ محيط المثلث = أ ب + ب حـ + أ حـ = ٦ + ٨ + ٥ = ١٩ سم

مثال : أ ب حـ د شبه منحرف فيه أ د // ب حـ ، ب حـ = ٢ أ د ، وصل د ب و نصف في هـ ، نصفت د حـ في و ثم وصل أ هـ ، هـ و

أثبت أن : الشكل أ هـ و د متوازي الأضلاع



الحل : في المثلث د ب حـ :

∵ هـ و مرسومة بين منتصفي د ب ، د حـ

∴ هـ و // ب حـ ، هـ و = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∵ أ ب حـ د شبه منحرف

∵ أ د // ب حـ // هـ و (١)

∴ ب حـ = ٢ أ د ، أ د = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ هـ و = أ د (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن : أ هـ و د متوازي أضلاع

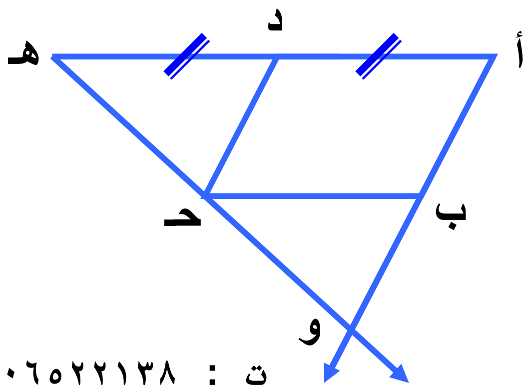
مثال: في الشكل المقابل :

أ ب حـ د متوازي أضلاع ، أ د = د هـ

رسم هـ حـ ليقطع أ ب في و

أثبت أن : أولا : هـ حـ = حـ و

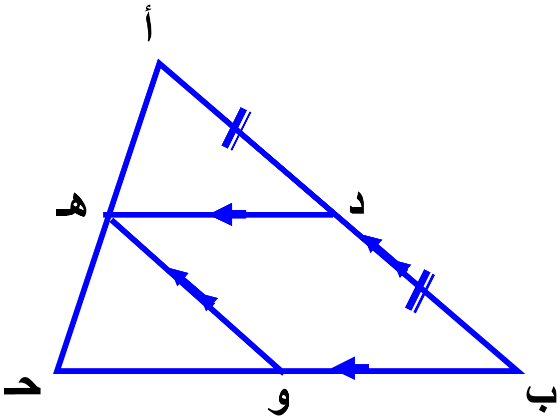
ثانيا : أ ب = ب و



البرهان :

∵ أ ب حـ د متوازي أضلاع
∴ أ ب // د حـ ∴ د حـ // أ و
∵ د حـ // أ و ، أ د = د هـ
∴ هـ حـ = حـ و (أولا)
∵ ب حـ // أ د ∴ ب حـ // أ هـ
∵ ب حـ // أ هـ ، هـ حـ = حـ و
∴ أ ب = ب و (ثانيا)

مثال : في الشكل المقابل :



△ أ ب حـ ، أ د = د ب إذا كان
طول ب حـ = ٨ سم أوجد طول
كل من ب و ، د هـ

الحل :

أ د = د ب ، د هـ // ب حـ
∴ أ هـ = هـ حـ
د هـ مرسومة بين منتصفي أ ب ، أ حـ
∵ د هـ = ١/٢ ب حـ = ١/٢ × ٨ = ٤ سم
∴ د هـ // ب حـ ، هـ و // أ ب
∴ د هـ // ب و ، هـ و // د ب
∴ د ب و هـ متوازي أضلاع ∴ د هـ = ب و = ٤ سم

سؤال للتفكير

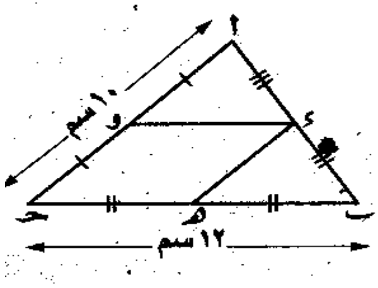
[١] في الشكل المقابل:

أ ب حـ مثلث فيه : ء ، هـ ، و

منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب

، ب حـ = ١٢ سم ، أ حـ = ١٠ سم .

أوجد محيط الشكل ء هـ حـ و

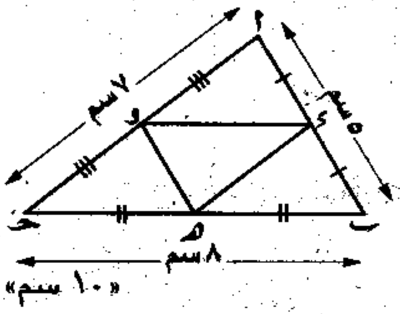


[٢] في الشكل المقابل:

أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ٨ سم ، حـ أ = ٧ سم

ء ، هـ ، و منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب

احسب محيط Δ ء هـ و

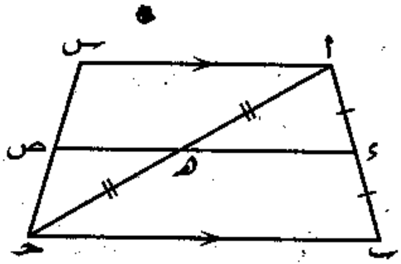


[٣] في الشكل المقابل:

أ ء = ء ب ، أ هـ = هـ حـ

، $\overline{أ س}$ // $\overline{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ء هـ}$ $\cap$ $\overline{س حـ}$ = {ص}

أثبت أن: ص منتصف $\overline{س حـ}$

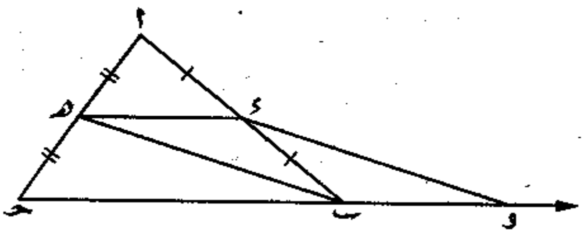


[٤] في الشكل المقابل:

ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أ حـ}$ على الترتيب

، و $\in$ $\overleftarrow{حـ ب}$ حيث ب و = $\frac{1}{2}$ ب حـ

أثبت أن: الشكل ب هـ ء و متوازى أضلاع.



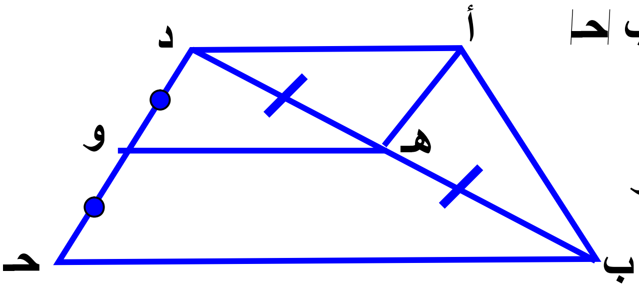
[٥] أ ب حـ د شبه منحرف فيه $\overline{أد}$ // $\overline{ب حـ}$

، ب حـ = ٢ أ د ، وصل د $\overline{ب}$

و نصفه في هـ ، نصفت د $\overline{جـ}$ في و

ثم وصل $\overline{أ هـ}$ ، هـ و

أثبت أن : الشكل أ هـ و د متوازي الأضلاع



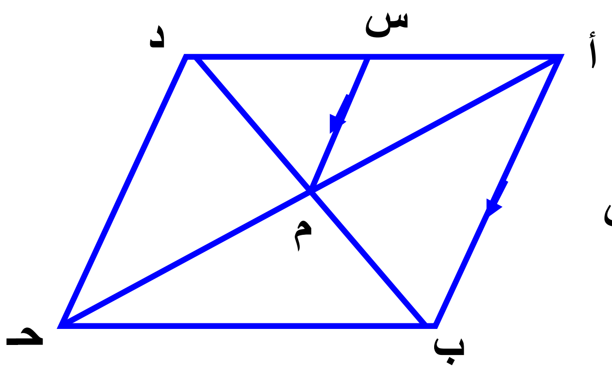
[٦] أ ب حـ مثلث فيه أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ أ = ٧ سم
فإذا كانت س ، ص ، ع منتصفات أ ب ، ب حـ ، حـ أ علي الترتيب
فأوجد محيط △ س ص ع

---

[٧] أ ب حـ د متوازي أضلاع ، هـ ∋ أ د بحيث أ د = د هـ رسم هـ حـ
ليقطع أ ب في و أثبت أن : (١) هـ حـ = حـ و (٢) أ ب = ب و

---

[٨] في الشكل الموضح :
أ ب حـ د متوازي أضلاع حيث
أ حـ ∩ ب د = {م}
، رسم م س // ب أ و يقطع أ د في س
أثبت أن : س منتصف أ د

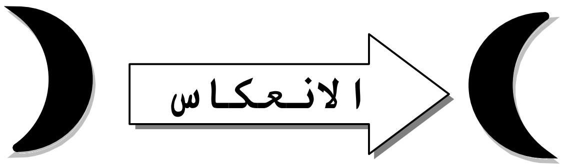


التحويلات الهندسية

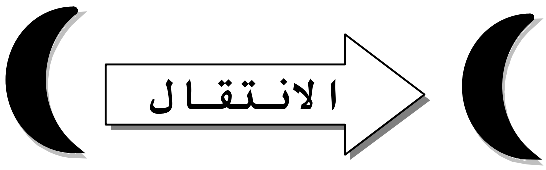
عِنْدَمَا يُحَوَّلُ شَكْلٌ هَنْدَسِيٌّ إِلَى شَكْلٍ هَنْدَسِيٍّ آخَر يُقَالُ إِنَّهُ تَحْتَ تَأْثِيرِ تَحْوِيلَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ.

فمثلا :

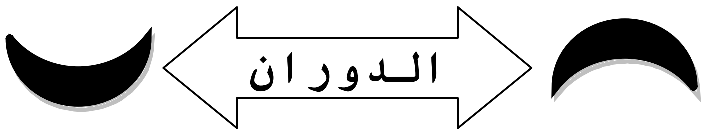
نلاحظ: أن الشكل المقابل: تم عكس وضعه



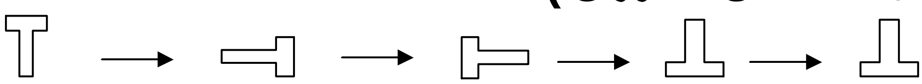
نلاحظ: أن الشكل المقابل:
تم نقله علي استقامته لمسافة معينة

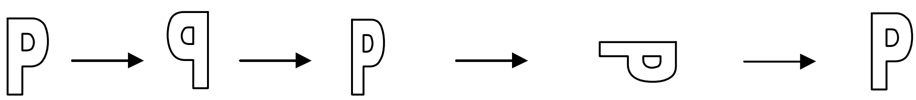


نلاحظ: أن الشكل دار بزاوية معينة



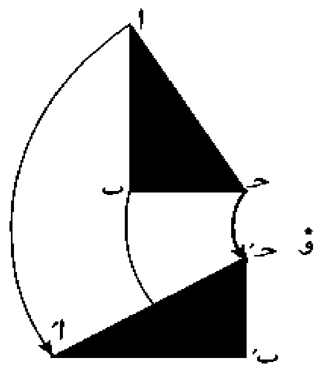
لاحظ التغير الذي يحدث لكل شكل ومقارنته بالوضع السابق
واكتب (انتقال – انعكاس – دوران)



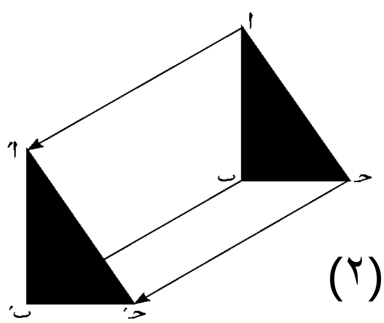


في الأشكال التالية لاحظ صورة المثلث أ ب جـ واستنتج التحويل الهندسي الذي يحدث :

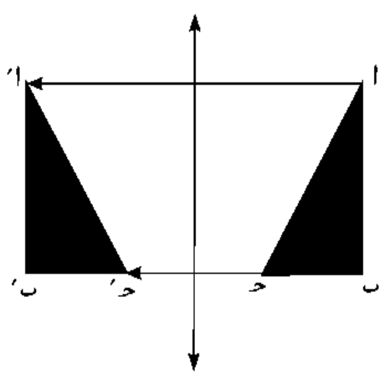
(١)



(٢)



(٣)



نلاحظ من الأشكال السابقة كل نقاط ∆ أ ب جـ تحولت إلي وضع أخر حيث

النُقطُ ا′ ، ب′ ، حـ′ هِيَ صُوَرُ النُّقَطِ ا ، ب ، حـ **ولذلك :**

إذا تحركت كل نقاط أي شكل هندسي تبعا لنظام محدد فنحصل علي صورة أخري في وضع جديد لنفس الشكل الهندسي ونقول أن الشكل تحت تأثير تحويلة هندسية .

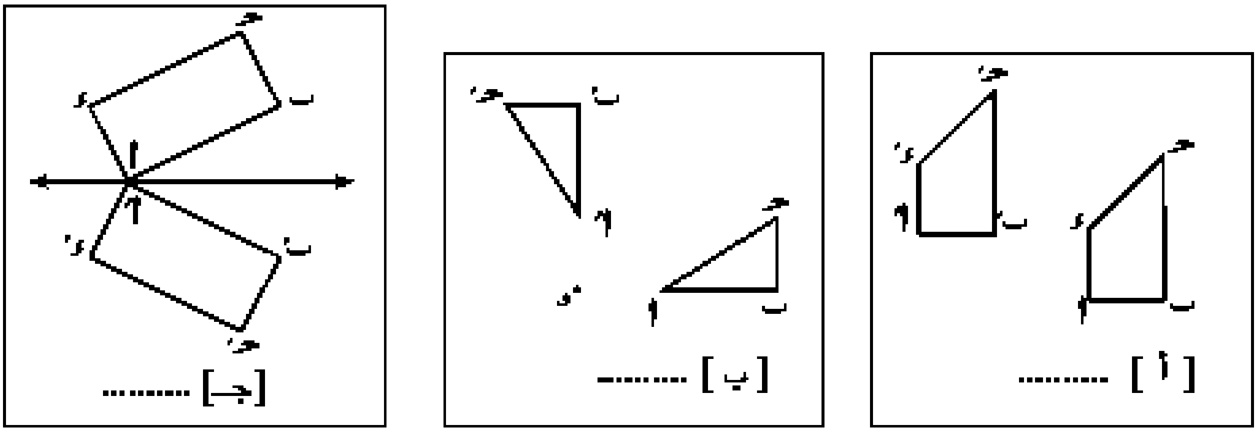
أي أن :

التَّحْوِيلَةُ الْهَنْدَسِيَّةُ تُحَوِّلُ كُلَّ نُقْطَةِ ن فِي الْمُسْتَوَى إِلَي نُقْطَةِ ن′ فِي الْمُسْتَوَى نَفْسِهِ .

تذكر بان التحويلات الهندسية :

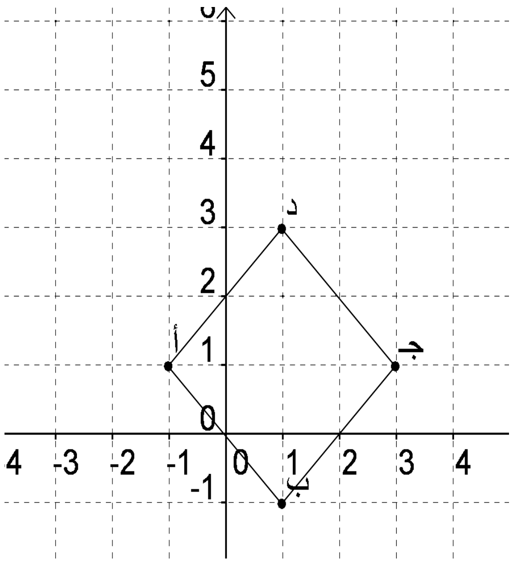
الانعكاس ــــــــ الانتقال ــــــــ الدوران

١ صِفْ نَوْعَ التَّحْوِيلَةِ الهَنْدَسِيَّةِ (انْعِكَاسٌ – انْتِقَالٌ – دَوَرَانٌ) فِي كُلِّ شَكْلٍ مِمَّا يَلِي :



[أ] .... [ب] .... [جـ] ....

[٢] ارسم صورة كل شكل من الإشكال التالية حسب التحويلة الهندسية ألموضحه ثم صف نوعها :



الحل (١) (س، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص + ٣)

أي إن س تحول إلي س + ٢ و ص تحول إلي ص + ٣

ولذلك أ (– ١ ، ١) ⟵ أ, (– ١ + ٢ ، ١ + ٣)

أي أن أ, (١ ، ٤)

ب (١ ، – ١) ⟵ ب, (١ + ٢ ، – ١ + ٣)

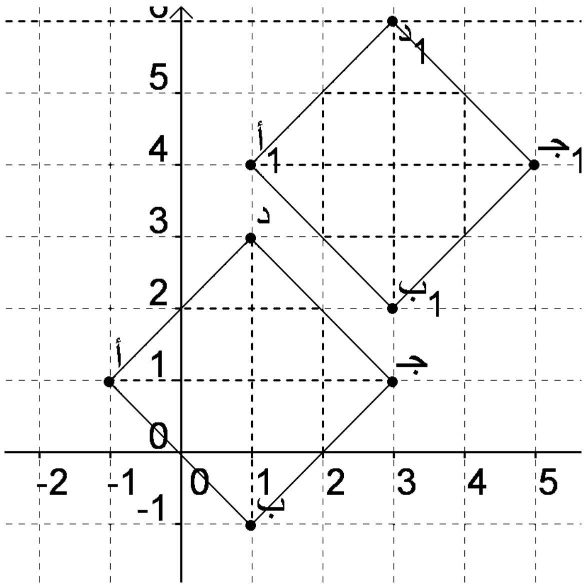
أي أن ب, (٣ ، ٢)

جـ (٣ ، ١) ⟵ جـ, (٣ + ٢ ، ١ + ٣)

أي أن جـ, (٥ ، ٤)

د (١ ، ٣) ⟵ د١ (١ + ٢ ، ٣ + ٣)

أي ان د ١ (٣ ، ٦)



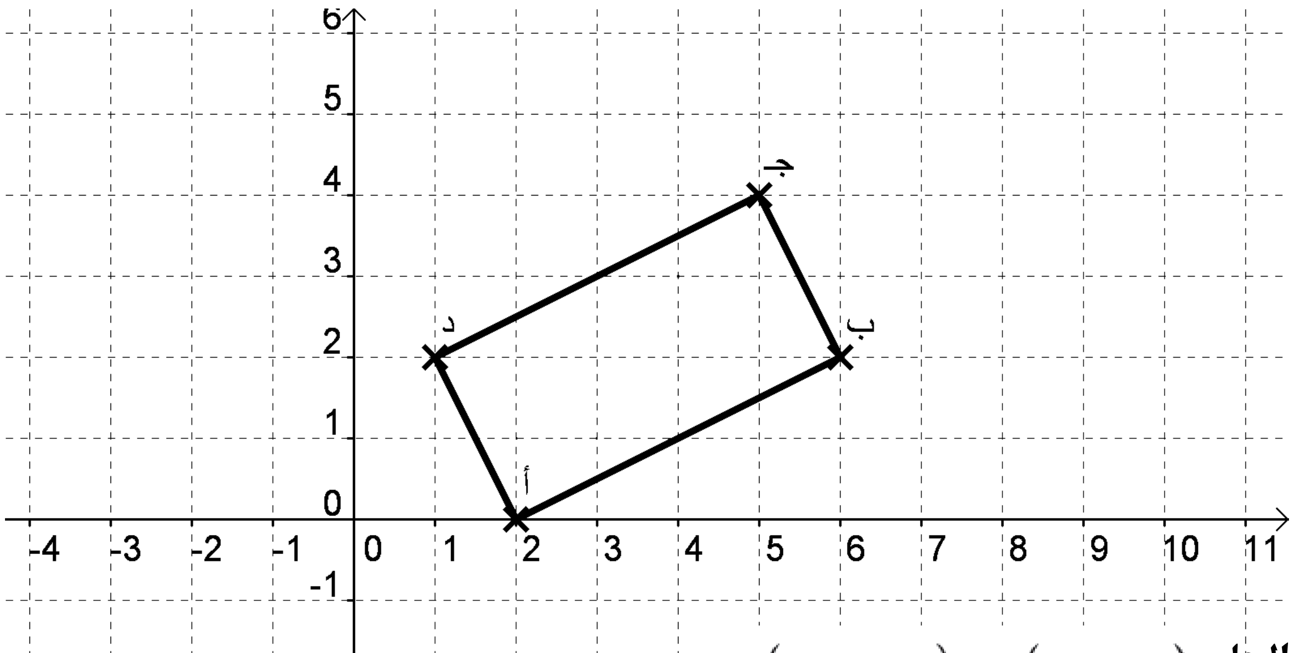
واضح من الرسم أن الشكل أ ب جـ د

حدث له انتقال فأصبح الشكل أَ بَ جـَ دَ

---

[٣] ارسم صورة كل شكل من الإشكال التالية حسب التحويلة الهندسية ألموضحه ثم

صف نوعها : (س ، ص) ⟵ (س ، – ص)



الحل (س ، ص) ⟵ (س ، –ص)

لاحظ أن س لا تحول وان ص تحول ألي – ص

أ (٢ ، ٠) ⟵ أَ (٢ ، ٠)

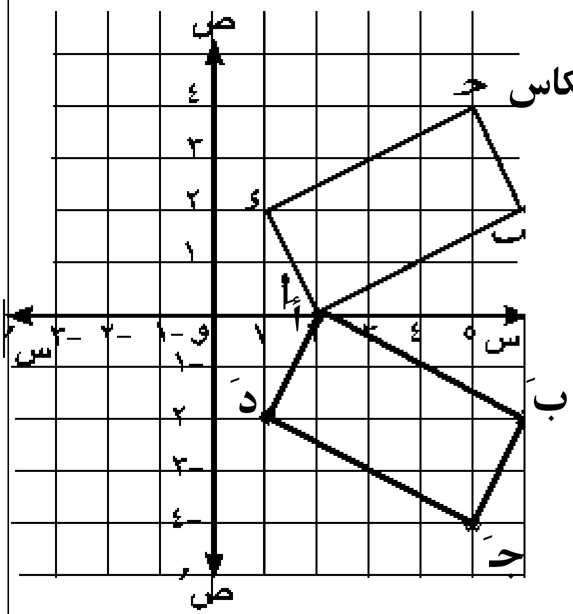
ب (٦ ، ٢) ⟵ بَ (٦ ، – ٢)

جـ (٥ ، ٤) ⟵ جـَ (٥ ، – ٤)

د (١ ، ٢) ⟵ دَ (١، – ٢)

واضح من الرسم أن الشكل أ ب جـ د حدث له انعكاس

فأصبح أَ بَ جـَ دَ



---

[٤] ارسم صورة كل شكل من الإشكال التالية حسب التحويلة الهندسية الموضحة ثم صف نوعها : (س ، ص) ⟵ (– س ، – ص)

الحل

لاحظ أن س تحول إلى – س وان ص تحول إلي – ص

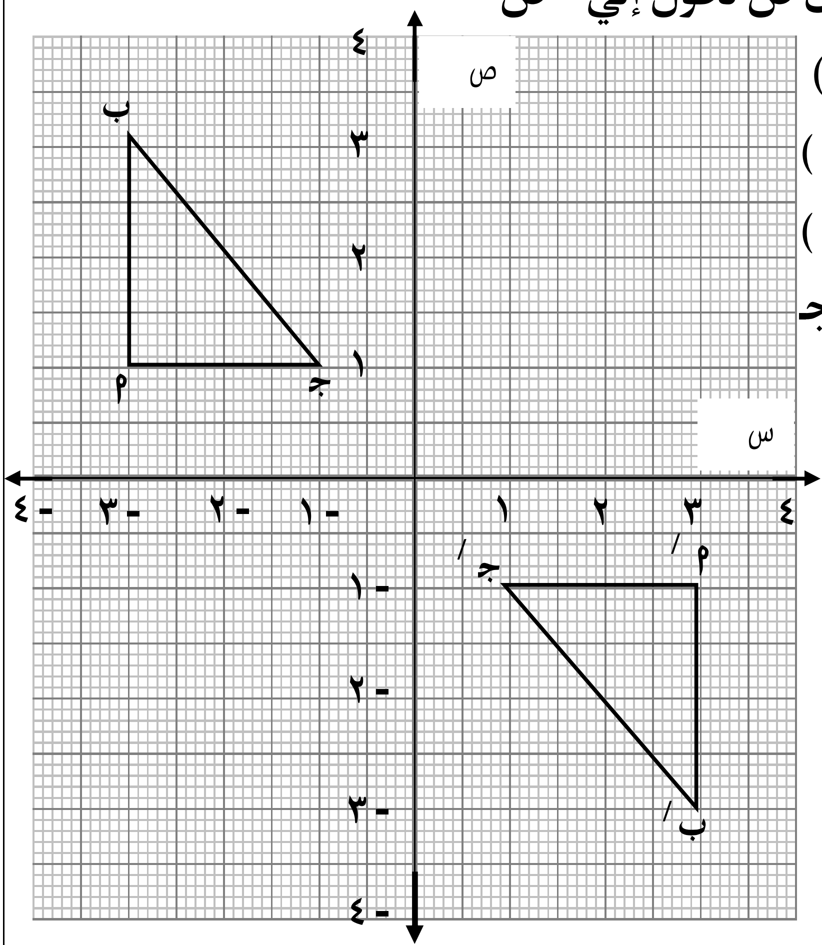
أ (– ٣ ، ١) ⟵ أ/ (٣ ، – ١)

ب (–٣ ، ٣) ⟵ بَ (٣ ، – ٣)

جـ (–١ ، ١) ⟵ جـَ (١ ، – ١)

واضح من الرسم أن الشكل أ ب جـ حدث له دوران

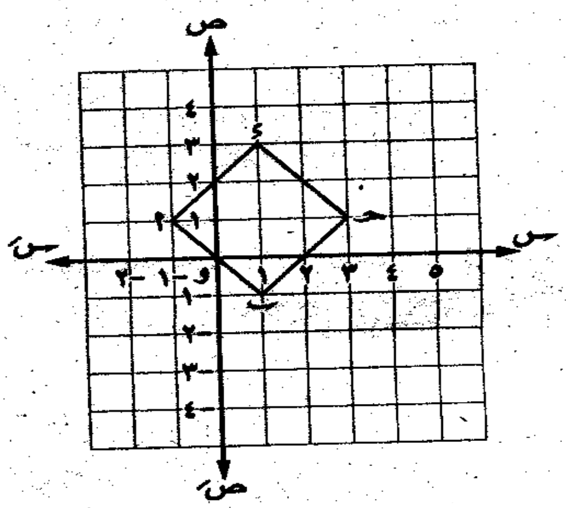
فأصبح △ أَ بَ جـَ



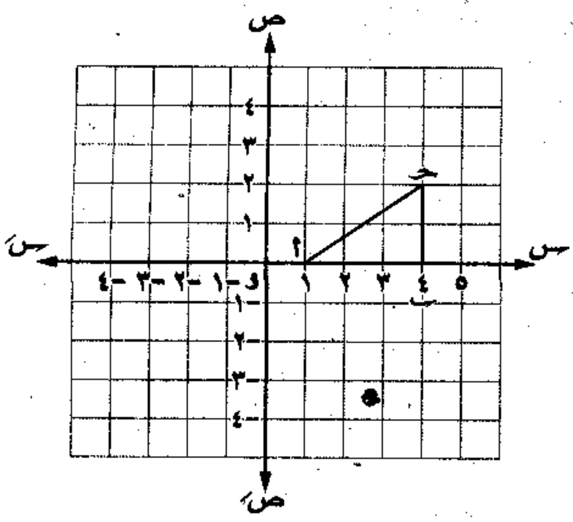
تمارين على التحولات الهندسية

[١] ارسم صورة كل شكل من الإشكال التالية حسب التحويلة الهندسية الموضحة ثم صف نوعها :

١ (س ، ص) ⟵ (س + ٢ ، ص + ٢)



٢ (س ، ص) ⟵ (−س ، − ص)



[٢] ارسم صورة Δ أ ب جـ حيث : أ (١ ، ٢) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٣ ، ٥) بالتحويلات الهندسية الآتية :

① (س ، ص) ⟵ (س ، − ص)

② (س ، ص) ⟵ (س + ١ ، ص − ٣)

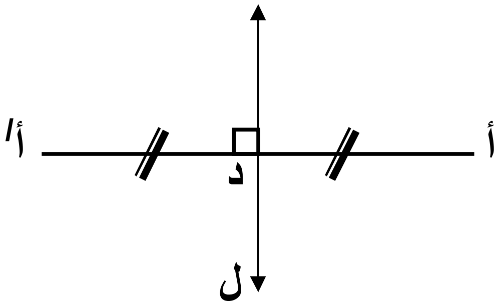
③ (س ، ص) ⟵ (− ص ، س)

الانعكاس

الانعكاس في خط مستقيم في المستوى :

هو تحويل هندسي يحول كل نقطة أ مثلا واقعة في المستوى إلي نقطة أخرى أ/ في نفس المستوى.

بحيث يكون ا لمستقيم ل عمودياً على أ أ/ من منتصفها



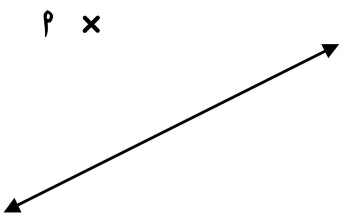
في ا لشكل ا لمقابل :

إذا كانت أ/ هي صورة أ بالانعكاس علي المستقيم ل

فإن ل ⊥ $\overline{\text{أ أ/}}$ ، أ د = د أ/

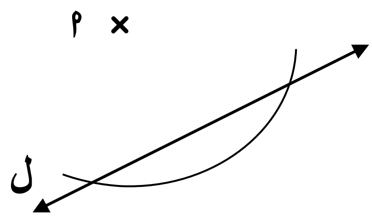
و يلاحظ أن: نقطة د هي صورة د نفسها بالانعكاس علي ل (د ∋ ل)

مثال : ارسم م / صورة النقطة م بالانعكاس فى المستقيم ل .

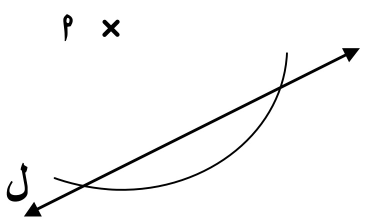


الحل :

١ ـ ارسم قوسا من دائرة مركزها م يقطع ل فى ب ، جـ

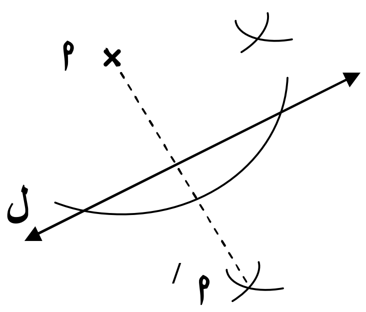


٢ ـ أركز في ب ، جـ بنفس الفتحة ارسم قوسين يتقاطعان فى م /



٣ ـ م / هى صورة م بالانعكاس فى ل

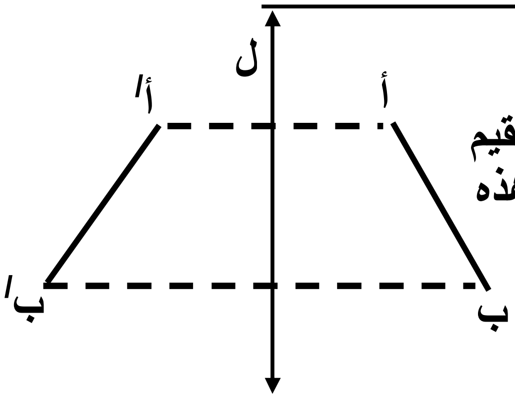
تحقق بالقياس أن : ل ⊥ م م/ ، ل ينصف م م/



إيجاد صورة شكل بالانعكاس في مستقيم معلوم

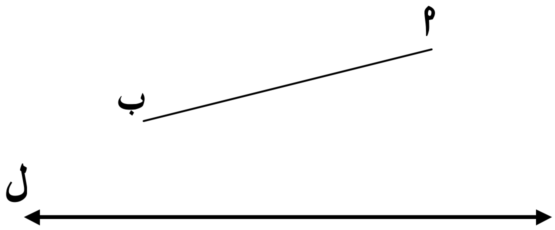
[١] رسم صورة قطعة مستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ بالانعكاس في مستقيم ل :

لتحديد صورة قطعة مستقيمة بالانعكاس فى مستقيم يكفى تحديد صورة كل من طرفيها ثم نصل بين هذه الصور فنحصل على صورة القطعة المستقيمة .



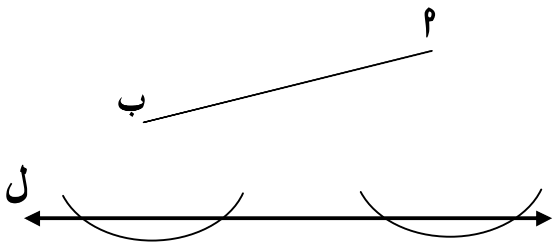
مثال : فى الشكل المقابل :

أوجد صورة أ ب بالانعكاس فى المستقيم ل

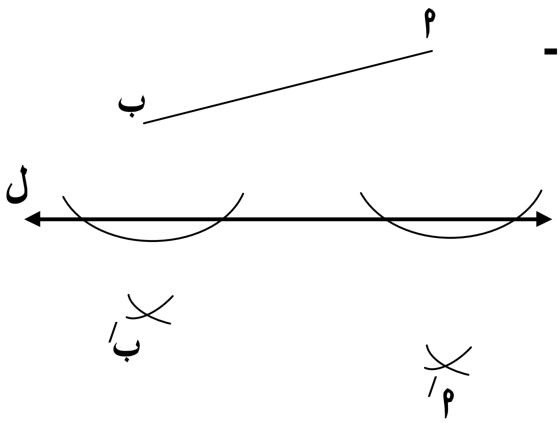


الحل :

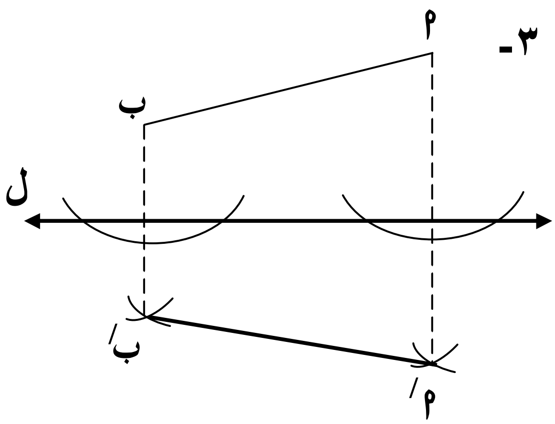
١-



٢-



٣-

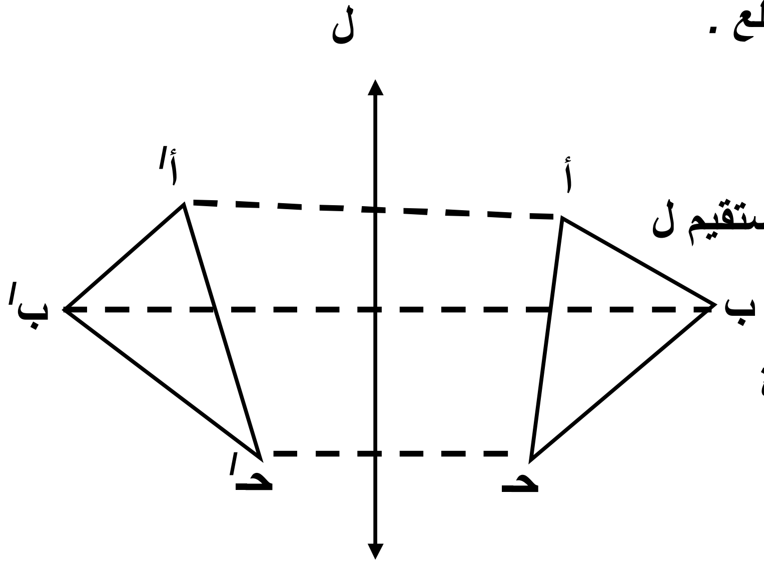


أ/ ب/ هى صورة أ ب بالانعكاس فى ل

تحقق بالقياس أن ل هو العمود المنصف لكل من أ أ/ ، ب ب/ ، أن أ ب = أ/ ب/

[٢] رسم صورة مضلع بالانعكاس فى مستقيم ل :

نوجد صورة كل رأس من رؤوس الشكل بالانعكاس في المستقيم ل و نصل بين صور الرؤوس ا لمناظرة لأضلاع ا لمضلع .

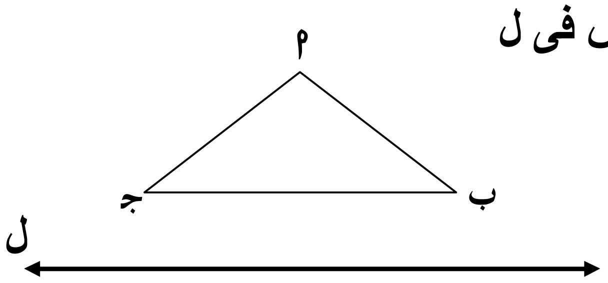


<u>في ا لشكل ا لمقابل :</u>

أ/ هي صورة أ بالانعكاس في ا لمستقيم ل
، ب/ هي صورة ب
، حـ/ هي صورة حـ
فيكون ا لشكل أ/ ب/ حـ/ هو صورة ا لشكل أ ب حـ بالانعكاس في ل

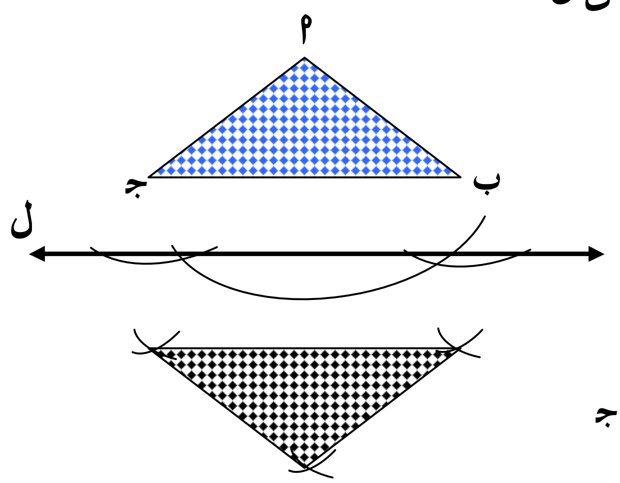
مثال : فى الشكل المقابل :

أوجد صورة المثلث ٩ ب جـ بالانعكاس فى ل



الحل :

نوجد صور النقط ٩ ، ب ، جـ بالانعكاس فى ل



△ ٩/ ب/ جـ/ هو صورة △ ٩ ب جـ بالانعكاس فى ل

ملحوظة :

بمقارنة عناصر △ ٩/ ب/ جـ/ ، △ ٩ ب جـ
نجد أن الانعكاس يحافظ على :

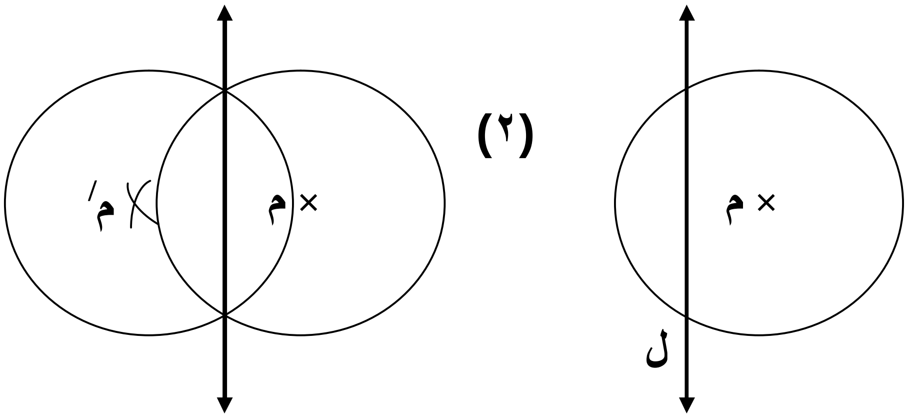
١ ــ الأبعاد بين ا لنقط ٢ ــ قياسات ا لزوايا
٣ ــ التوازي ٤ ــ استقامة ا لنقط

[٣] انعكاس دائرة فى مستقيم :

و لايجاد صورة دائرة مركزها م بالانعكاس فى مستقيم معلوم :
يكفى بأن نوجد صورة مركز الدائرة م بالانعكاس فى المستقيم المعلوم و ليكن م /
ثم نرسم دائرة نصف قطرها يساوى نصف قطر الدائرة م ومركزها هو م /

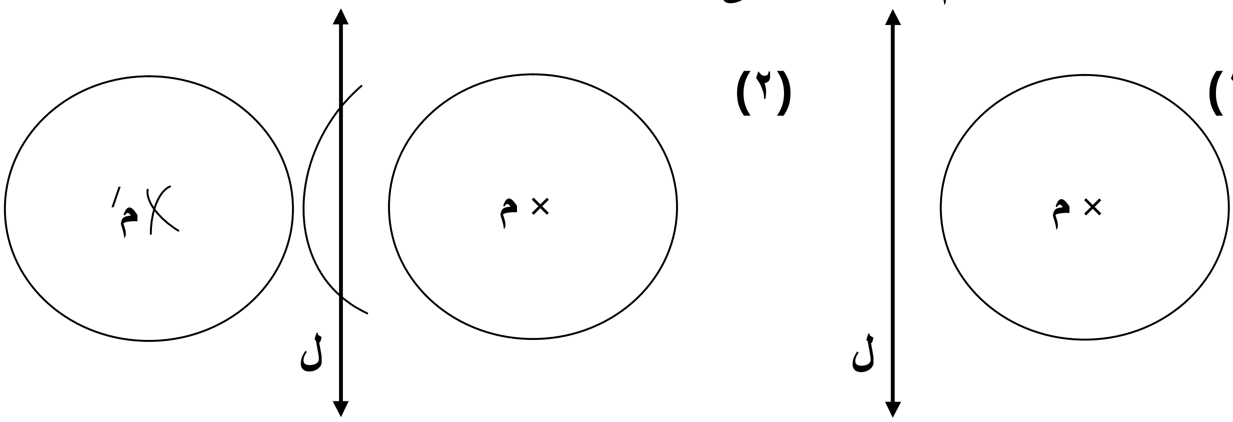
أوجد صورة الدائرة م بالانعكاس فى ل

(١) (٢)



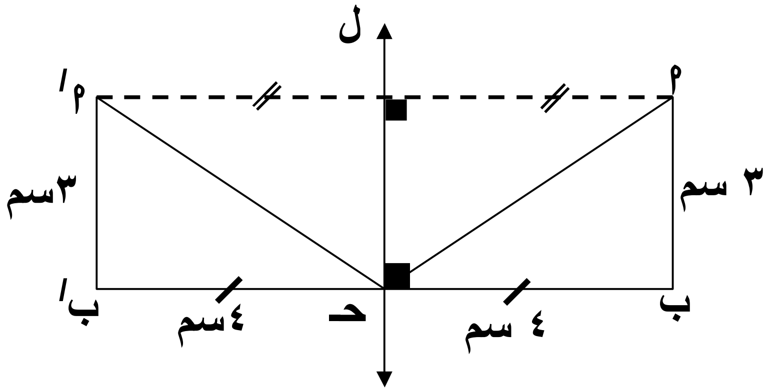
أوجد صورة الدائرة م بالانعكاس فى ل

(١) (٢)



[١] ارسم ا لمثلث أ ب حـ ا لذي فيه أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ،
ق(حـ أ ب حـ) = ٩٠ ° ثم أ وجد صورة △ أ ب حـ بالانعكاس في ا لمستقيم ل
ا لعمودي علي ب حـ في نقطة حـ وأوجد طول صورة ب حـ

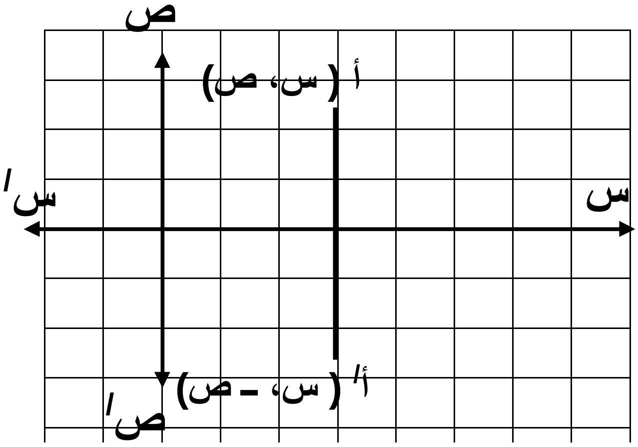
الحل :



صورة △ أ ب حـ بالانعكاس في ا لمستقيم ل هي △ أ/ ب/ حـ/ ، ب/حـ = ٤ سم

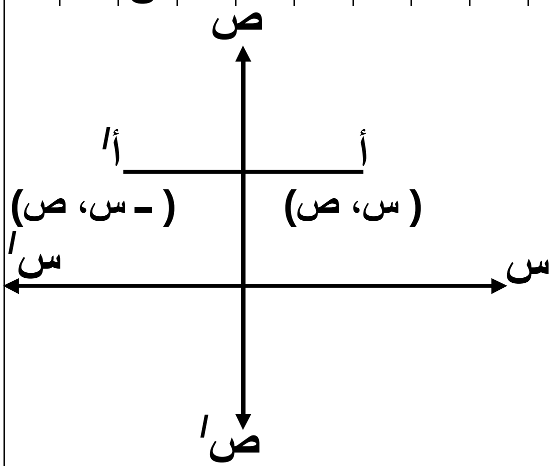
الانعكاس في محوري الإحداثيات :

إذا كان س س/ هو المحور الافقى (محور السينات) ، ص ص/ هو المحور الرأسى (محور الصادات) فى مستوى الاحداثيات و كانت النقطة و (٠ ، ٠) وكانت النقطة (س ، ص) تقع فى المستوى فإن :



(١) الانعكاس في محور السينات :
صورة النقطة أ = (س ، ص)
بالانعكاس علي المحور السيني
هي النقطة أ/ = (س ، ـ ص)
نثبت الاحداثي السيني ونعكس إشارة الاحداثي الصادي
(س ، ص) ⟵ (س ، - ص)

مثلا (٣ ، - ٥) ⟵ (٣ ، ٥)



(٢) الانعكاس في محور الصادات :
صورة النقطة أ = (س ، ص)
بالانعكاس علي المحور الصادي
هي النقطة أ/ = (ـ س ، ص)
نثبت الاحداثي الصادي ونعكس إشارة الاحداثي السيني
(س ، ص) ⟵ (- س ، ص)

مثلا (٣ ، - ٥) ⟵ (- ٣ ، ٥)

(٢) صورة النقطة أ = (س ، ص) بالانعكاس علي المحور السيني متبوعاً بالانعكاس علي المحور الصادي هي نفسها صورة النقطة أ = (س ، ص) بالانعكاس علي المحور الصادي متبوعاً بالانعكاس علي المحور السيني.
وتكون إحداثيات الصورة هي أ// = (ـ س ، ـ ص).

أكمل ماياتى :

١- صورة النقطة (٣ ، ٧) بالانعكاس فى محور السينات هى ......
٢- صورة النقطة (٠ ، ٢) بالانعكاس فى محور الصادات هى ......
٣- صورة النقطة (.. ، ..) بالانعكاس فى محور السينات هى (٥ ، - ١)
٤- النقطة (- ٧ ، ١) هى صورة النقطة (٧ ، ١) بالانعكاس فى محور .....
٥- النقطة (.. ، ..) هى النقطة (-٦ ، ٤) بالانعكاس فى ص ص/

اختر الإجابة الصحيحة :

(١) صورة النقطة (- ٣ ، ٢) بالانعكاس فى محور السينات هى .....
[(٣ ، ٢) ، (٣ ، - ٢) ، (- ٣ ، - ٢) ، (- ٣ ، ٢)]

(٢) صورة النقطة (- ٤ ، ٦) بالانعكاس فى محور الصادات هى .....
[(٤ ، ٦) ، (- ٤ ، - ٦) ، (٤ ، - ٦) ، (- ٤ ، ٦)]

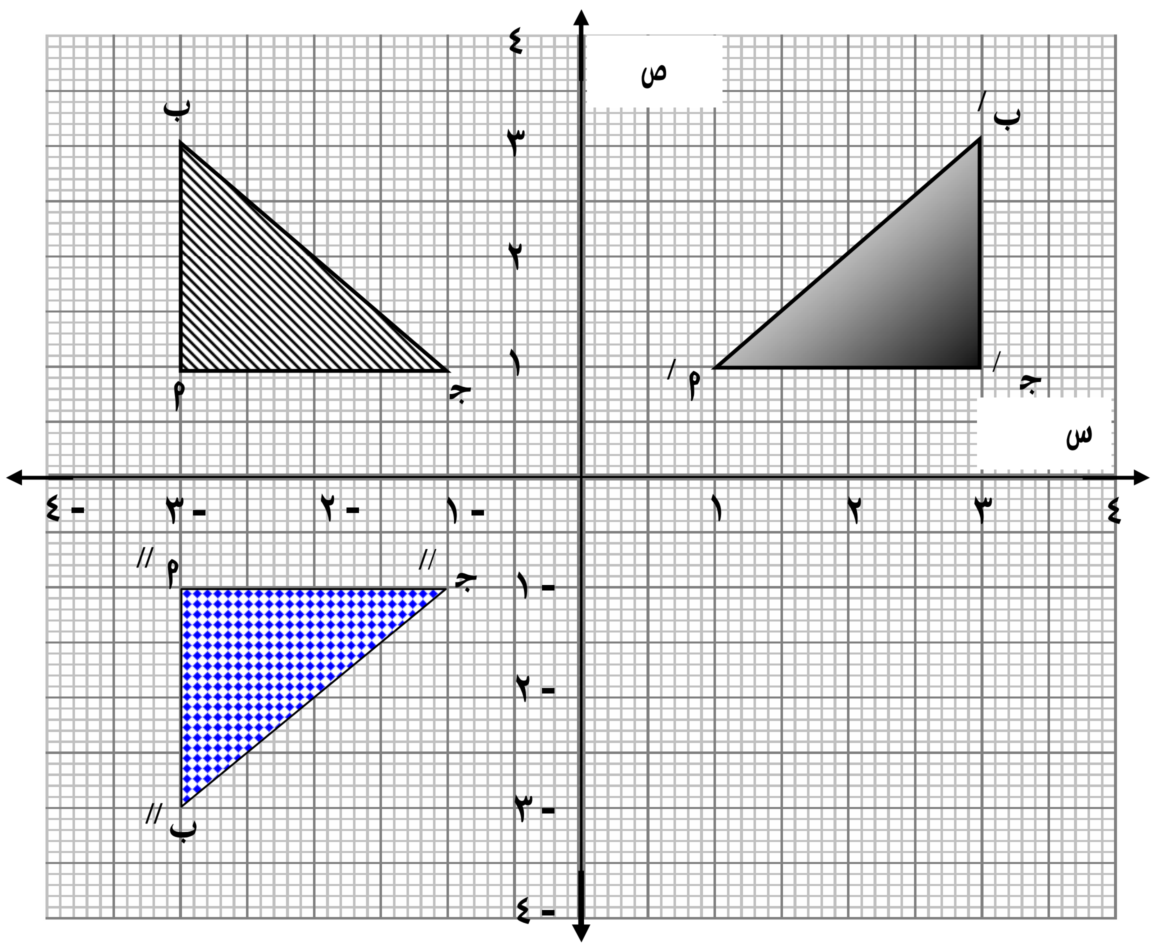
(٣) صورة النقطة (٨ ، ٢) بالانعكاس فى محور الصادات متبوعا بالانعكاس فى محور السينات هى .....
[(٨ ، -٢) ، (- ٨ ، ٢) ، (- ٨ ، - ٢) ، (٨ ، ٢)]

مثال : عين فى المستوى الاحداثي المتعامد المثلث م ب جـ حيث

م(- ٣ ، ١)، ب(- ٣ ، ٣) ، جـ (- ١ ، ١) ثم أ وجد صورته بالانعكاس

أولا : في محور ا لسينات ثانياً : في محور ا لصادات

ا لحل :



∆ م/ ب/ جـ/ هو صورة ∆ م ب جـ بالانعكاس في محور الصادات.

∆ م// ب// جـ// هو صورة ∆ م ب جـ بالانعكاس في محور السينات.

سؤال للتفكير

(١) أكتب إحداثيات صور ا لنقط الآتية :

أ (ـ ٥ ، ١) ، ب (٠ ، ـ ٦) ، حـ (٣ ، ٢) ، د (ـ ٢ ، ـ ٣)

بالانعكاس في :

أولا : محور ا لسينات ثانيا : محور ا لصادات

(٢) ارسم ∆ أ ب حـ حيث أ (٢ ، ـ ٢) ، ب (٣ ، ٤) ، حـ (ـ ٣ ، ٢)

ثم ارسم صورته ∆ أ/ ب/ حـ/ بالانعكاس في محور ا لصادات .

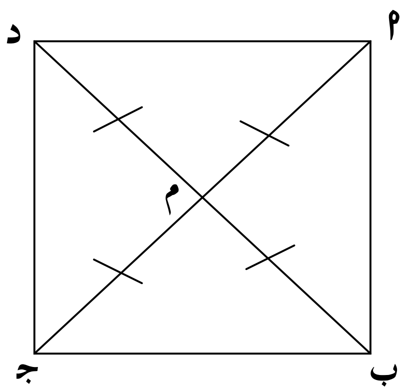
ثم ارسم صورة ∆ أ// ب// حـ// بالانعكاس في محور ا لسينات .

(٣) ارسم صورة المثلث س ص ع الذي أطوال أضلاعه س ص = ٣ سم ، ص ع = ٥ سم ، ع س = ٧ سم بالانعكاس فى المستقيم الذي يحتوى الضلع الاكبر طولا .

(٤) ارسم صورة المثلث س ص ع الذي أطوال أضلاعه س ص = ٣ سم ، ص ع = ٤ سم ، ع س = ٥ سم بالانعكاس فى المستقيم الذي يحتوى الضلع الأصغر طولا .

(٥) فى الشكل المقابل : أ ب جـ د مربع تقاطع قطراه فى م

أكمل ما يأتي :



١- صورة المثلث أ ب جـ بالانعكاس فى أ جـ هى ٠٠٠٠

٢- صورة المربع أ ب جـ د بالانعكاس فى أ جـ هى ٠٠٠٠

٣- صورة المثلث أ ب م بالانعكاس فى أ جـ هى ٠٠٠٠

٤- ∆ ب جـ م صورة ∆ د جـ م بالانعكاس فى ٠٠٠٠٠

٥- ∆ أ ب د صورة ∆ جـ ب د بالانعكاس فى ٠٠٠٠٠

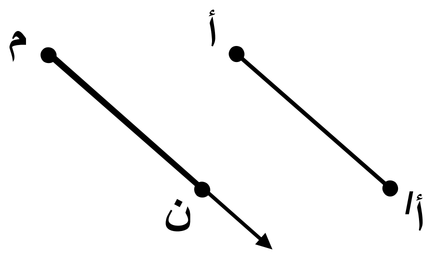
٦- صورة النقطة أ بالانعكاس فى $\overleftrightarrow{ب د}$ هى ٠٠٠٠٠

الانتقال في ا لمستوى

الانتقال : *هو تحويل هندسي يحول كل نقطة (أ) مثلا واقعة في ا لمستوي إ لي* نقطة أخرى وحيدة (أ/) في نفس ا لمستوى بحيث يكون :

[١] أ أ/ موازيا لاتجاه ثابت (معلوم)

[٢] أ أ/ = مقدار ثابت (معلوم)



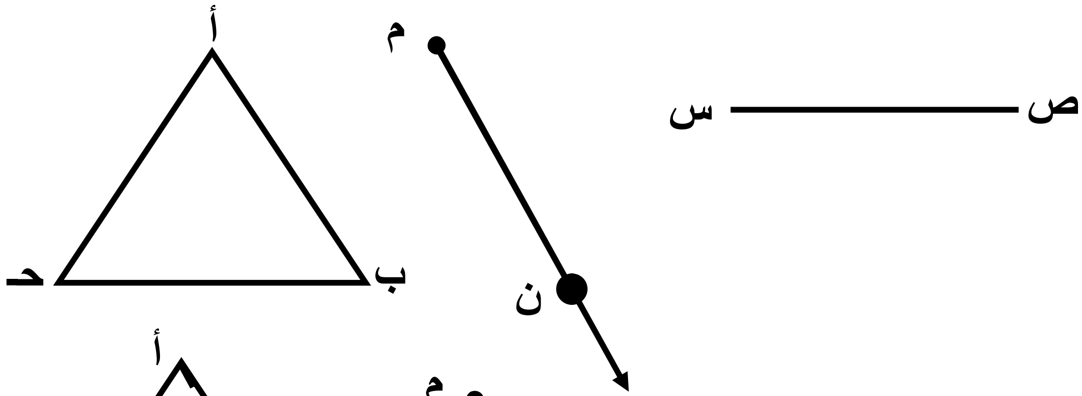
تعريف آخر للانتقال :

الانتقال م ن هو تحويل يزيح كل نقطة أ في ا لمستوى إ لي نقطة ا/ بحيث :

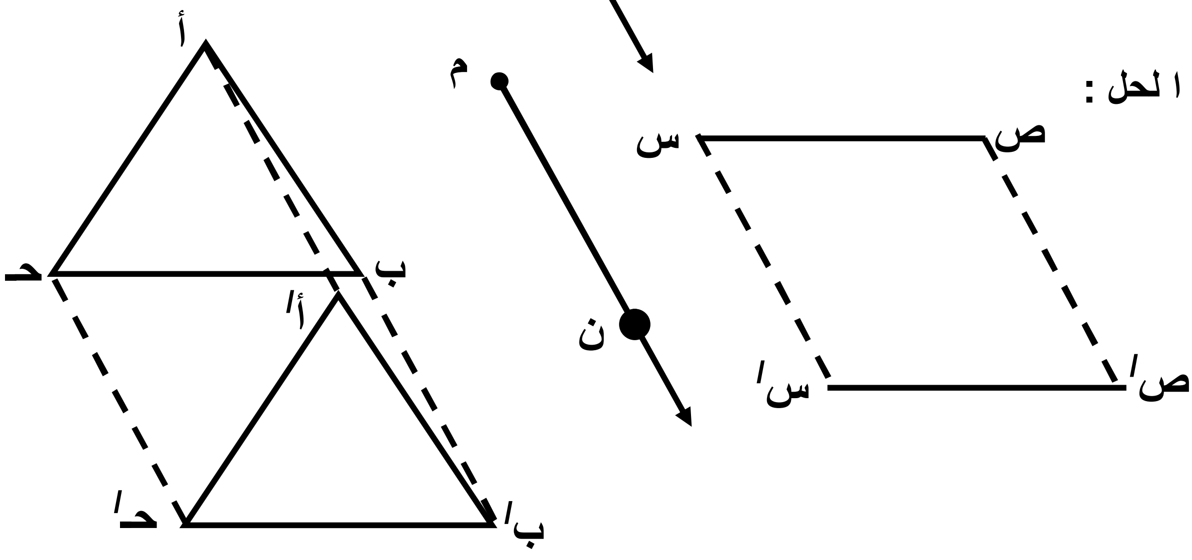
أ أ/ = م ن ، أ أ/ // م ن وفي نفس اتجاهه

ملحوظة : الانتقال م ن مسافته = م ن و ا تجاهه هو اتجاه م ن

مثال : باستخدام الأدوات ا لهندسية أوجد صورة كل من س ص ومثلث أ ب حـ بانتقال م ن



ا لحل :



ملاحظات :

(١) صورة مستقيم بالانتقال في ا تجاه ما هي مستقيم يوازيه.
(٢) صورة شعاع بالانتقال في ا تجاه ما هي شعاع يوازيه و في نفس اتجاهه.
(٣) صورة قطعة مستقيمة بالانتقال في ا تجاه ما هي قطعة مستقيمة .
(٤) صورة أي شكل بالانعكاس علي مستقيم أو بالانتقال في اتجاه ما تتطابق مع الشكل نفسه .

الانتقال في مستوى ا لإحداثيات

تذكر أن : (١) الانتقال فى مستوى الإحداثيات يكون
* فى اتجاه المحاور
** و حسب مسافة الانتقال .
(٢) الانتقال (٤ ، - ٣) يعنى : انتقال مسافة ٤ وحدات فى إتجاه محور السينات الموجب ثم متبوعا بانتقال مسافة ٣ وحدات فى اتجاه محور الصادات السالب.
(٣) صورة (س ، ص) $\xrightarrow{\text{بانتقال (م ، ن)}}$ (س + م ، ص + ن)
(٤) إذا كانت : ٢(س$_١$ ، ص$_١$) ، ب (س$_٢$ ، ص$_٢$) فإن :
و يكون : الانتقال ٢ ب = ب – ٢ = (س$_٢$ - س$_١$ ، ص$_٢$ - ص$_١$)
مثلا: صورة ٢ (٤،١) بالانتقال (٢، ـ ١)هي ٢$^/$(٤ـ٢،١+١) أي ٢$^/$(٢،٢)

مثال : إذا كانت ٢ = (٥ ، ـ ٢) ، ب = (ـ ٤ ، ٤) أوجد الانتقال ٢ ب
الحل: الانتقال ٢ ب = الانتقال (ـ ٤ ـ ٥ ، ٤ + ٢) = الانتقال (ـ ٩ ، ٦)

مثال : إذا كانت م = (٥ ، ـ ١) ، ن = (٣ ، ـ ٣) فأوجد صورة كل من النقاط الآتية بانتقال مسافة م ن في اتجاه $\overleftarrow{\text{م ن}}$:
أ (٤ ، ـ ٣) ، ب (ـ ١ ، ٣) ، حـ (٠ ، ـ ٢)

ا لحل : الانتقال مسافة م ن في اتجاه $\overleftarrow{\text{م ن}}$ = الانتقال (٣ ـ٥ ، ـ ٣ – (-١))
= الانتقال (ـ ٢ ، ـ ٢)
أ$^/$ صورة أ بهذا الانتقال = (٤ ـ ٢ ، ـ ٣ ـ ٢) = (٢ ، ـ ٥)
ب$^/$ صورة ب بهذا الانتقال = (ـ ١ ـ ٢ ، ٣ ـ ٢) = (ـ ٣ ، ١)
حـ$^/$ صورة حـ بهذا الانتقال = (٠ ـ ٢ ، ـ ٢ ـ ٢) = (ـ ٢ ، ـ ٤)

مثال : أوجد أ/ صورة أ(٤ ، ٢) بالانتقال (ـ٣ ، ٢) ثم أوجد أ// صورة أ/ بالانتقال (٢ ، ٦) ما هو الانتقال ا لذي يجعل أ// هي صورة أ ؟

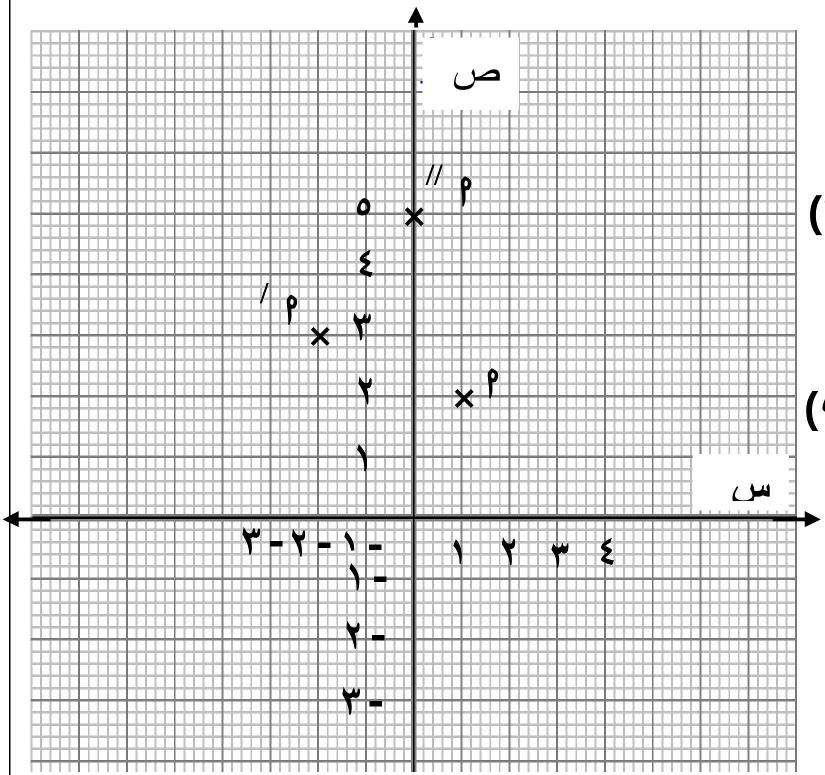
ا لحل : أ/ = (٤ ـ ٣ ، ٢ + ٢) = (١ ، ٤)
أ// = (١ + ٢ ، ٤ + ٦) = (٣ ، ١٠)
الانتقال هو (٣ ـ ٤ ، ١٠ ـ ٢) أي الانتقال (ـ ١ ، ٨) ا لذي يجعل أ// هي صورة أ

مثال: إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، أ/ هي صورة أ بالانتقال (ـ ٣ ، ١) ، أ// هي صورة أ/ بالانتقال (٢ ، ٢) ماهو الانتقال الذي يجعل أ// هي صورة أ ؟ ماذا تلاحظ ؟

ا لحل :

أ (١،٢) $\xrightarrow[\text{(ـ١،٣)}]{\text{بالانتقال}}$ أ/ (ـ٢،٣)

أ/(ـ٢،٣) $\xrightarrow[\text{(٢،٢)}]{\text{بالانتقال}}$ أ// (٠ ، ٥)



الانتقال (ـ ٣، ١) متبوعاً بالانتقال (٢ ، ٢) يكافئ الانتقال (-١ ، ٣)

قاعدة (١) :
الانتقال (ك$_1$، ل$_1$) متبوعاً بانتقال (ك$_2$ ، ل$_2$) يكافئ الانتقال (ك$_1$+ ك$_2$ ، ل$_1$+ ل$_2$)

مثال: إذا كانت أ = (ـ ٣ ، ١) ، ب = (٣ ، ـ ١) فأوجد الانتقال الذي يجعل ب صورة أ وكذلك الانتقال الذي يجعل أ هي صورة ب .

ا لحل :
الانتقال الذي يجعل ب صورة أ = الانتقال (٣ ـ (ـ ٣) ، ـ ١ ـ ١)
أي الانتقال (٦ ، ـ ٢)
الانتقال ا لذي يجعل أ صورة ب = الانتقال (ـ ٣ ـ ٣ ، ١ + ١)
أي الانتقال (ـ ٦ ، ٢)

قاعدة (٢) :

إذا كانت ب هي صورة أ بالانتقال (ك ، ل) فإن الانتقال الذي يجعل أ هي صورة ب هو الانتقال (ــ ك ، ــ ل) .

سؤال للتفكير

(١) علي شبكة تربيعية ارسم القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٢ ، ٣) ، ب (٢ ، ٥)
ثم أوجد صورتها بالانعكاس في محور الصادات متبوعاً بالانتقال (١ ، ــ ٥)

(٢) بتطبيق الانتقال الذي يحول النقطة (س، ص) إلي (س + ٢، ص + ٣)

١ – أ وجد صورة النقطة (١ ، ٤)

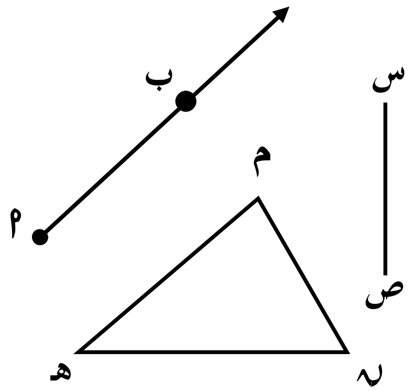
٢ – أ وجد صورة النقطة (ــ ٣، ٥)

٣– أ وجد النقطة التي صورتها (٢ ، ٣)

(٣) بالانتقال ٢ ب أوجد صورة كل مما يأتي :

١- س ص

٢- ∆ م ن هـ



(٤) أكمل ما يأتى :

١ – لتحديد الانتقال يلزم معرفة ٠٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠٠٠

٢– النقطة (٢ ، ٥) هي صورة النقطة (٣ ، ــ ٢) بالانتقال ٠٠٠٠٠٠

٣– صورة النقطة (٤ ، ــ ٥) بالانتقال (ــ ٢ ، ٣) هي ٠٠٠٠٠

٤– النقطة (ــ ٥ ، ٦) هي صورة النقطة ٠٠٠٠٠٠ بالانتقال (٢ ، ٣)

٥– صورة النقطة (٥ ، ــ ٤) بانتقال مقداره أربع وحدات في اتجاه الموجب لمحور الصادات هي ٠٠٠٠٠

[٥] ارسم المثلث أ ب حـ القائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ أ = ١٠ سم ثم أوجد صورة هذا المثلث بانتقال مسافة ٥ سم في اتجاه ب حـ

[٦] إذا كانت صورة النقطة (٣ ، ٢) هي (٩ ، ٤) بالانتقال مسافة أ ب في اتجاه أ ب حيث أ = (٢ ، ـ ٣) أوجد ب

[٧] ارسم على الشبكة التربيعية △ ا ب ج حيث ا (– ٣ ، ٢) ، ب (– ١ ، ١) ، ج (– ٢ ، ٠) ثم أوجد صورته بالانتقال (س ، ص) ← (س+٢، ص+١)

[٨] أوجد صورة كل من النقط الآتية بالانتقال مسافة أ ب فى الاتجاه أ ب حيث أ (٣ ، ٤) ، ب (٧ ، ٢)

(١) حـ (٣ ، – ٢) (٢) ب (– ١ ، ٣) (٣) هـ (٠ ، ٢)

[٩] النقطة أ/ (٣ ، – ٣) هى صورة النقطة أ بانتقال قاعدته (س ، ص) ← (س– ١ ، ص – ٤) ارسم النقطة أ و صورتها أ/ على الشبكة التربيعية و بنفس الانتقال أوجد صورة المثلث أ ب حـ حيث ب (٥ ، ٠) ، حـ (– ١ ، – ٢)

[١٠] إذا كانت صورة النقطة أ (١ ، ١) بالانتقال فى المستوى هى أ/ (٢ ، ٢) أوجد صورة النقط التالية بنفس الانتقال : و (٠ ، ٠) ، ب (– ١ ، ٣) ، حـ (– ٣ ، ٥)

نقطة + انتقال = صورة

النقطة = صورة – انتقال

الانتقال = صورة – نقطة

الدوران

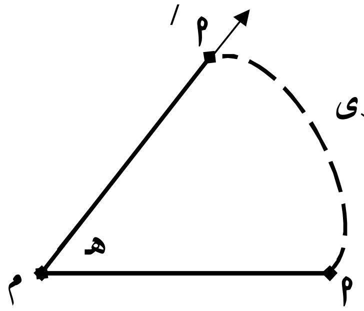
الدوران :

هو تحويلة تدور الشكل الهندسي حول نقطة ثابتة بزاوية معينة فى اتجاه معين (+) (-)

أو هو تحويلة هندسية تحول الشكل الهندسي الى شكل هندسى آخر مطابق له .

أى أن : الدوران الذى مركزه م و قياس زاويته هـ يحول النقطة م إلى نفسها و يحول أى نقطة أخرى ٩ فى المستوى إلى نقطة ٩ / فى نفس المستوى بحيث :

(١) م ٩ = م ٩ /   (٢) ق (∠ ٩ م ٩ /) = هـ



ملاحظات

١- الدوران يكون موجبا إذا كان عكس عقارب الساعة .

٢- الدوران يكون سالبا إذا كان مع حركة عقارب الساعة .

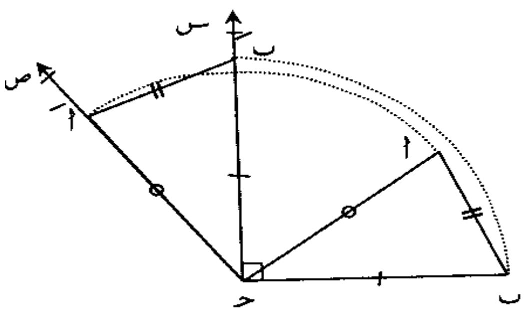
٣- الدوران بزاوية قياسها ١٨٠ ، – ١٨٠ يسمى دوران نصف دورة .

٤- الدوران بزاوية قياسها ٣٦٠ ، – ٣٦٠ يسمى بالدوران المحايد

(لأنه يعيد الشكل إلى وضعه الأصلي .

٩ /

*** مثـــال** فى الشكل المقابل : ٢ ب ح مثلث



ارسم صورة Δ ٢ ب ح بالدوران

حول ح بزاوية قياسها ٩٠°

∵ زاوية الدوران موجبة

∴ الدوران عكس حركة عقارب الساعة

(١) نرسم ح س بحيث ق (ب ح س) = ٩٠°

ثم نأخذ ب / ∈ ح س بحيث ب ح = ب / ح

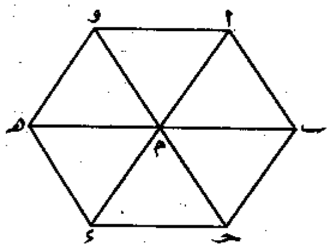
(٢) نرسم ح ص بحيث (٢ ح ص) = ٩٠° ثم نأخذ ٢ / ∈ ح ص

بحيث ٢ ح = ٢ / ح ثم نصل ب / ٢ /

فيكون Δ ٢ / ب / ح هو صورة Δ ٢ ب ح بالدوران حول ح بزاوية قياسها ٩٠°

مـثـال : فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب حـ ء هـ و سداسيًا منتظمًا مركزه م فأكمل ما يأتى :



(١) صورة النقطة أ بدوران حول م بزاوية قياسها ١٨٠° هى ....

(٢) صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بدوران حول م بزاوية قياسها (−٦٠°) هى ....

(٣) صورة Δ حـ م ء بدوران حول م بزاوية قياسها ١٢٠° هو ....

تذكر أن : قياس الزاوية الداخلة للسداسى المنتظم = ١٢٠°

((١) ء   (٢) $\overline{\text{حـ ب}}$ (٣) Δ أ م ب)

الدوران حول نقطة الأصل فى المستوى الاحداثي

(١) الدوران بزاوية ٩٠ ٥ : [نقلب ونعكس إشارة الأول]

صورة النقطة (س ، ص) $\xrightarrow[\text{بزاوية قياسها ٩٠°}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (− ص ، س)

مثلا :

صورة النقطة (٢ ، ٥) $\xrightarrow[\text{بزاوية قياسها ٩٠°}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (− ٥ ، ٢)

صورة النقطة (− ١ ، ٤) $\xrightarrow[\text{بزاوية قياسها ٩٠°}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (− ٤ ، − ١)

(٢) الدوران بزاوية − ٩٠ ° : [نقلب ونعكس إشارة الثانى]

صورة النقطة (س ، ص) $\xrightarrow[\text{بزاوية قياسها − ٩٠°}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (ص ، − س)

مثلا :

صورة النقطة (− ١ ، ٤) $\xrightarrow[\text{بزاوية قياسها − ٩٠°}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (٤ ، ١)

(٣) الدوران بزاوية _ ١٨٠ ° : [عكس إشارة الأول و الثاني فقط]

صورة النقطة (س ، ص) $\xleftarrow[\text{بزاوية قياسها \_ ١٨٠ °}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (– س ، – ص)

مثلا :

صورة النقطة (– ١ ، ٤) $\xleftarrow[\text{بزاوية قياسها – ٩٠ °}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (١ ، – ٤)

(٤) الدوران بزاوية _ ٣٦٠ ° : [هى نفس النقطة]

صورة النقطة (س ، ص) $\xleftarrow[\text{بزاوية قياسها \_ ٣٦٠ °}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (س ، ص)

مثلا :

صورة النقطة (– ١ ، ٤) $\xleftarrow[\text{بزاوية قياسها \_ ٣٦٠ °}]{\text{بالدوران حول نقطة الأصل}}$ النقطة (–١ ، ٤)

أكمل ما يأتى :

(١) صورة النقطة (٢ ، –٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هى ....
وبزاوية قياسها ١٨٠° هى ....

(٢) صورة النقطة (–١ ، ٠) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هى ....
وبزاوية قياسها ٣٦٠° هى ....

(٣) النقطة (٣ ، –٢) هى صورة النقطة (٢ ، ٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ....

(٤) صورة النقطة .... بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هى (–١ ، ٤)

(٥) صورة النقطة .... بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها (–١٨٠°) هى (٥ ، –٢)

(٦) صورة النقطة (–٣ ، ٧) بالدوران ٩٠° حول نقطة الأصل متبوعًا بانعكاس فى محور الصادات هى ....

(٧) صورة النقطة (–٢ ، ٠) بالانتقال : (س ، ص) ⟵ (س + ٣ ، ص – ١) متبوعًا بدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هى ....

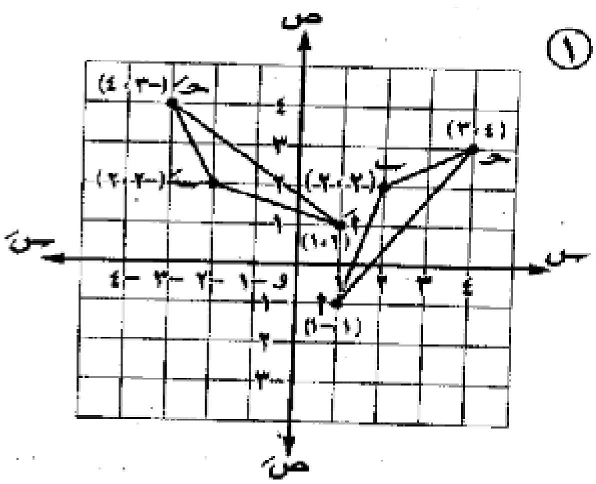
(٨) الدوران بزاوية قياسها ٩٠° حول نقطة الأصل يرسم نقطة (س ، –ص) إلى النقطة ....

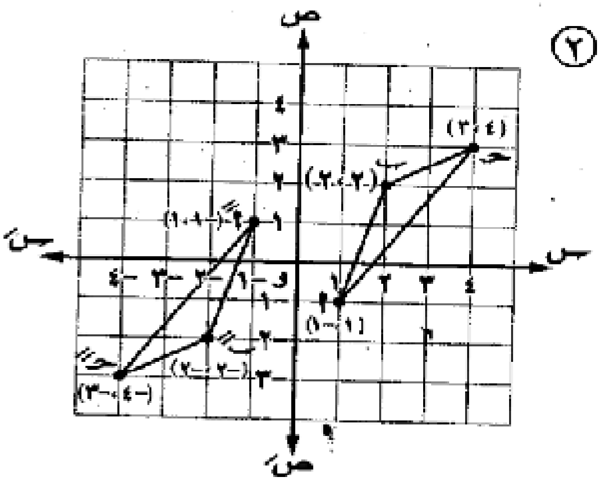
مثال : ارسم على شبكة تربيعية Δ أ ب حـ حيث : أ (١ ، −١) ، ب (٢ ، ٢) ، حـ (٤ ، ٣)

(١) ارسم Δ أَ بَ حَ صورة Δ أ ب حـ بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠°

(٢) ارسم Δ أً بً حً صورة Δ أ ب حـ بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ١٨٠°

الحل :





مثال اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) صورة النقطة (− ٢ ، ٤) بدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠°

هى ...... [(− ٤ ، − ٢) أ، (− ٤ ، ٢) أ، (٢ ، − ٤) أ، (− ٣ ، − ٤)]

(٢) صورة النقطة (١ ، ٣) بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ١٨٠°

هى ...... [(− ١ ، ٣) أ، (− ٣ ، ١) أ، (٣ ، − ١) أ، (− ١ ، − ٣)]

(٣) إذا كانت صورة النقطة (− ٤ ، ٠) بالدوران حول نقطة الأصل هى (٠ ، − ٤)

فإن قياس زاوية الدوران هى ......° (١٨٠ أ، ٩٠ أ، ٣٦٠ أ، ٤٥)

(٤) صورة النقطة (٢ ، ٣) هى نفسها بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية

قياسها ......° (٩٠ أ، ١٨٠ أ، − ٩٠ أ، ٣٦٠)

(٥) صورة النقطة (− ٢ ، ٠) بإنتقال (٣ ، −١) متبوعا بدوران ٩٠°

حول نقطة الأصل هى ......

[(١ ، − ١) أ، (١ ، ١) أ، (− ١ ، − ١) أ، (− ١ ، ١)]

ملخص للتحويلات الهندسية (الانعكاس ، الانتقال ، الدوران) فى المستوى الإحداثى :

صورة النقطة (س ، ص)

بالانعكاس فى محور السينات	النقطة (س ، -ص)
بالانعكاس فى محور الصادات	النقطة (-س ، ص)
بالانعكاس فى محور السينات متبوعًا بالانعكاس فى محور الصادات	النقطة (-س ، -ص)
بالانتقال (س ، ص) ← (س + ك ، ص + ل)	النقطة (س + ك ، ص + ل)
بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° (دوران ربع دورة)	النقطة (-ص ، س)
بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها (-٩٠°) أ ٢٧٠°	النقطة (ص ، -س)
بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ± ١٨٠° (دوران نصف دورة)	النقطة (-س ، -ص)
بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ± ٣٦٠° (الدوران المحايد)	النقطة (س ، ص)

تمارين متنوعة على الدوران

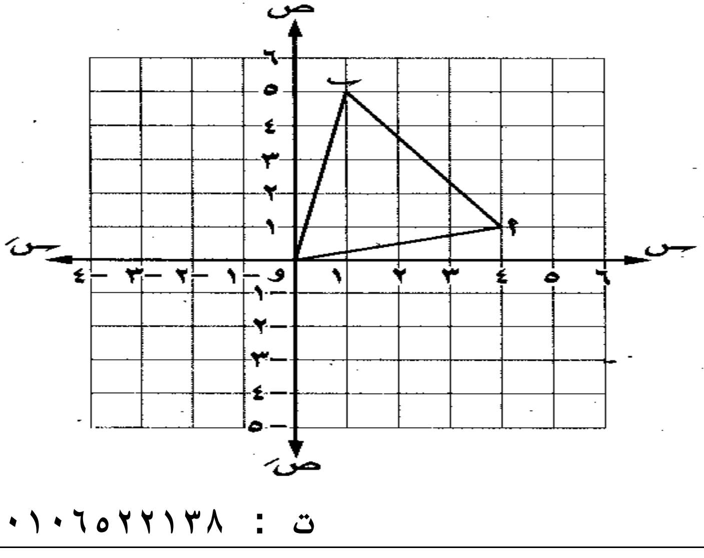
١ على الشبكة التربيعية :

أوجد صورة المثلث أ و ب بالدوران

حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها :

① ٩٠°

② ١٨٠°



٢ في الشكل المقابل :

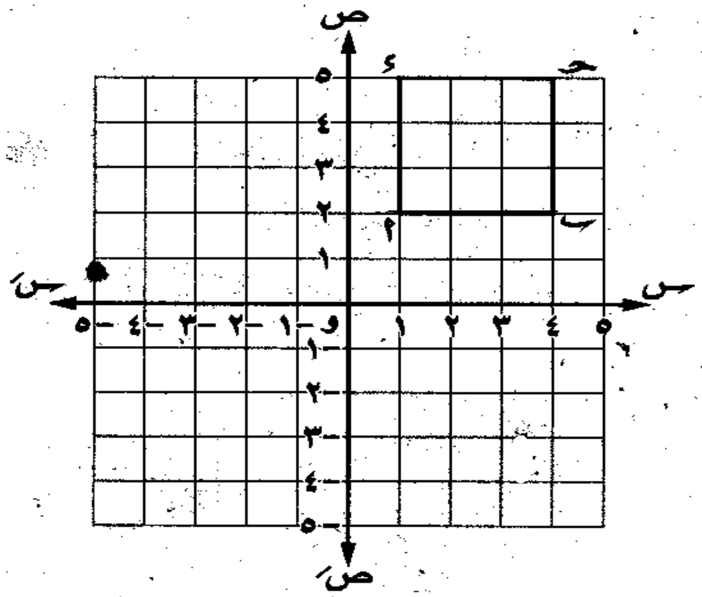
ارسم صورة المربع أ ب حـ ء

بدوران حول نقطة الأصل (و)

بزاوية قياسها :

(١) ٩٠°

(٢) ١٨٠°



---

٣ إذا كانت صورة النقطة حـ بالدوران حول نقطة الأصل بزاوية قياسها ٩٠° هي : حـَ (-٤ ، ٥) أوجد النقطة حـ ثم أوجد صورتها حـً بالدوران بزاوية قياسها ١٨٠° حول نقطة الأصل.

---

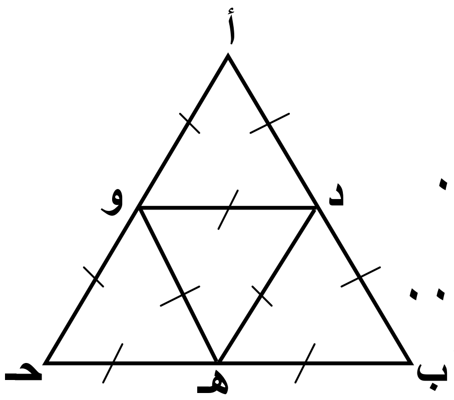
٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ (-١ ، -٢) ، ب (٧ ، ٢) ، حـ (٥ ، ٦) ، ء (-٣ ، ٢)

، ارسم على المستوى الإحداثي المستطيل وصورته بالدوران حول نقطة الأصل

حيث : (س ، ص) ⟵ (- ص ، س)

---

[٥] في ا لشكل ا لمقابل : △ أ ب حـ متساوي الأضلاع ، د ، هـ ، و منتصفات $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$ علي ا لترتيب .



أ كمـل ما يأتي :

(١) صورة △ د ب هـ بالانتقال (ب د) هي ....

(٢) △ هـ د ب صورة △ أ د و بدوران حول .... بزاوية قياسها ....

(٣) $\overline{\text{د هـ}}$ صورة $\overline{\text{أ د}}$ بالدوران حول .... بزاوية ...

(٤) صورة △ ب د هـ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ هي ....

(٥) △ هـ حـ و صورة △ د أ و بالانعكاس في ...