* مفاهيم ومسلمات:

(١) أي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم وحيد.

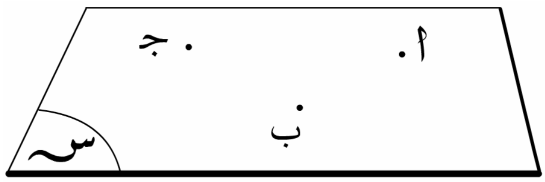
(٢) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى وحيد.

(٣) إذا اشترك مستقيم ومستوى في أكثر من نقطة، فإن المستقيم يقع بأكمله في المستوى.

* تعيين المستوى:

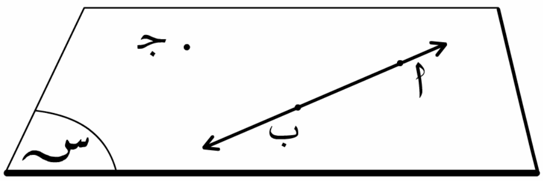
يتعين المستوى بأي من الحالات الآتية:

(١)



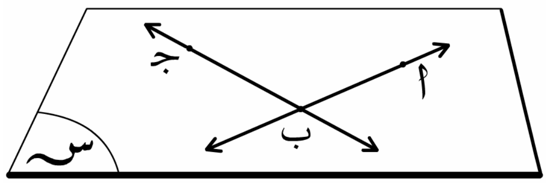
«ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة»

(٢)



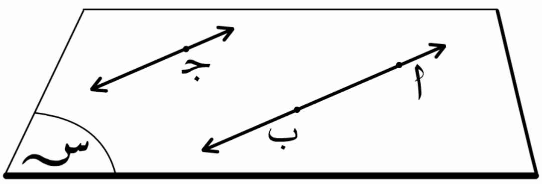
«مستقيم ونقطة خارجه»

(٣)



«مستقيمين متقاطعين»

(٤)



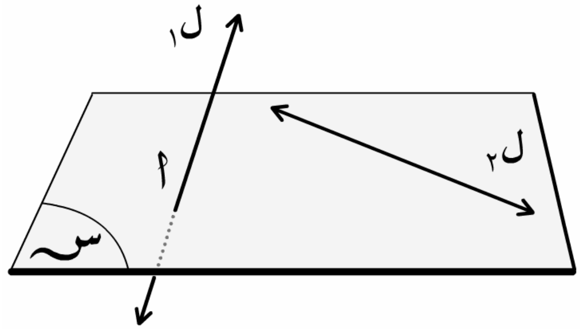
«مستقيمين متوازيين»

* الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفراغ:

(١) المستقيمان متقاطعان: ... وفي هذه الحالة يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.

(٢) المستقيمان متوازيان: ... وفي هذه الحالة يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.

(٣) المستقيمان متخالفان: .. وفي هذه الحالة لا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.



«المستقيمان ل١، ل٢ متخالفان»

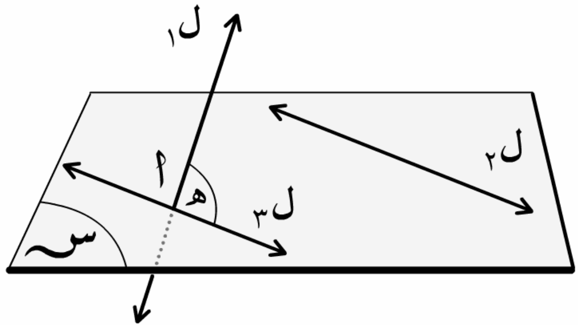
$$ل_١ \cap ل_٢ = \varnothing ،\ ل_٢ \subset س ،\ ل_١ \cap س = \{أ\}$$

ملاحظة

- إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \varnothing$ ويمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن: $ل_١ // ل_٢$.
- إذا كان $ل_١ \cap ل_٢ = \varnothing$ ولا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن: ل١، ل٢ متخالفان.

* الزاوية بين مستقيمين متخالفين:

هي الزاوية بين أحدهما والقاطع له موازيًا الآخر.

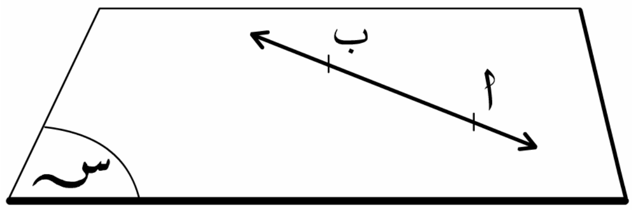


ل١، ل٢ متخالفان (غير مستويين)، $ل_٢ // ل_٣$ (مستويان)، $ل_١ \cap ل_٣ = \{أ\}$، لذلك فإن الزاوية هـ بين ل١، ل٣ هي الزاوية بين ل١، ل٢.

وإذا كان $ل_١ \perp ل_٣$، فإن $ل_١ \perp ل_٢$، ويقال عندئذٍ أن ل١،ل٢ متخالفان على التعامد.

* الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى في الفراغ:

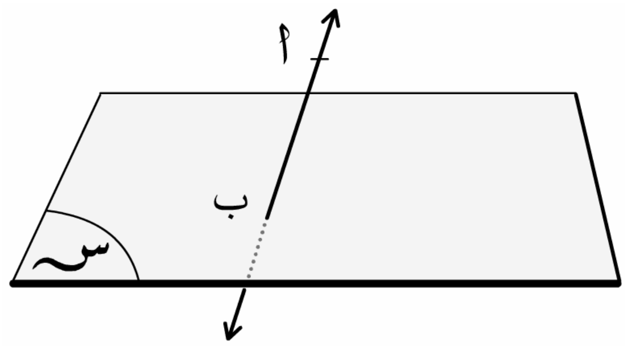
للمستقيم والمستوى في الفراغ ثلاثة أوضاع، هي:



«المستقيم يقع بأكمله داخل المستوى»

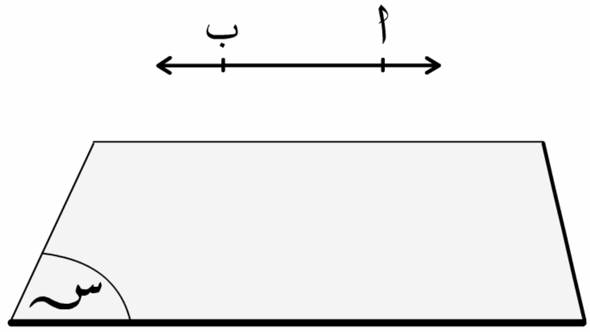
$\text{س} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \subset \text{س}$



«المستقيم يقطع المستوى في نقطة»

$\text{س} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \{\text{ب}\}$

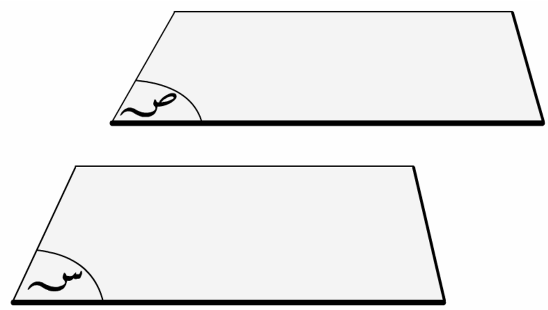


«المستقيم يوازي المستوى»

$\text{س} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \varnothing$ أي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \,//\, \text{س}$

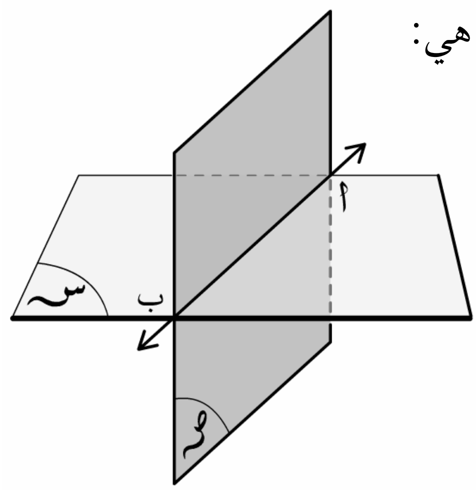
* الأوضاع النسبية لمستويين في الفراغ:

يوجد لمستويين مختلفين ثلاثة أوضاع في الفراغ، هي:



«المستويان متوازيان»

$\text{س} \cap \text{ص} = \varnothing$ أي $\text{س} \,//\, \text{ص}$



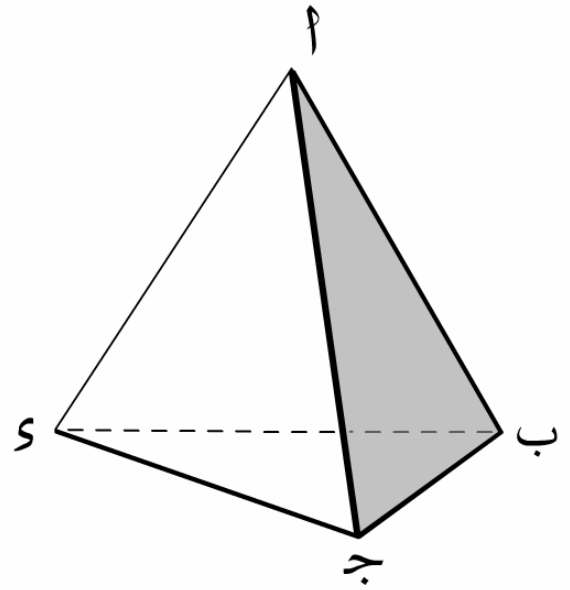
«المستويان متقاطعان»

$\text{س} \cap \text{ص} = \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

«المستويان متطابقان»

س = ص كما يمكننا القول أن س // ص

❋ أمثلة:



(١) في الشكل المقابل: أ ∉ المستوى ب ج ء

أولاً: أكمل ما يأتي

أ) $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ∩ المستوى ب ج ء =

ب) $\overleftrightarrow{\text{ءج}}$ ∩ المستوى أ ء ب =

ج) $\overleftrightarrow{\text{ءب}}$ ∩ المستوى أ ء ج =

ء) المستوى ب ج ء ∩ المستوى أ ء ب =

هـ) المستوى ب ج ء ∩ المستوى أ ء ج =

و) المستوى أ ء ب ∩ المستوى أ ء ج =

ز) المستوى أ ء ب ∩ المستوى أ ء ج ∩ المستوى ب ج ء =

ثانيًا: أذكر ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.

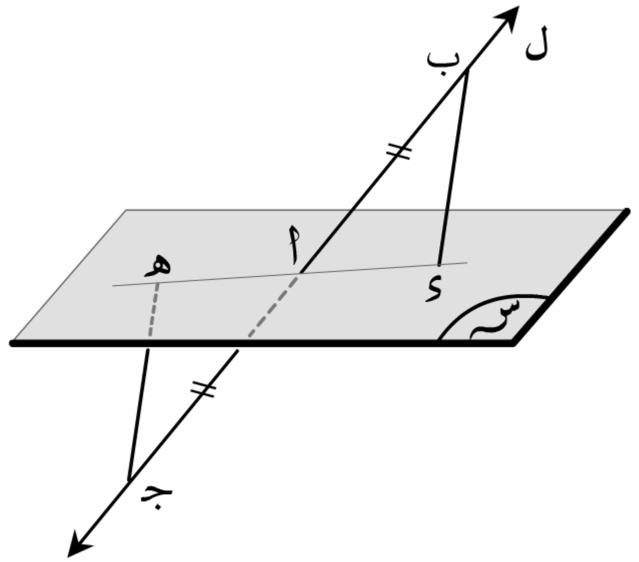
(٢) في الشكل التالي:

المستقيم ل ∩ المستوى س = {أ}، ب، ج ∋ ل بحيث أ ب = أ ج، رُسم $\overline{\text{بء}}$ // $\overline{\text{جهـ}}$ حيث ء، هـ ∋ س، أثبت أن:

<u>أولاً:</u> النقط ء، أ، هـ على استقامة واحدة.

<u>ثانيًا:</u> الشكل ب ء ج هـ متوازي الأضلاع.

الفكرة:



اثبات أن ثلاث نقط في الفراغ تقع على استقامة واحدة، يقتضي اثبات أن الثلاث نقط تقع في مستويين مختلفين، ومن ثم فهي تقع على خط تقاطع المستويين (على استقامة واحدة).

الحل:

∵ $\overline{بى}$ // $\overline{جـهـ}$

∴ $\overline{بى}$ ، $\overline{جـهـ}$ يعينان مستوى واحد وليكن ص

∴ النقطتان ى، هـ تنتميان إلى خط تقاطع المستويين س، ص .... (١)

لكن $\overleftrightarrow{بجـ}$ ⊂ ص، أ ∈ $\overleftrightarrow{بجـ}$ ∴ أ ∈ ص ، ∵ أ ∈ س

∴ أ ∈ خط تقاطع المستويين س، ص .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن النقط ى، أ، هـ على استقامة واحدة.

من تطابق المثلثين أ ى ب، أ هـ جـ ينتج أن ى ب = هـ جـ، ..... أكمل

بعض الملاحظات الهامة:

تأمّل حجرة الدراسة ولاحظ الآتي:

(١) جميع المستقيمات الرأسية متوازية فيما بينها.

(٢) جميع المستويات الأفقية متوازية فيما بينها.

(٣) ليس من الضروري أن تتوازى المستقيمات الأفقية.

(٤) ليس من الضروري أن تتوازى المستويات الرأسية.

(٥) المستقيمان المتوازيان أو المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد.

*** توازي مستقيمين:**

يقال لمستقيمين مستويين (يجمعهما مستوى واحد) $ل_{١}$، $ل_{٢}$ أنهما متوازيان إذا كان:

$ل_{١} \cap ل_{٢} = \varnothing$ أ، $ل_{١} = ل_{٢}$ أي منطبقان.

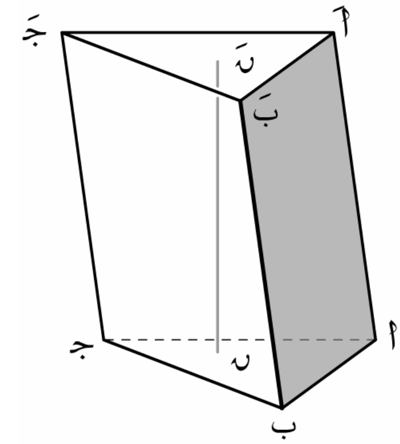
*** حقيقة هندسية:**

المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان.

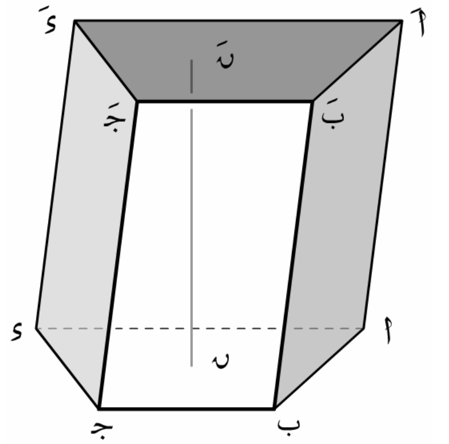
بعض المجسمات الشهيرة:

*** المنشور:**

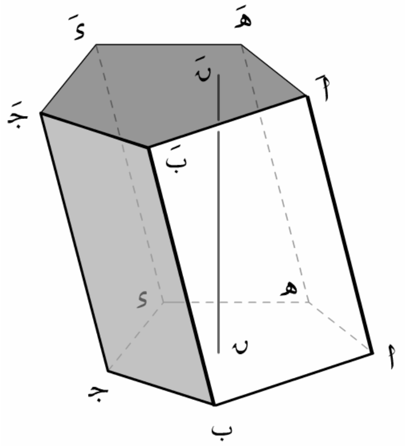
«هو الجسم المتولد من انتقال سطح مضلع موازيًا لنفسه في اتجاه ثابت»



«منشور ثلاثي»



«منشور رباعي»



«منشور خماسي»

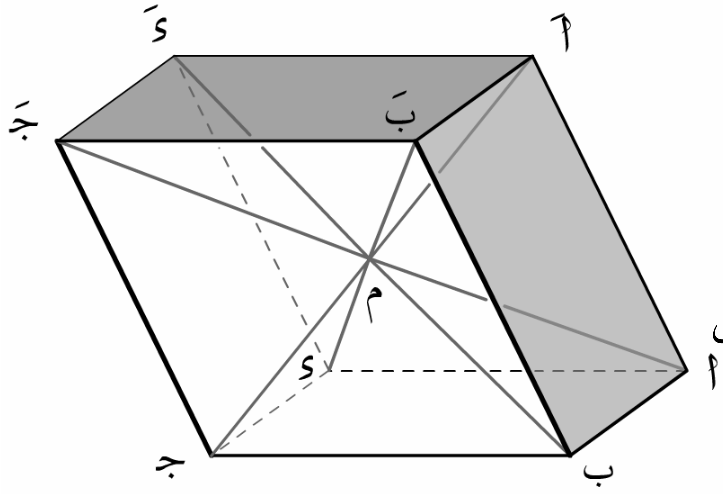
- يسمى سطح المضلع في وضعه الابتدائي والنهائي بقاعدتي المنشور.
- يقال أن المنشور مائلاً إذا كان الاتجاه الثابت يميل على سطح المضلع.
- يقال أن المنشور قائمًا إذا كان الاتجاه الثابت عمودي على سطح المضلع.

ويلاحظ أن:

- قاعدتا المنشور متوازيتان ومتطابقتان.

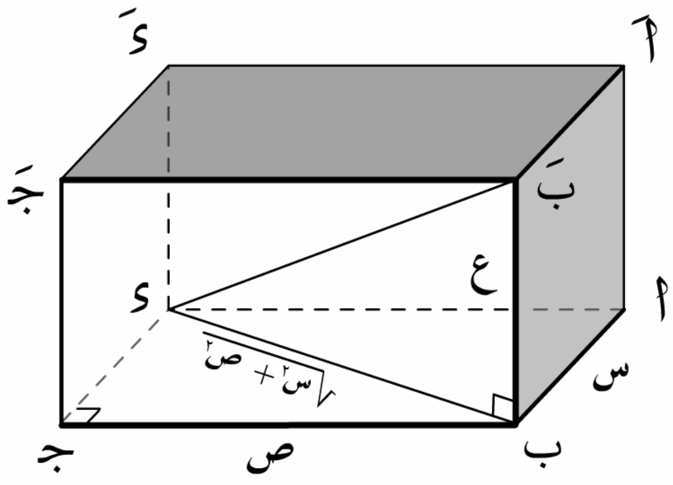
- الأحرف الجانبية للمنشور قطع مستقيمة متوازية ومتساوية في الطول.
- وجه المنشور عبارة عن سطح متوازي الأضلاع.
- وجه المنشور عبارة عن سطح مستطيل إذا كان المنشور قائمًا.
- ارتفاع المنشور يساوي البعد العمودي بين قاعدتيه.

حالات خاصة:



* متوازي السطوح:

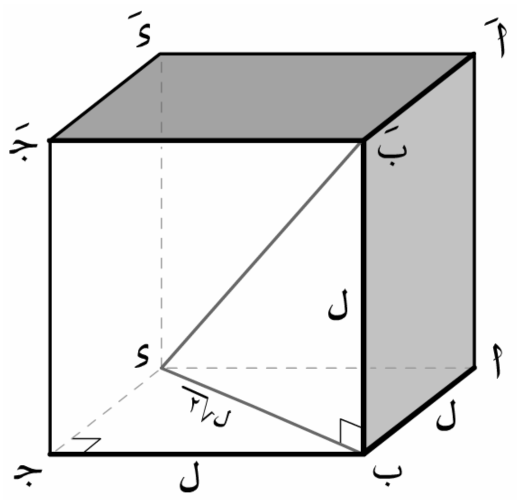
- هو منشور سطح كل من قاعدتيه متوازي الأضلاع.
- قطر متوازي السطوح هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين ليسا في مستوى واحد – وعددها أربعة.
- أقطار متوازي السطوح تتقاطع جميعًا في نقطة واحدة، هي منتصف كل منها.



* متوازي المستطيلات:

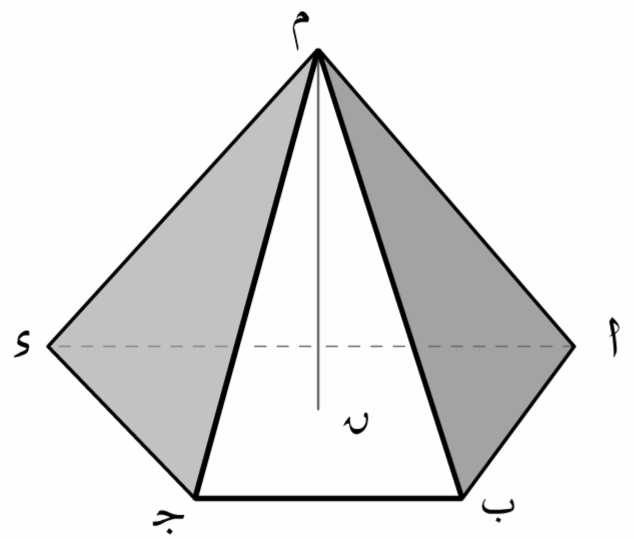
- هو منشور قائم كل من قاعدتيه سطح مستطيل.
- أبعاد متوازي المستطيلات س، ص، ع هي أطوال ثلاثة أحرف متلاقية في رأس واحدة.
- مساحته الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ع(س + ص)
- مساحته الكلية = ٢(س ص + ص ع + ع س)
- حجمه = س ص ع
- طول قطره = $\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}+\text{ع}^{٢}}$

* المكعب:

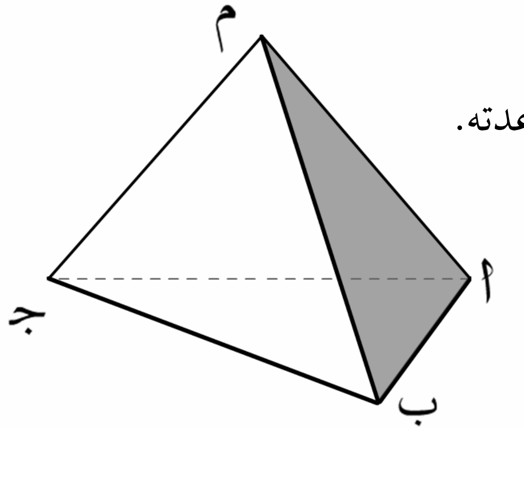


- هو متوازي مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة، طول كل منها **ل** – مثلاً.
- كل وجه من أوجهه الستة مربع.
- مساحته الجانبية = ٤ ل^{٢}
- مساحته الكلية = ٦ ل^{٢}
- حجمه = ل^{٣}
- طول قطره = ل √٣

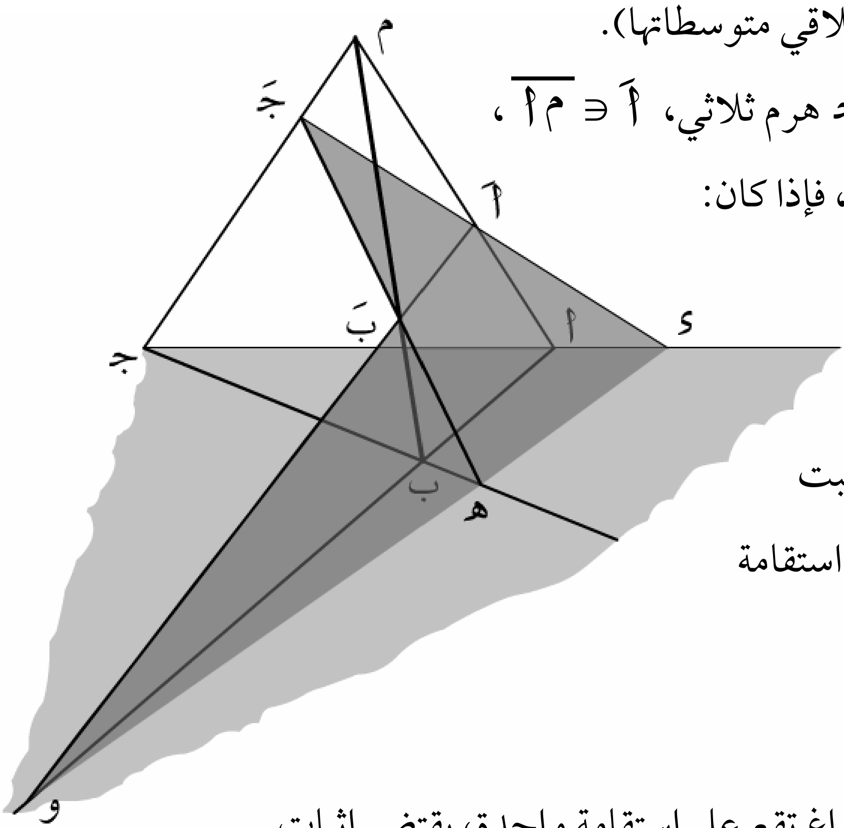
* الهرم:



- هو اتحاد القطع المستقيمة المرسومة من نقطة خارج مستوى معلوم إلى جميع نقط منطقة مضلعة في المستوى المعلوم.
- يُسمى الهرم حسب عدد أضلاع قاعدته ... ثلاثي .. رباعي ... إلخ.
- تُسمى النقطة م رأس الهرم، ويُقرأ الهرم ويُكتب ابتداءً من رأسه.
- تُسمى القطع المستقيمة $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م جـ}}$، ... الأحرف الجانبية للهرم.



- كل وجه من أوجه الهرم الجانبية عبارة عن مثلث.
- ارتفاع الهرم هو طول العمود النازل من رأسه إلى قاعدته.
- الهرم الثلاثي المنتظم: هو هرم ثلاثي أطوال أحرفه الستة متساوية، ويكون كل وجه من أوجهه الأربعة مثلث متساوي الأضلاع، وارتفاعه يلاقي قاعدته



عند مركزها الهندسي (نقطة تلاقي متوسطاتها).

مثال: في الشكل المقابل: م أ ب ج هرم ثلاثي، أَ ∈ $\overline{\text{م أ}}$ ،

بَ ∈ $\overline{\text{م ب}}$، جَ ∈ $\overline{\text{م ج}}$، فإذا كان:

$\overleftrightarrow{\text{أ ج}} \cap \overleftrightarrow{\text{أَ جَ}} = \{\text{ء}\}$،

$\overleftrightarrow{\text{ب ج}} \cap \overleftrightarrow{\text{بَ جَ}} = \{\text{هـ}\}$،

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{أَ بَ}} = \{\text{و}\}$، أثبت

أن النقط ء، هـ، و تقع على استقامة

واحدة.

<u>الفكرة:</u>

اثبات أن ثلاث نقط في الفراغ تقع على استقامة واحدة، يقتضي اثبات أن الثلاث نقط تقع في مستويين مختلفين، ومن ثم فهي تقع على خط تقاطع المستويين.

<u>الحل:</u>

∵ ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$ ∴ ء ∈ المستوى أ ب ج،

بالمثل: هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ ∴ هـ ∈ المستوى أ ب ج،

بالمثل: و ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∴ و ∈ المستوى أ ب ج

كذلك: ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أَ جَ}}$ ∴ ء ∈ المستوى أَ بَ جَ،

بالمثل: هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{بَ جَ}}$ ∴ هـ ∈ المستوى أَ بَ جَ،

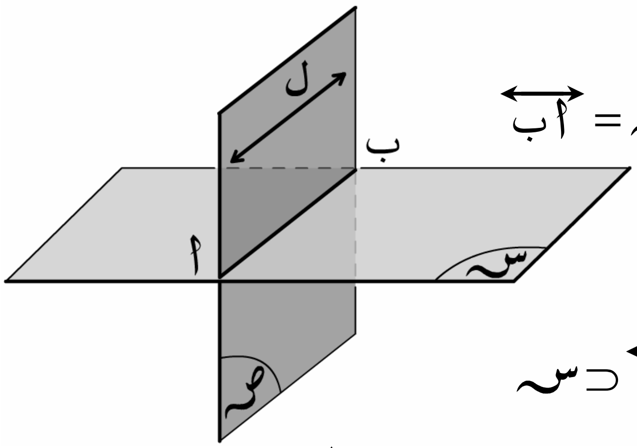
بالمثل: و ∈ $\overleftrightarrow{\text{أَ بَ}}$ ∴ و ∈ المستوى أَ بَ جَ

... أكمل

توازي مستقيم ومستوى

❋ **نظرية (١):** {البرهان مقرر}

«إذا وازى مستقيم مستويًا فإنه يوازي جميع المستقيمات التي تنشأ عن تقاطع هذا المستوى مع المستويات التي تحتوي ذلك المستقيم».



المعطيات: ل // س، ل ⊂ ص، س ∩ ص = $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

المطلوب: أثبت أن: ل // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

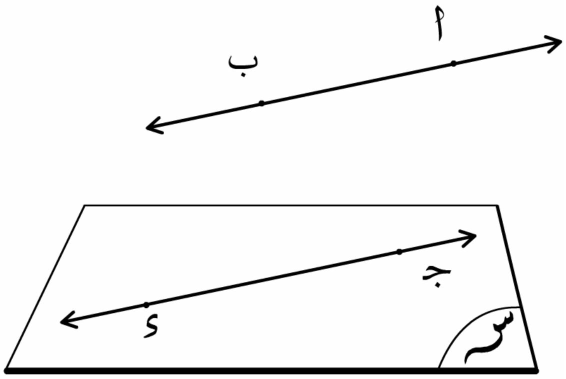
البرهان: ∵ ل // س ∴ ل ∩ س =

∴ ل ∩ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = لأن $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊂ س

∵ ل، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊂ ص (يجمعهما مستوى واحد وغير متقاطعين)

∴ ل // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

❋ **حقيقة هندسية:**



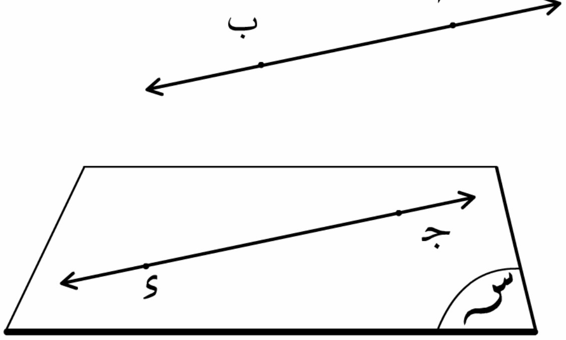
«إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيمًا في المستوى فإنه يوازي ذلك المستوى».

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ⊄ س، $\overleftrightarrow{\text{جد}}$ ⊂ س، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جد}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // س

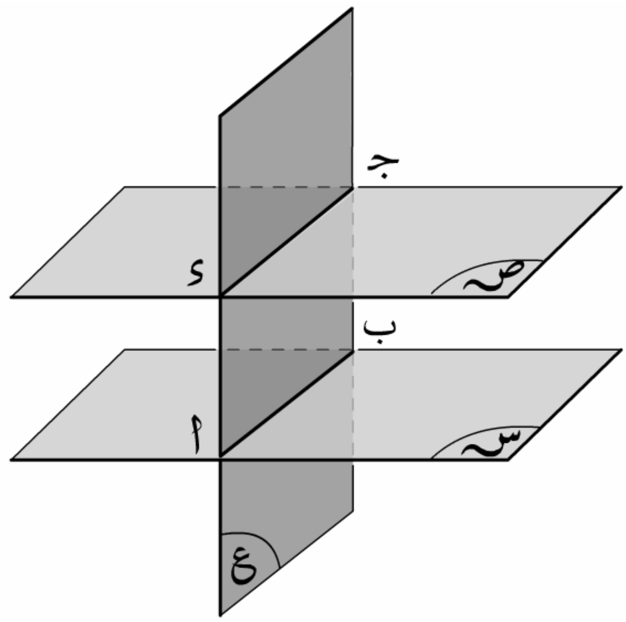
❋❋ **نتائج هامة:**

نتيجة (١): ❋❋



«إذا وازى مستقيم مستويًا، فالمستقيم الذي يمر بأي نقطة من نقط المستوى موازيًا المستقيم المعلوم يقع بأكمله في المستوى».

$\overleftrightarrow{أب}$ // سـ، جـ ∈ سـ، $\overleftrightarrow{جـء}$ // $\overleftrightarrow{أب}$ ∴ $\overleftrightarrow{جـء}$ ⊂ سـ



نتيجة (٢): ❊❊❊❊❊

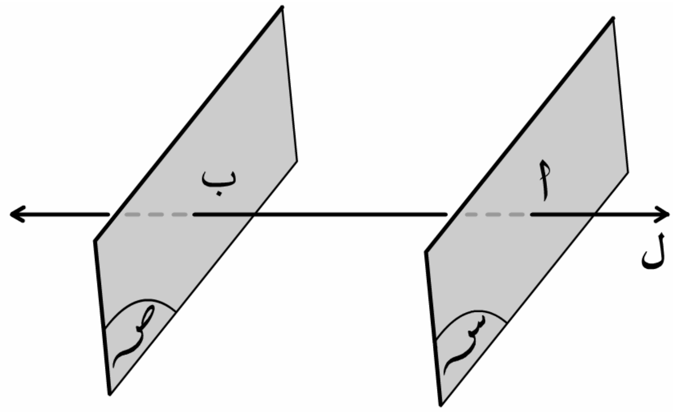
«إذا قطع مستوى كل من مستويين متوازيين فخطًّا تقاطعه معهما يكونان متوازيين».

ع ∩ سـ = $\overleftrightarrow{أب}$ ، ع ∩ صـ = $\overleftrightarrow{جـء}$ ،

سـ // صـ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـء}$

نتيجة (٣): ❊

«إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر».

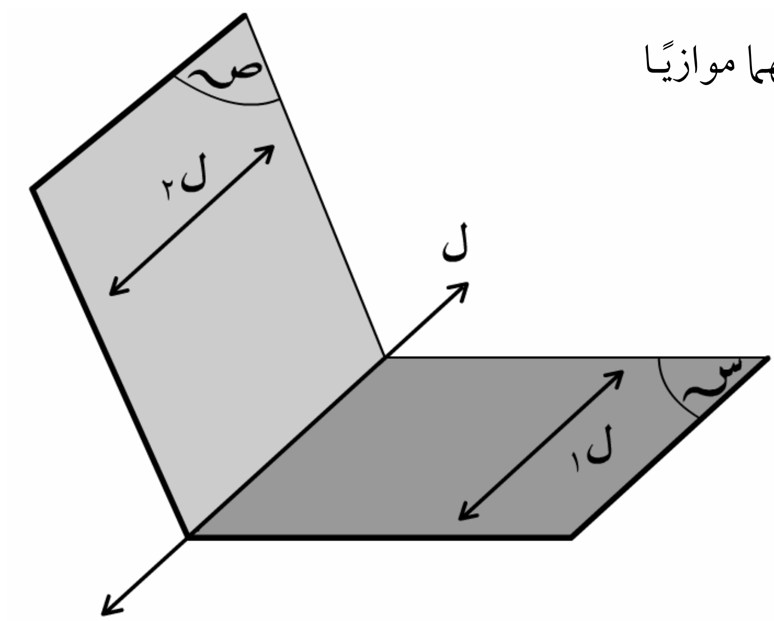


سـ // صـ، ل ∩ سـ = {أ}

∴ ل ∩ صـ ≠ ∅ أي ل ∩ صـ = {ب}

نتيجة (٤): ❊❊❊

«إذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوى وتقطع المستويان كان خط تقاطعهما موازيًا هذين المستقيمين».

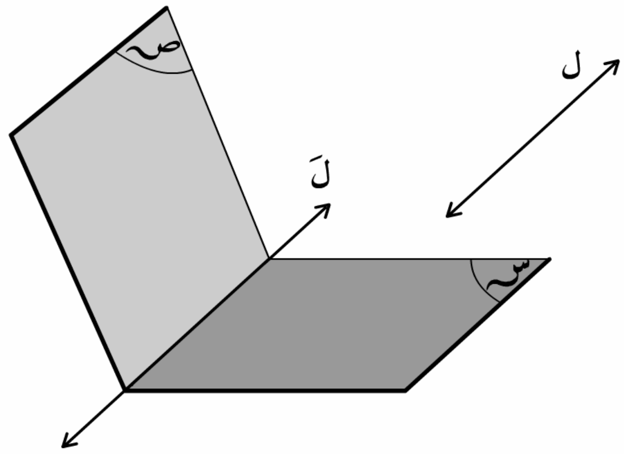


ل١ // ل٢، ل١ ⊂ سـ،

ل٢ ⊂ صـ، سـ ∩ صـ = ل

∴ ل // ل١ // ل٢

نتيجة (٥): ❋❋❋❋

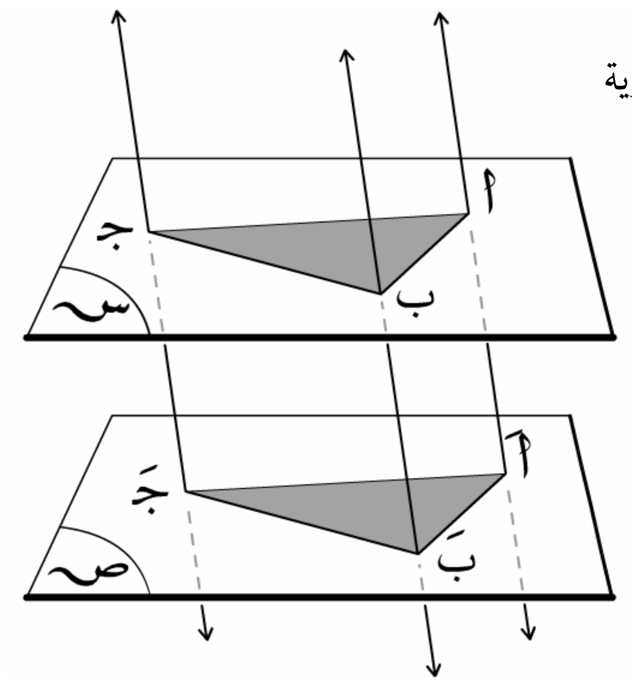


«إذا وازى مستقيم كل من مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما».

ل // سـ ، ل // صـ ، سـ ∩ صـ = لَ

∴ ل // لَ

مثال (١):



$\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ببَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ججَ}}$ ثلاثة مستقيمات متوازية ليست في مستوى واحد، قطعها المستويان المتوازيان سـ ،صـ في أ ،ب ،جـ ، أَ ، بَ ، جَ على الترتيب، أثبت أن:

Δ أ ب جـ ≡ Δ أَ بَ جَ

الحل: ∵ $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ببَ}}$ ∴ هما يعينان مستوى واحد أ أَ بَ ب ، ∵ سـ // صـ

∴ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{أَبَ}}$ ∴ الشكل أ أَ بَ ب متوازي الأضلاع ∴ أب = أَبَ .... (١)

بالمثل:

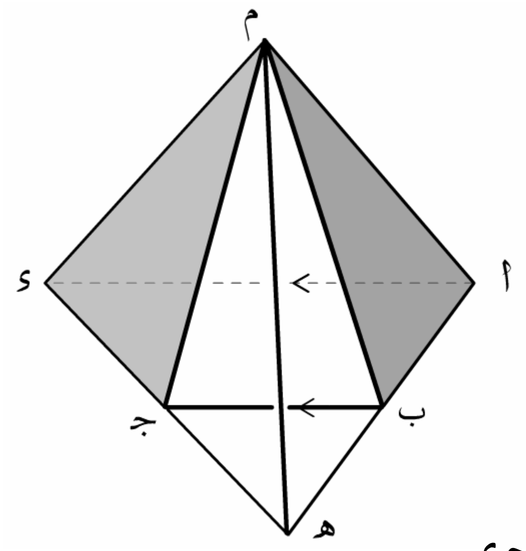
<u>مثال (٢):</u>

م أ ب جـ ى هرم رباعي قاعدته شبه منحرف فيه

$\overline{\text{أى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$، استنتج:

أولاً: خط تقاطع المستويين م أ ب، م جـ ى

ثانيًا: خط تقاطع المستويين م أ ى، م ب جـ



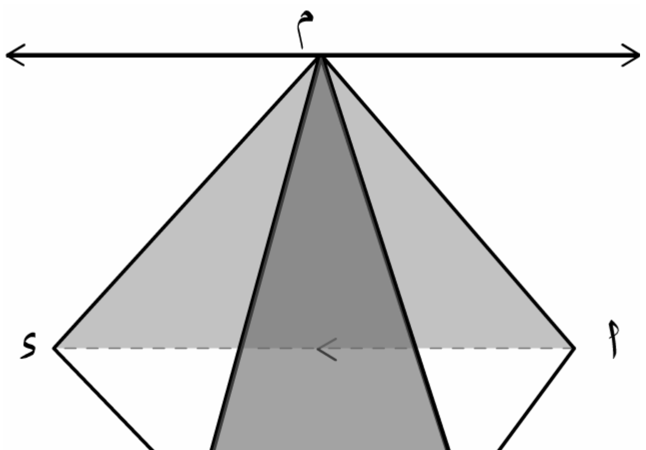
<u>الحل:</u> ∵ م ∈ المستويين م أ ب، م جـ ى

∴ م ∈ خط تقاطعهما .... (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊂ المستوى م أ ب، $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ ⊂ المستوى م جـ ى

، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ = {هـ} ∴ هـ ∈ خط تقاطع المستويين م أ ب، م جـ ى .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن: المستوى م أ ب ∩ المستوى م جـ ى = $\overleftrightarrow{\text{م هـ}}$



∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ⊂ المستوى م أ ى

، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊂ المستوى م ب جـ

∴ خط تقاطع المستويين م أ ى، م ب جـ يوازي

كل من $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ .... (٣)

∵ م ∈ كلا المستويين

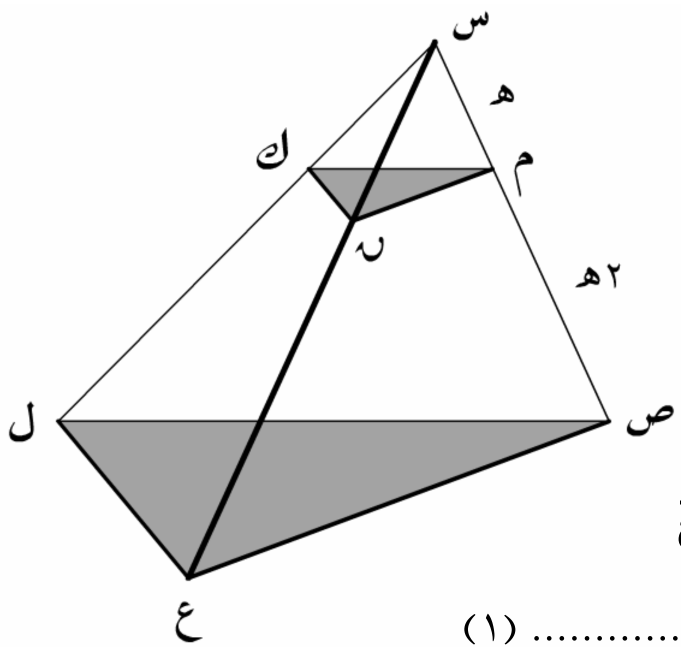
∴ م ∈ إلى خط تقاطعهما .... (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أن خط تقاطع المستويين م أ ى، م ب جـ هو مستقيم يمر بالنقطة م ويوازي كل من $\overleftrightarrow{\text{أ ى}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

<u>مثال (٣):</u>

س ص ع ل هرم ثلاثي، م ∈ $\overline{\text{س ص}}$ بحيث $\frac{\text{س م}}{\text{م ص}} = \frac{1}{2}$، رُسم مستوى يمر بالنقطة م موازيًا

المستوى ص ع ل ويقطع $\overline{\text{س ع}}$ في ن، $\overline{\text{س ل}}$ في ك، أثبت أن:



١) Δ م ن ك $\sim$ Δ ص ع ل

٢) إذا كانت م (Δ ص ع ل) = ٢٧٠ سم^{٢}

احسب م (Δ م ن ك).

<u>الحل:</u>

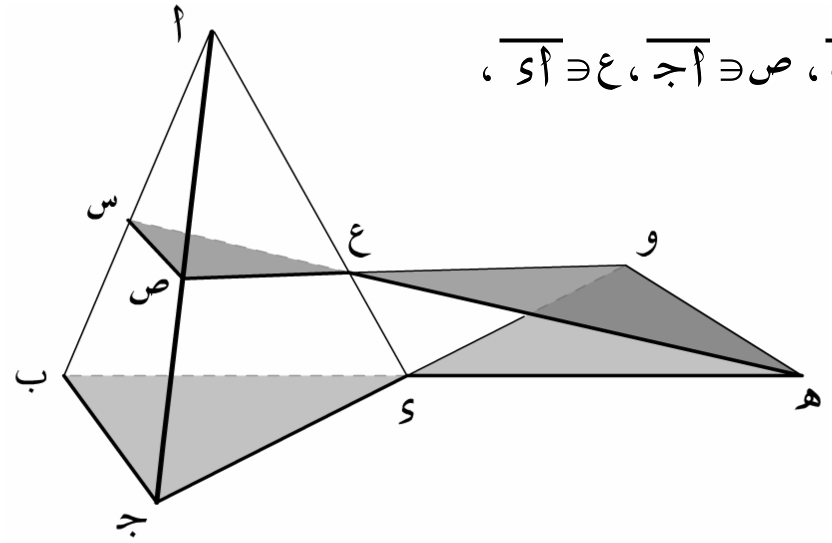
$\because$ المستوى م ن ك // المستوى ص ع ل

والمستوى س ص ع $\therefore$ $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$

$\therefore$ $\frac{\text{س م}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س ن}}{\text{س ع}} = \frac{\text{م ن}}{\text{ص ع}} = \frac{١}{٣}$ .... (١)

بالمثل:

مثال (٤):



أ ب جـ ى هرم ثلاثي، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ع ∈ $\overline{\text{أ ى}}$ ،

فإذا كان $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، وكان

$\overleftrightarrow{\text{س ع}} \cap \overleftrightarrow{\text{ب ى}}$ = { هـ }،

$\overleftrightarrow{\text{ص ع}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ = { و }،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

الحل:

∵ $\overleftrightarrow{\text{س هـ}} \cap \overleftrightarrow{\text{ص و}}$ = { ع }، ∴ $\overleftrightarrow{\text{س هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص و}}$ يعينان مستوى واحد س ص هـ و .

بالمثل:

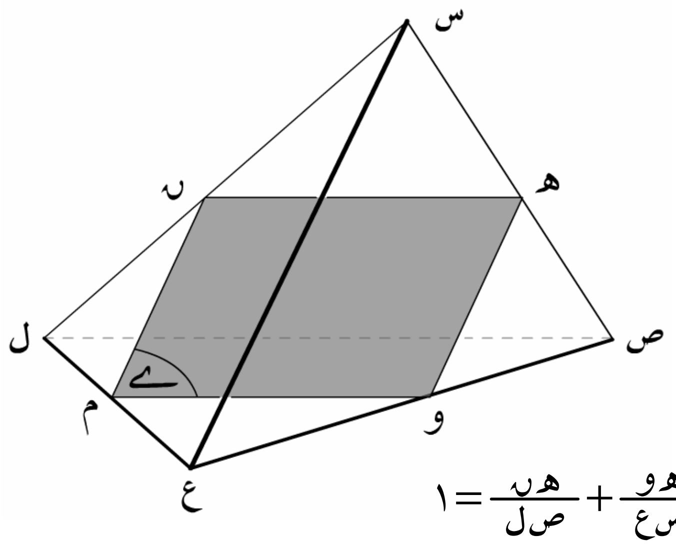
∵ $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ⊂ المستوى س ص هـ و ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊂

المستوى ∩ المستوى = ∴

تمارين:

(١) أ،ب،جـ ثلاث نقط مختلفة تنتمي إلى مستقيم واحد ل، م ∉ ل، رُسم $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ تقطع مستوى سـ موازٍ للمستقيم ل في ى،هـ،و على الترتيب. أثبت أن:

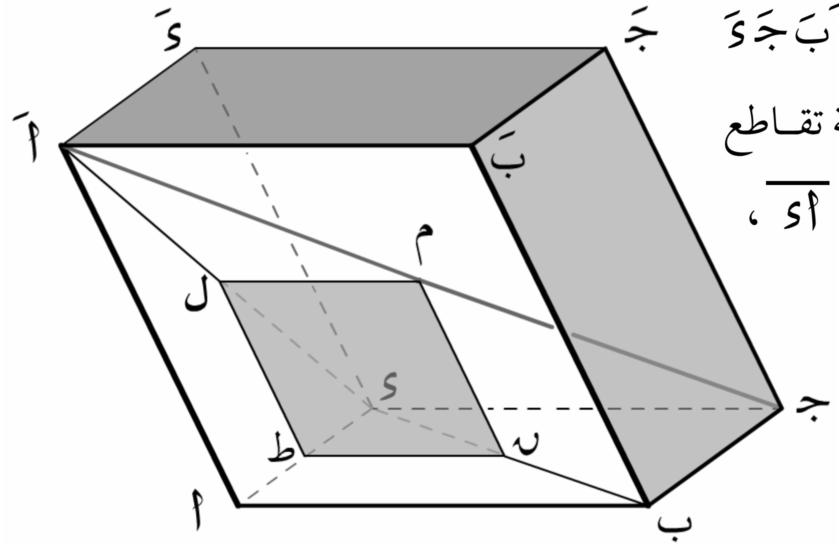
أ ب : ب جـ = ى هـ : هـ و .



(٢) في الشكل المقابل: س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه ليست مستوية، رُسم المستوى ى يوازي $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ل}}$ ، ويقطع $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل س}}$ في هـ،و،م،ن على الترتيب، أثبت أن: $\frac{\text{هـ و}}{\text{س ع}} + \frac{\text{هـ ن}}{\text{ص ل}} = ١$

(٣) في الشكل المقابل: أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي السطوح، م نقطة تقاطع أقطاره، ط، ل، ں منتصفات $\overline{\text{أء}}$ ، $\overline{\text{أَء}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ على الترتيب.

أثبت أن: الشكل م ل ط ں متوازي الأضلاع.



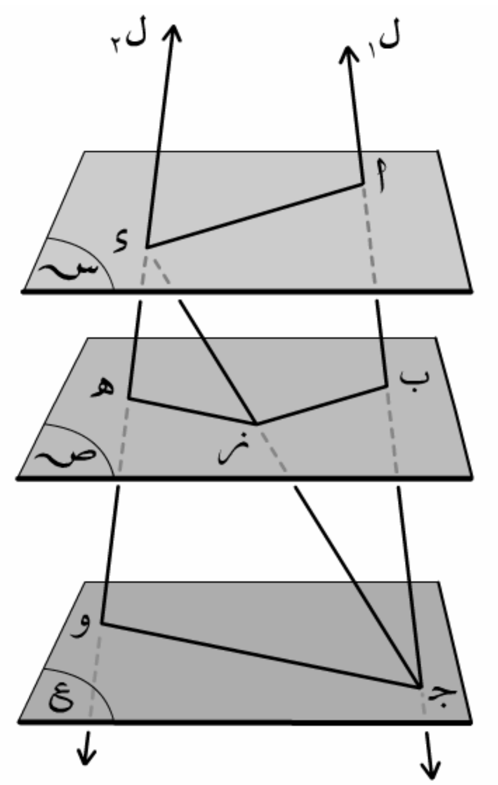
* تمرين مشهور:

«إذا قُطعت عدة مستويات متوازية بمستقيمين، فإن أطوال القطع المحصورة بينها تكون متناسبة».

س // ص // ع، $ل_١$، $ل_٢$ قاطعين لها:

$\therefore \frac{\text{أب}}{\text{بجـ}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{هـو}} \Longleftarrow \frac{\text{أب}}{\text{ءهـ}} = \frac{\text{بجـ}}{\text{هـو}} = \frac{\text{أجـ}}{\text{ءو}}$

● إذا كان: أب = بجـ، فإن: ءهـ = هـو

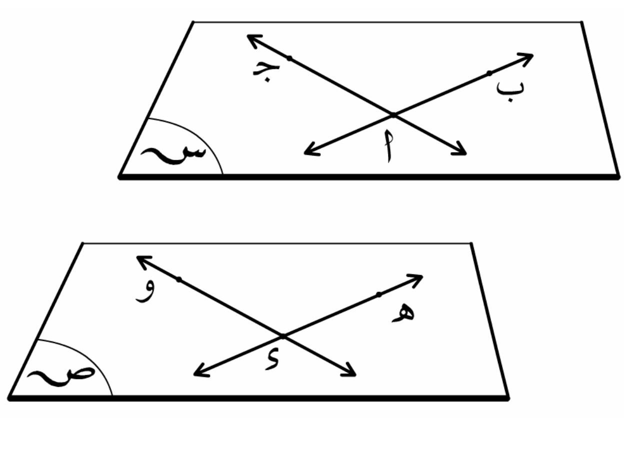


نظرية (٢): [بدون برهان]

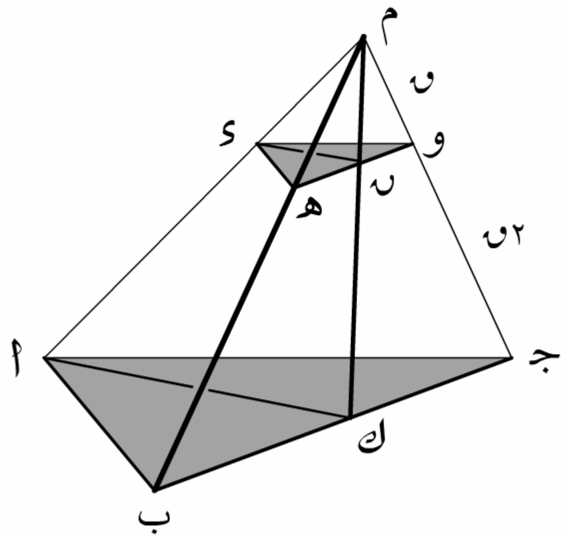
«إذا تقاطع مستقيمان في مستوى وكانا موازيين لمستقيمين متقاطعين في مستوى آخر، فإن المستويين متوازيان».

إذا كان: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ءو}}$ فإن:

س // ص.



مثال (١):



م أ ب ج هرم ثلاثي، أُخذت النقط ء، هـ، و على الأحرف $\overline{\text{مأ}}$ ، $\overline{\text{مب}}$، $\overline{\text{مج}}$ على الترتيب بحيث: $\frac{\text{مء}}{\text{ءأ}} = \frac{\text{مهـ}}{\text{هـب}} = \frac{\text{مو}}{\text{وج}} = \frac{١}{٢}$، أثبت أن: المستوى ءهـو // المستوى أ ب ج.

الحل:

$\because \frac{\text{مء}}{\text{مأ}} = \frac{\text{مهـ}}{\text{مب}} = \frac{١}{٣} \quad \therefore$ .... (١)

$\because \frac{\text{مهـ}}{\text{مب}} = \frac{\text{مو}}{\text{مج}} = \frac{١}{٣} \quad \therefore$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن:

مثال (٢):

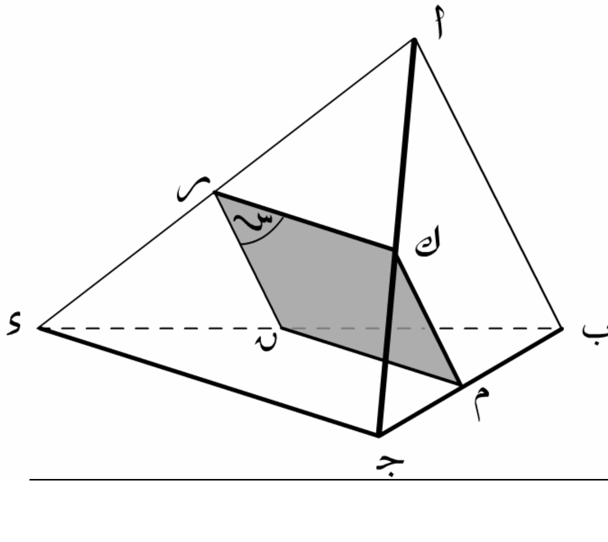
في المثال السابق، إذا أُخذت النقطة ك ∈ $\overline{\text{بج}}$، ورُسمت $\overline{\text{مك}}$ فقطعت $\overline{\text{هـو}}$ في ن، أثبت أن: أولاً: $\overline{\text{ءن}}$ // $\overline{\text{أك}}$. ثانيًا: أك = ٣ءن.

الحل:

∵ المستوى م أ ك قاطع للمستويين المتوازيين ءهـو، أ ب ج

∴ // ∴ $\frac{\text{مء}}{\text{مأ}} = \text{——} = \frac{١}{٣}$ ∴

مثال (٣):



أ ب ج ء هرم ثلاثي، م ∈ $\overline{\text{بج}}$، رُسم المستوى س يمر بالنقطة م ويوازي كل من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جء}}$ فقطع $\overline{\text{بء}}$، $\overline{\text{أج}}$ ، $\overline{\text{أء}}$ في النقط ن، ك، ر على الترتيب، أثبت أن:

أولاً: الشكل م ن ر ك متوازي الأضلاع.

ثانيًا: إذا كان أ ب = جـ ء، م منتصف $\overline{\text{بجـ}}$، فإن الشكل م ن ر ك يكون معينًا.

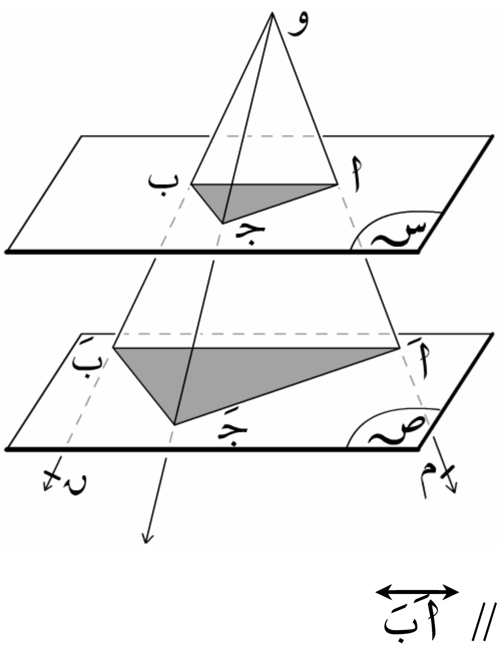
<u>الحل:</u>

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // س، المستوى أ ب جـ ∩ س = $\overleftrightarrow{\text{مك}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{مك}}$ .... (١)

بالمثل:

∵ م منتصف $\overline{\text{جـب}}$، $\overline{\text{مك}}$ // $\overline{\text{أب}}$ ∴ م ك = $\frac{1}{2}$ أ ب .... (٥)

<u>مثال (٤):</u>



$\overleftrightarrow{\text{وم}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ون}}$ مستقيمان يقطعان المستويين س، ص في أ، أَ ، ب، بَ على الترتيب، أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أَبَ}}$. وإذا كانت جـ ∈ س حيث جـ ∉ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، وقطع $\overleftrightarrow{\text{وجـ}}$ المستوى ص في جَ

أثبت أن: Δ أ ب جـ ∼ Δ أَ بَ جَ

<u>الحل:</u>

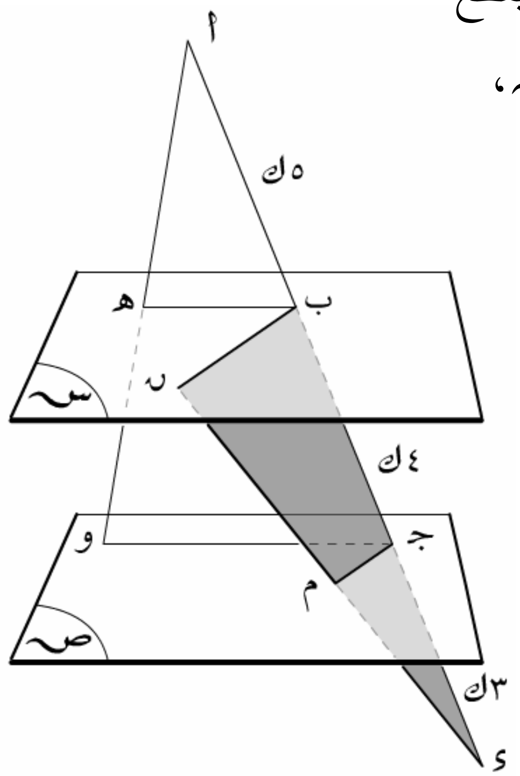
∵ س // ص والمستوى و أ بَ قاطع لهما ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أَبَ}}$

∴ $\frac{\text{وأ}}{\text{وأَ}} = \frac{\text{وب}}{\text{وبَ}} = \frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}}$ .... (١) .... أكمل

مثال (٥):

س، ص مستويان متوازيان، $\overleftrightarrow{أ ء}$ يقطعهما في ب، ج على الترتيب بحيث أب : ب ج : ج ء = ٥ : ٤ : ٣، $\overleftarrow{أ و}$ يقطع س، ص في هـ، و على الترتيب، $\overleftarrow{ء ن}$ يقطع ص، س في م، ن على الترتيب، أثبت أن:

$$\frac{م ج}{ن ب} \times \frac{ب هـ}{ج و} = \frac{٥}{٢١}$$



الحل:

∵ س // ص والمستوى ء ب ن قاطع لهما

∴ $\frac{ء ج}{ء ب} = \frac{ج م}{ب ن} = \frac{٣}{٧}$ .... (١)

.... أكمل

تمارين:

(١) مصر – دور أول ١٩٩٦:

أولاً: أكمل ما يأتي:

أ) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي ....

ب) إذا وازى مستقيم كل من مستويين متقاطعين فإنه يوازي ....

ج) أ ب ج أَ بَ جَ منشور ثلاثي، خط تقاطع المستويين أ ب جَ ، أ أَ جَ هو ....

ثانيًا: برهان نظرية (١)

ثالثًا: س، ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، رُسم $\overleftrightarrow{ج ء}$ في المستوى س، بحيث

$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // صـ، كما رُسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ في المستوى صـ، بحيث $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ // سـ، أثبت أن:

١) $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

٢) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازي المستوي الذي يحوي المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$.

(٢) مصر – دور ثان ١٩٩٦:

أولاً: أكمل ما يأتي:

أ) إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فخطا تقاطعه ....

ب) طول قطر متوازي المستطيلات الذي أبعاده ٤، ٣، ١٢ **سم** يساوي ....

جـ) إذا قطع مستقيمان عدة مستويات متوازية، فإن أطوال القطع المحصورة بينها تكون ....

ثانيًا: م أ ب جـ هرم ثلاثي، أُخذت النقط س، ص، ع على الأحرف $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م جـ}}$ على الترتيب بحيث: $\frac{\text{م س}}{\text{س أ}} = \frac{\text{م ص}}{\text{ص ب}} = \frac{\text{م ع}}{\text{ع جـ}} = \frac{١}{٣}$.

١) أثبت أن المستوى س ص ع // المستوى أ ب جـ.

٢) إذا كانت ن ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{م ن}} \cap \overline{\text{ص ع}} = \{\text{ل}\}$، فاثبت أن أ ن = ٤ س ل.

(٣)

أولاً: أكمل ما يأتي:

أ) يتعين المستوى في كل من الحالات الآتية: ....، ....، ....

ب) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي إحدى الزوايا التي يصنعها أحدهما مع ....

جـ) إذا وازى مستقيمًا خارج مستوى مستقيمًا في المستوى فإنه يوازي ....

ثانيًا: م س ص ع هرم ثلاثي، رُسم المستوى ے // المستوى س ص ع ويقطع $\overline{\text{م س}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$، $\overline{\text{م ع}}$ في د، هـ، و على الترتيب، أثبت أن $\triangle$ د هـ و $\sim$ $\triangle$ س ص ع. وإذا كان د ∈ $\overline{\text{م س}}$ بحيث: $\frac{\text{م د}}{\text{د س}} = \frac{٣}{٥}$، وكانت م($\triangle$ د هـ و) = ١٨ سم^{٢}، احسب م($\triangle$ س ص ع).

(٤)

أولاً: أكمل ما يأتي:

أ) إذا وازى مستقيم كل من مستويين متقاطعين فإنه يوازي..................................

ب) المستقيمات الرأسية .... فيما بينها، بينما المستويات الأفقية .... فيما بينها.

جـ) طول قطر المكعب الذي مساحة جميع أوجهه ٢١٦ سم^{٢} يساوي ....

ثانيًا: أ ب جـ، ء ب جـ مثلثان غير مستويين، فإذا كانت س، ص، ع، ل منتصفات $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{ءجـ}}$، $\overline{\text{ءب}}$ على الترتيب، أثبت أن:

١) $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // المستوى ء ب جـ.

٢) الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع.

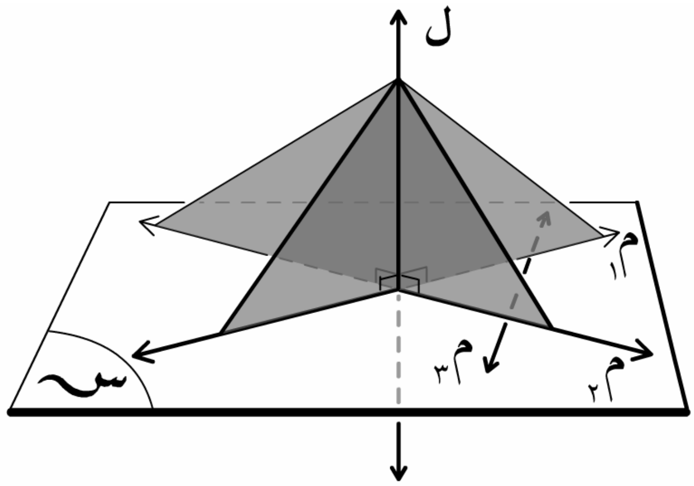
(٥) أ نقطة خارج المستوى سـ، رسم $\overleftarrow{\text{أب}}$، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ يقطعان المستوى سـ في ب، جـ على الترتيب، أُخذت النقطة ء ∈ $\overleftarrow{\text{أب}}$، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أجـ}}$، رُسم $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ يقطع المستوى سـ في و، أثبت أن النقط ب، جـ، و تقع على استقامة واحدة.

(٦) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ غير مستويين، م منتصف $\overline{\text{بء}}$، رُسم المستوى م س ص يوازي كلاً من $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ ويقطع $\overline{\text{بجـ}}$، $\overline{\text{أء}}$ في س، ص على الترتيب، أثبت أن:

١) $\overleftrightarrow{\text{م ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أب}}$، // $\overleftrightarrow{\text{م س}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$.

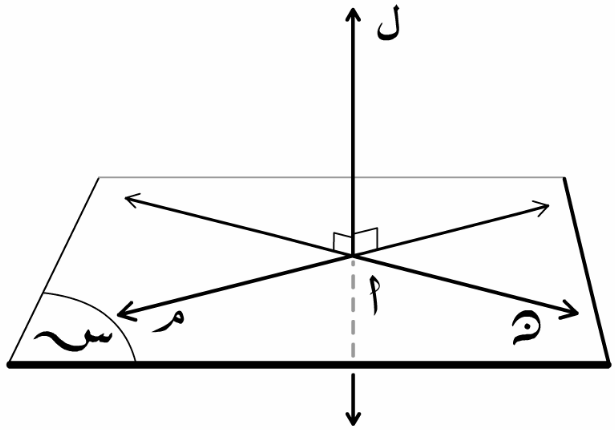
٢) س ص $< \frac{١}{٢}$ (أ ب + جـ ء).

* المستقيم العمودي على مستوى:



تعريف:

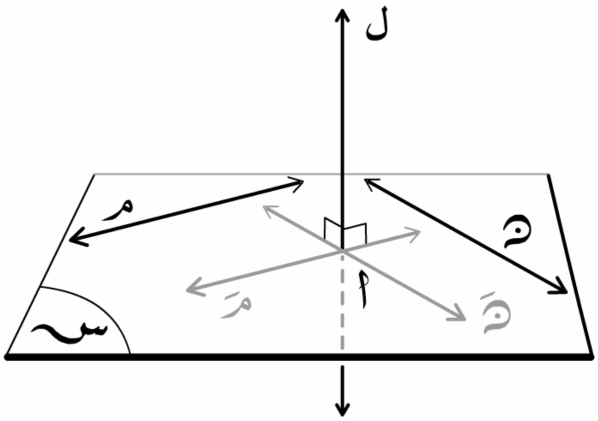
«يقال أن المستقيم **ل** عموديًّا على المستوى **س** إذا كان عموديًّا على كل مستقيم في المستوى».



نظرية (٣): [بدون برهان]

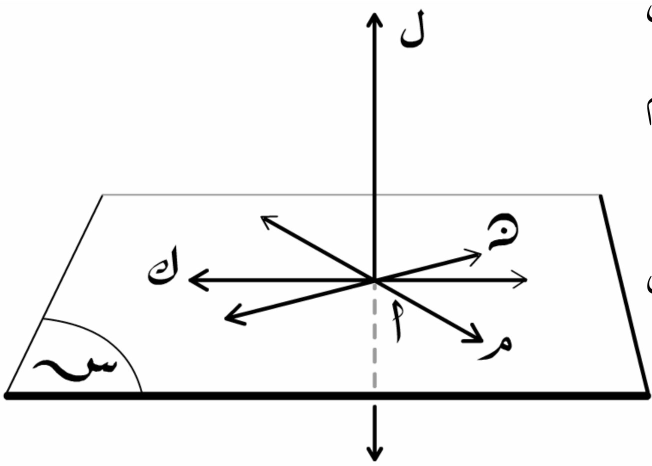
«المستقيم العمودي على كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديًّا على مستويهما».

نتائج هامة:



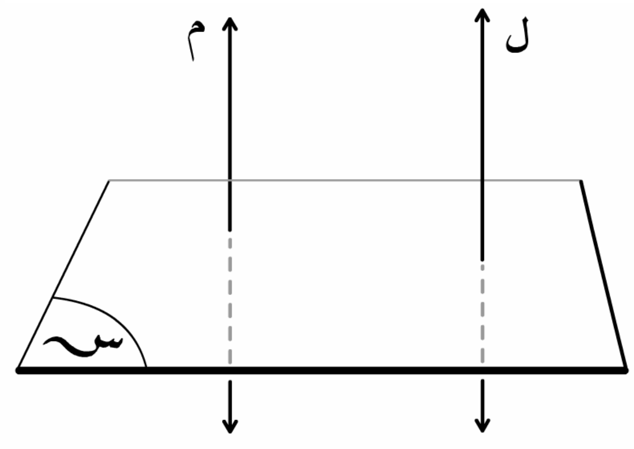
(١) المستقيم العمودي على أي مستقيمين غير متوازيين في مستوى يكون عموديًّا على هذا المستوى. ❋❋❋❋❋

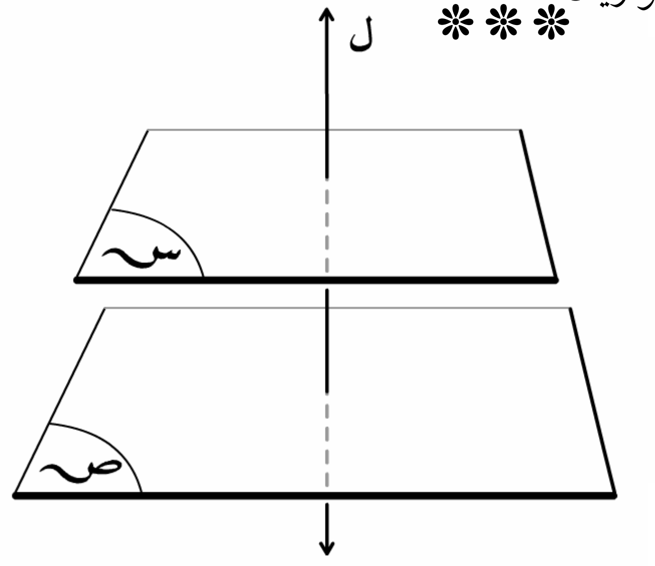
(٢) جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة واحدة عليه تقع في مستوى واحد عمودي على المستقيم المعلوم عند هذه النقطة. ❋



(٣) يوجد مستوى واحد وواحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة عليه. ❋

(٤) المستقيمان العمودان على مستوى واحد متوازيان. ❋ ❋❋❋

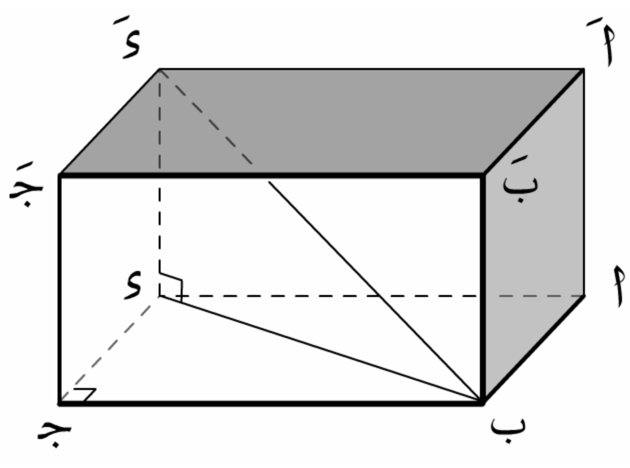




(٥) إذا كان مستقيمٌ عموديًّا على كل من مستويين مختلفين، فإنهما يكونان متوازيين.

كذلك؛ إذا كان مستقيمٌ عموديًّا على أحد مستويين متوازيين، فإنه يكون عموديًّا على المستوى الآخر. ❋ ❋❋❋

مثال (١):



أثبت أن مربع طول قطر متوازي المستطيلات يساوي مجموع مربعات أبعاده الثلاثة:

أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ متوازي المستطيلات، أثبت أن: (ب ءَ)^{٢}=(ب جـ)^{٢}+(ء جـ)^{٢}+(جـ جَ)^{٢}.

الحل:

∵ أ ب جـ ء مستطيل ∴ (ب ء)^{٢}=(ب جـ)^{٢}+(ء جـ)^{٢} .... (١)

∵ $\overline{\text{ءءَ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء ∴ $\overline{\text{ءءَ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$ ∴ (ب ءَ)^{٢}=(ب ء)^{٢}+(ء ءَ)^{٢} .. (٢)

∵ ء ءَ = جـ جَ من خواص متوازي المستطيلات ومن (١)، (٢) ... أكمل

ملاحظات:

(١) إذا كان س، ص،ع هي أبعاد متوازي المستطيلات، فإن:

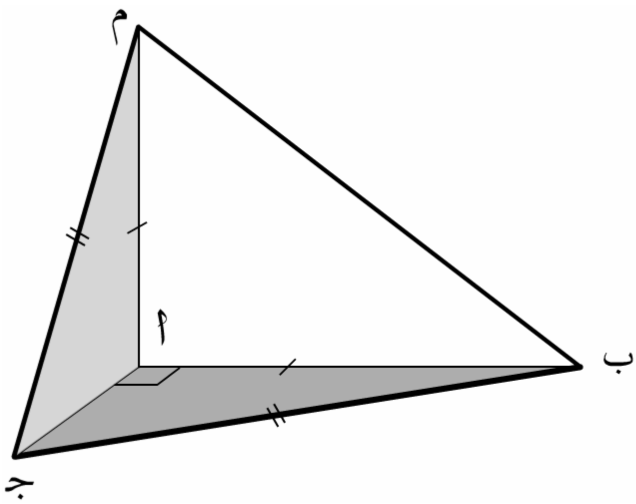
طول قطر متوازي المستطيلات $= \sqrt{س^٢ + ص^٢ + ع^٢}$

(٢) إذا كان س = ص = ع = ل، فإن متوازي المستطيلات يصبح مكعبًا، ويكون طول قطر المكعب = ل $\sqrt{٣}$.

مثال (٢):

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية عند أ، م $\notin$ المستوى أ ب جـ بحيث م أ = أ ب، م جـ = ب جـ، أثبت أن:

$\overleftrightarrow{أجـ}$ ⊥ المستوى م أ ب

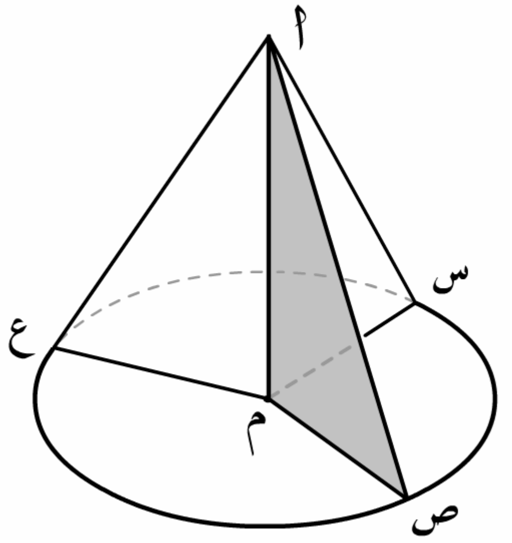


الحل:

مثال (٣):

س، ص،ع ثلاث نقط على دائرة مركزها م، رُسم $\overline{م أ}$ ⊥ مستوى الدائرة.

أثبت أن: أ س = أ ص = أ ع

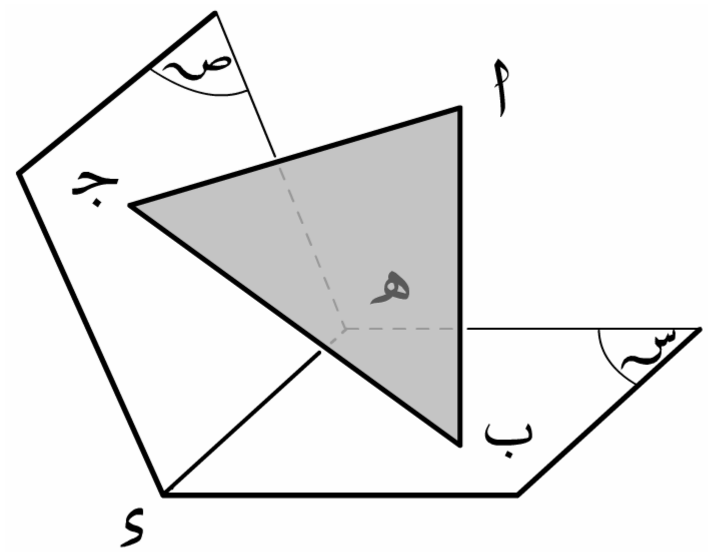


الحل:

∵ $\overline{م أ}$ ⊥ مستوى الدائرة

∴ $\overline{م أ}$ ⊥ كل من $\overline{م س}$، $\overline{م ص}$، $\overline{م ع}$ ... أكمل

مثال (٤):



المستوى س ∩ المستوى ص = $\overleftrightarrow{ءهـ}$ ، أ نقطة لا تنتمي لأي من المستويين، رُسم من أ عمود على المستوى س قطعه في ب، وعمود على المستوى ص قطعه في جـ، أثبت أن: $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{ءهـ}$

الحل:

∵ $\overline{أ ب}$ ⊥ س ∴ $\overline{أ ب}$ ⊥ $\overline{ءهـ}$ .... (١)　　بالمثل ... أكمل

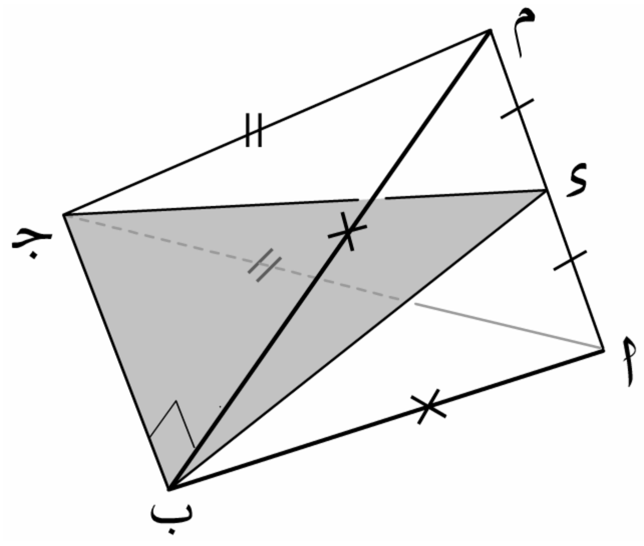
من (١) ، (٢) ينتج أن: $\overline{ءهـ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ　　∴ $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{ءهـ}$ #

مثال (٥):

م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه م ب = أ ب، م جـ = أ جـ، $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$، ء منتصف $\overline{م أ}$.

أثبت أن: أولاً: $\overline{\text{أم}}$ ⊥ المستوى ءبج

ثانيًا: $\overline{\text{بج}}$ ⊥ المستوى مأب



الحل:

في Δجأم: ∵ مج = أج، ء منتصف $\overline{\text{مأ}}$

∴ $\overline{\text{جء}}$ ⊥ $\overline{\text{أم}}$ .... (١)

بالمثل في Δبأم: ... أكمل

من (١) ، (٢) ينتج أن: # أولاً

من المطلوب الأول: ∵ $\overline{\text{أم}}$ ⊥ المستوى ءبج ∴ $\overline{\text{أم}}$ ⊥ $\overline{\text{بج}}$ .... (٣)

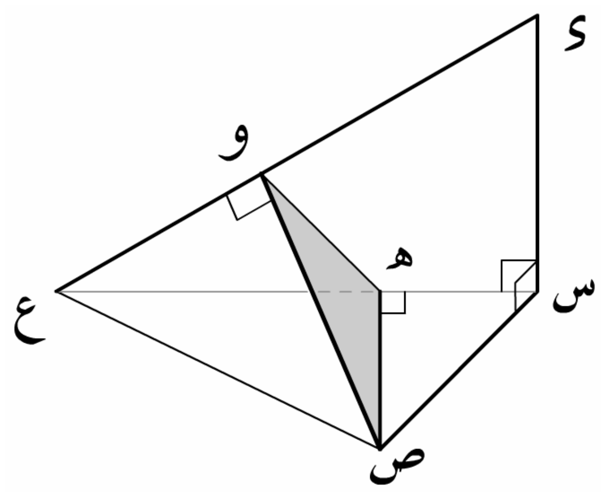
، ∵ $\overline{\text{بج}}$ ⊥ (معطى) ... أكمل

مثال (٦):

س ص ع مثلث حاد الزوايا، رُسم $\overline{\text{سء}}$ ⊥ المستوى س ص ع، $\overline{\text{صه}}$ ⊥ $\overline{\text{سع}}$ ، $\overline{\text{صو}}$ ⊥ $\overline{\text{ءع}}$ ، أثبت أن:

أولاً: $\overline{\text{صه}}$ ⊥ المستوى ءسع

ثانيًا: $\overline{\text{هو}}$ ⊥ $\overline{\text{ءع}}$



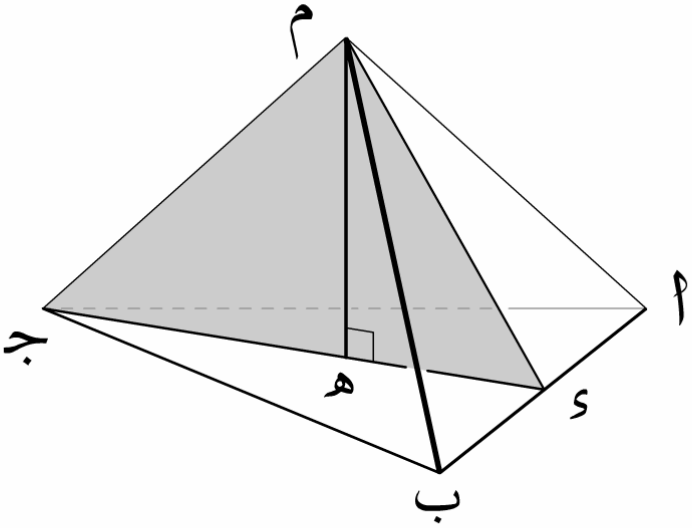
الحل:

∵ $\overline{\text{سء}}$ ⊥ المستوى س ص ع

∴ $\overline{\text{سء}}$ ⊥ $\overline{\text{صه}}$ .... (١) ... أكمل

مثال (٧):

م أ ب جـ هرم ثلاثي، $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م جـ}}$ متعامدة مثنى مثنى، رُسم $\overline{\text{م هـ}}$ $\perp$ المستوى أ ب جـ، ثم رُسم $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ فقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في ء، أثبت أن: (م ء)^{٢} = ء هـ · ء جـ = ء أ · ء ب



الحل:

∵ $\overline{\text{م جـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ $\perp$ المستوى م أ ب

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{م ء}}$

في Δ م جـ ء القائم عند م، $\overline{\text{م هـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{ء جـ}}$

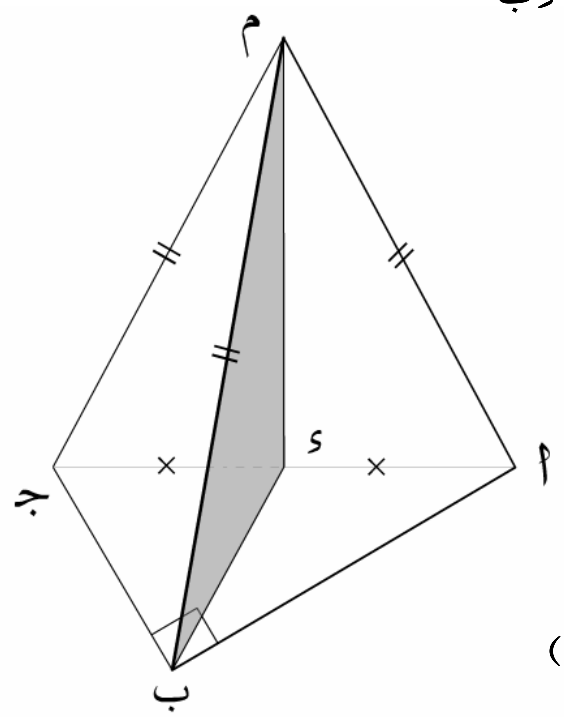
∴ (م ء)^{٢} = ء هـ · ء جـ

∵ $\overline{\text{م جـ}}$ $\perp$ المستوى م أ ب ∴ $\overline{\text{م جـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ ب}}$ .... (١)

∵ $\overline{\text{م هـ}}$ $\perp$ المستوى أ ب جـ ∴ $\overline{\text{م هـ}}$ $\perp$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن: $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ المستوى ∴ $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{م ء}}$

∴ في Δ أ م ب القائم عند م ينتج أن: (م ء)^{٢} = ء أ · ء ب



مثال (٨):

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية عند ب، م $\notin$ المستوى أ ب جـ، فإذا كان م أ = م ب = م جـ، ء منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، أثبت أن: $\overline{\text{م ء}}$ $\perp$ المستوى أ ب جـ.

الحل:

في Δ م أ جـ: ∵ م أ = م جـ، ء منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

∴ $\overline{\text{م ء}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ جـ}}$ .... (١)

في Δ أ ب جـ القائم عند ب، ∵ ء منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ∴ ب ء $= \frac{1}{2}$ أ جـ $=$ أ ء $=$ جـ ء

ومن تطابق المثلثين م ء أ، م ء ب ينتج أن: ق(م $\hat{\text{ء}}$ أ) $=$ ق(م $\hat{\text{ء}}$ ب) $= 90^\circ$

أي أن $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{ء ب}}$ .... (٢)

من (١) ، (٢)

تمارين:

(١) اذكر أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خطأ:

أ) المستقيم العمودي على مستقيمين متوازيين يكون عموديًّا على مستويهما.

ب) المستويان العموديان على مستقيم معلوم متوازيان.

جـ) يوجد مستقيم واحد وواحد فقط يمر بنقطة معلومة ويكون عموديًّا على مستقيم معلوم.

ء) يوجد مستوى واحد وواحد فقط عموديًّا على مستقيم معلوم من نقطة عليه.

هـ) يتوازى المستقيمان إذا كان كل منهما عمودي على نفس المستوى.

و) المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديًّا على الآخر.

ز) المستويان العمودان على مستقيم معلوم من نقطة عليه متطابقان.

ح) إذا كان أحد مستويين متوازيين عموديًّا على مستقيم معلوم، فإن المستقيم يكون عموديًّا على المستوى الآخر.

ط) إذا كان أحد مستويين متقاطعين عموديًّا على مستقيم معلوم، فإن المستوى الآخر والمستقيم متعامدان.

(٢)

أ) أكمل: المستقيم العمودي على كل من مستقيمين متقاطعين يكون ....

ب) أ ب ج مثلث متساوي الساقين $\text{أ ج} = \text{ب ج}$، ء منتصف $\overline{\text{أ ب}}$، رُسم $\overline{\text{ء هـ}} \perp$ المستوى أ ب ج، أثبت أن: $\overline{\text{أ ب}} \perp$ المستوى هـ ء ج.

(٣) أ ب ج أَ بَ جَ منشور ثلاثي مائل، رُسم $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{أ أَ}}$ قطعها في ء، ورُسم $\overline{\text{ب ن}} \perp$ المستوى أَ بَ جَ يقطعه في ن، أثبت أن: $\overline{\text{ن ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$.

(٤) $\text{أ ب ج ء أَ بَ جَ ءَ}$ مكعب طول حرفه ل، أثبت أن:

أولاً: المثلث ءَ أ ج متساوي الأضلاع

ثانيًا: $\overline{\text{أ ج}} \perp$ المستوى ءَ ء ب

ثالثًا: أقطار المكعب متساوية وطول كل منها $\text{ل}\sqrt{3}$.

(٥) أ ب ج ء، ء ج هـ و مستطيلان غير مستويين، س، ص منتصفا $\overline{\text{ب ج}}$، $\overline{\text{أ ء}}$ على الترتيب، $\text{ع} \in \overline{\text{ء و}}$، $\text{ل} \in \overline{\text{ج هـ}}$ بحيث $\frac{\text{ء ع}}{\text{ع و}} = \frac{\text{ج ل}}{\text{ل هـ}} = \frac{3}{5}$، أثبت أن:
الشكل س ص ع ل يكون مستطيلاً.

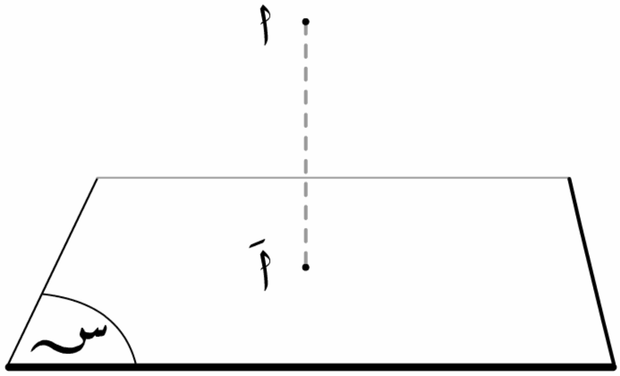
(٦) أ ب ج ء مربع تقاطع قطراه في م، هـ نقطة لا تنتمي إلى مستوى المربع، فإذا كان $\text{هـ م} = \text{م ب}$، $\Delta\, \text{هـ أ ب}$ متساوي الأضلاع، أثبت أن:

أولاً: $\overline{\text{هـ م}} \perp \overline{\text{م ب}}$. ثانيًا: $\overline{\text{هـ م}} \perp$ المستوى أ ب ج ء

(٧) أثبت أن قطر متوازي السطوح المستطيلة يصنع مع ثلاثة أحرف متقاطعة في أحد رءوسه ثلاث زوايا مجموع مربعات جيوب تمامها يساوي الواحد الصحيح.

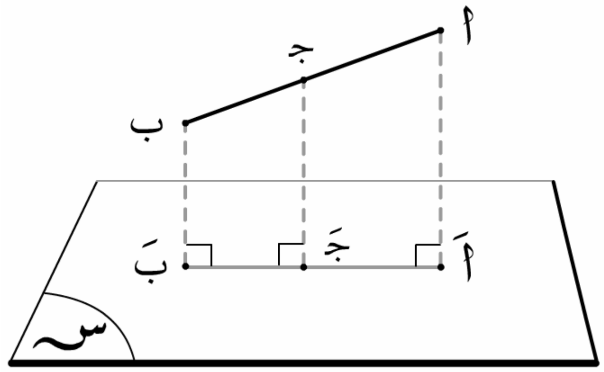
الإسقاط العمودي

(١) مسقط نقطة على مستوى:



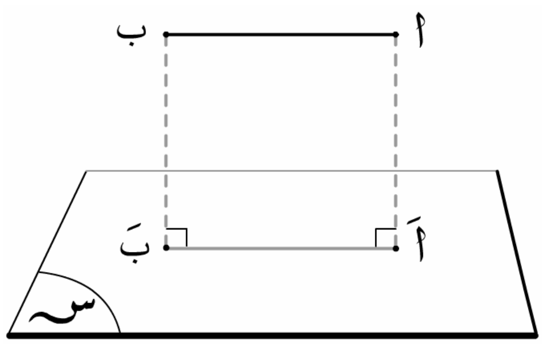
مسقط نقطة معلومة على مستوى هو النقطة من المستوى الناتجة عن تقاطع العمود المرسوم من النقطة المعلومة إلى المستوى.

(٢) مسقط قطعة مستقيمة على مستوى:



مسقط قطعة مستقيمة معلومة على مستوى هو القطعة المستقيمة من المستوى التي تكون كل نقطة من نقطعها مسقطًا عموديًّا لإحدى نقط القطعة المستقيمة المعلومة على المستوى.

● العلاقة بين طول قطعة مستقيمة وطول مسقطها على مستوى:



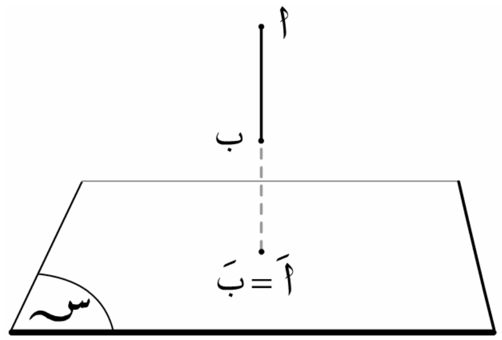
توجد ثلاثة أوضاع مختلفة للقطعة المستقيمة المرسومة خارج مستوى:

الأول: القطعة المستقيمة توازي المستوى:

∵ $\overline{\text{أب}}$ // س

∴ الشكل أ أَ بَ ب مستطيل

∴ أَبَ = أب



الثاني: القطعة المستقيمة عمودية على المستوى:

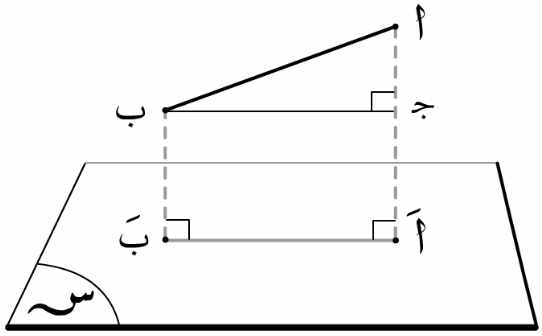
أَبَ = صفر

<u>الثالث:</u> القطعة المستقيمة مائلة على المستوى:

$\overline{\text{أب}} \nparallel \text{س}$ ، $\overline{\text{أب}} \not\perp \text{س}$

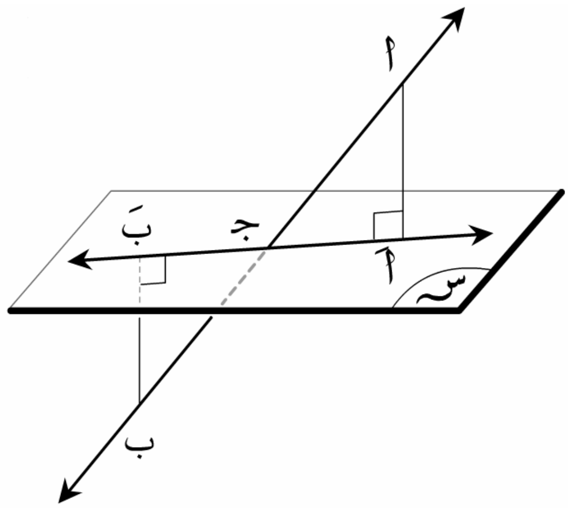
$\therefore$ أَبَ $\neq$ أب، أَبَ $\neq$ صفر

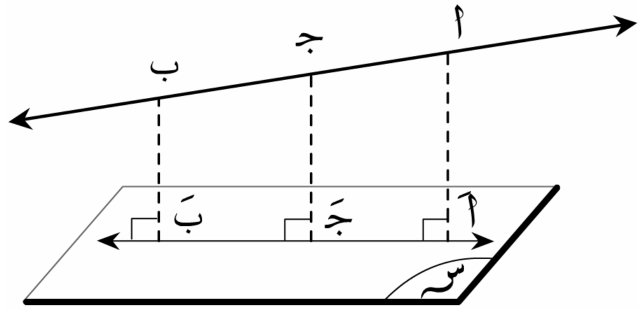
$\therefore$ صفر $<$ أَبَ $<$ أب



(٣) <u>مسقط مستقيم على مستوى:</u>

مسقط مستقيم معلوم على مستوى هو المستقيم من المستوى الذي تكون كل نقطة من نقطعه مسقطًا عموديًّا لإحدى نقط المستقيم المعلوم على المستوى.

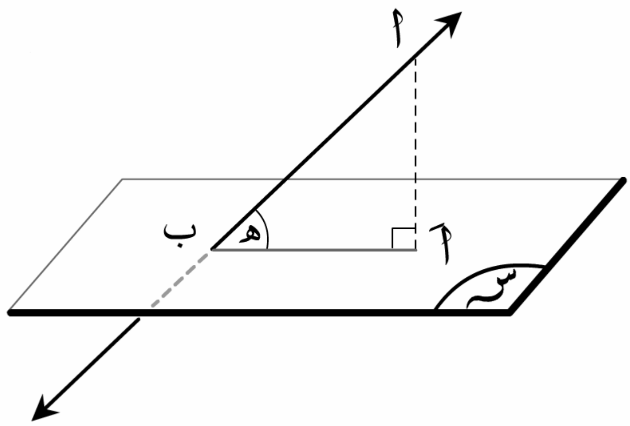




- <u>الزاوية بين مستقيم ومستوى:</u>

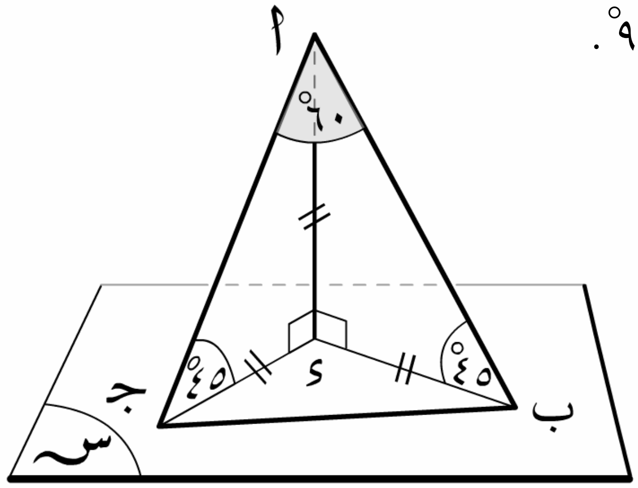
هي الزاوية بين المستقيم ومسقطه في المستوى.

كذلك .. الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستوى، هي الزاوية بين المستقيم الحامل للقطعة المستقيمة وبين المستوى.



- <u>تدريب:</u> استنتج العلاقة بين طول قطعة مستقيمة وطول مسقطها على مستوى في الحالات المختلفة، ومن ثم استنتج قياس الزاوية بين $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ والمستوى **س** في الشكل السابق، علمًا بأن أب = ١٠ سم، أَبَ = ٥ سم.

مثال: أ نقطة خارج المستوى س، ب، جـ ∈ س بحيث قياس الزاوية بين المستوى س وكل من $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ يساوي ٤٥°، ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٦٠°، فإذا كانت ء مسقط أ على المستوى س، أثبت أن: ق(ب $\hat{\text{ء}}$ جـ) = ٩٠°.



الحل:

من هندسة الشكل وتطابق المثلثين أ ب ء، أ جـ ء ينتج أن: أء = ب ء = جـ ء = ل،

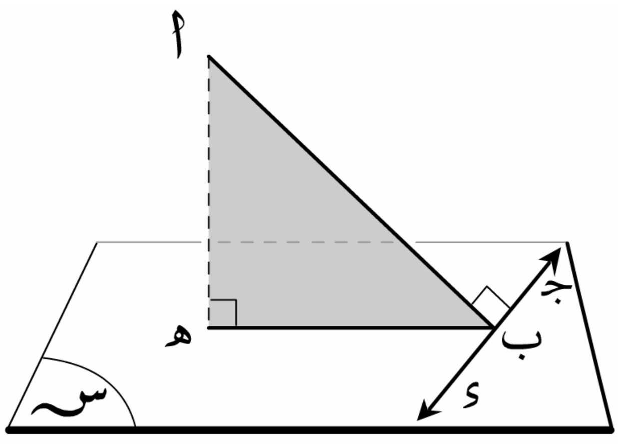
أب = أجـ = ل $\sqrt{2}$ ، ∵ ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٦٠°

∴ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع

∴ $(\text{ب جـ})^2 = 2\text{ل}^2 = (\text{ء ب})^2 + (\text{ء جـ})^2$ ∴ ق(ب $\hat{\text{ء}}$ جـ) = ٩٠° (عكس فيثاغورث)

❁ نظرية (٤): {البرهان مقرر}

«إذا رُسم مستقيمٌ مائلٌ على مستوى وكان عموديًا على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون عموديًا على هذا المستقيم».



المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مائل على المستوى س،

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ ،

$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \subset$ س، $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ مسقط $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ في المستوى س، حيث هـ مسقط أ.

المطلوب: أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

البرهان: ∵ هـ مسقط أ في المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}} \perp$ س ∴ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ (لماذا؟)

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جء}}$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{\text{جء}} \perp$ المستوى أهب (لماذا؟) ∴ $\overleftrightarrow{\text{هب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جء}}$

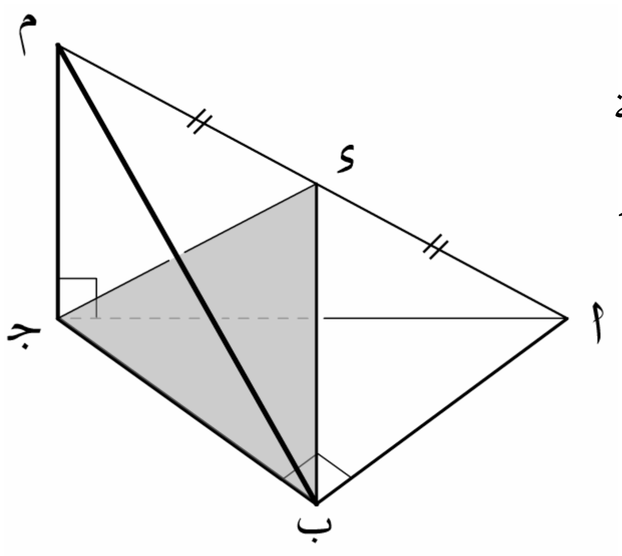
❋ عكس نظرية (٤): {البرهان مقرر}

«إذا رُسم مستقيمٌ مائلٌ على مستوى وكان مسقطه على المستوى عموديًّا على مستقيم فيه فإن ذلك المستقيم المائل يكون عموديًّا على هذا المستقيم».

... يُترك البرهان للطالب

- مما سبق يتبين أنه إذا وُجد في تمرينٍ ما مستقيمٌ مائلٌ على مستوى ومسقطه في المستوى، وكان أحدهما عموديًّا على مستقيم في المستوى، كان الآخر عموديًّا على نفس المستقيم.

مثال (١):



في الشكل المقابل أبج مثلث قائم الزاوية عند ب، $\overleftrightarrow{\text{جم}} \perp$ المستوى أبج، ء منتصف $\overline{\text{أم}}$، أثبت أن: ءب = ءج

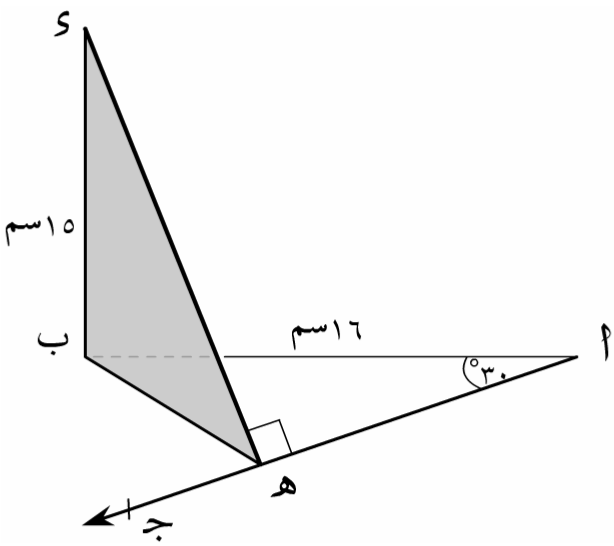
الحل: ∵ $\overleftrightarrow{\text{جم}} \perp$ المستوى أبج

∴ المثلث أمج قائم الزاوية عند ج

∵ $\overline{\text{جء}}$ متوسط ∴ جء = ... (١)

$\overleftrightarrow{\text{مب}}$ مائل على المستوى مسقطه $\perp$

مثال (٢):



في الشكل المقابل ءب ⊥ المستوى أ ب جـ،

ءهـ ⊥ أجـ ، ق(ب أ̂ جـ)=٣٠°، أب =

١٦سم، ب ء = ١٥سم، احسب طول ءهـ

الحل: ∵ ءهـ مائل على المستوى أ ب جـ،

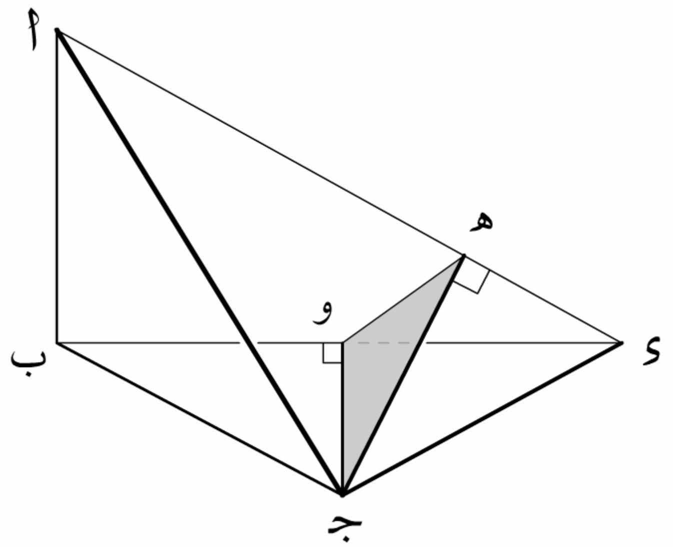
ءهـ ⊥ أجـ ∴ مسقطه ⊥

∴ Δ هـ أ ب ثلاثيني ستيني ∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ = سم

∵ Δ ءهـ ب قائم الزاوية عند ب لأن

∴ (ءهـ)^{٢} =

مثال (٣):



في الشكل المقابل: أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه:

أب ⊥ المستوى ب جـ ء، رُسم جـو

⊥ ب ء، جـهـ ⊥ أء ، أثبت أن:

أولاً: جـو ⊥ المستوى أ ب ء

ثانيًا: وهـ ⊥ أء

الحل:

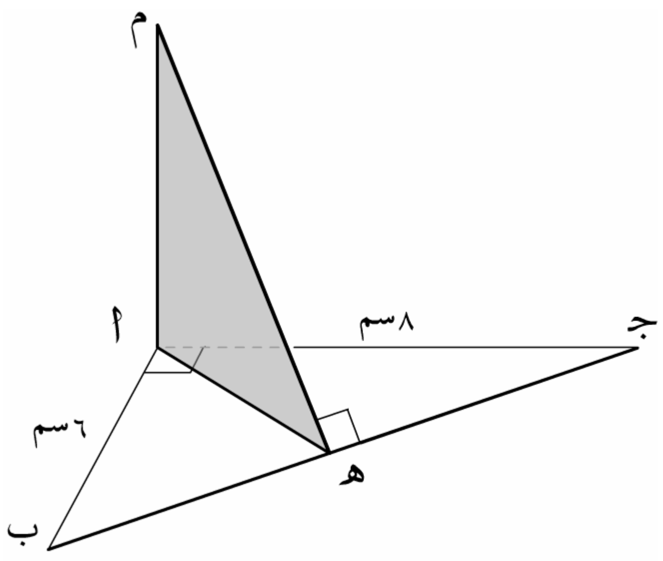
∵ أب ⊥ المستوى ب جـ ء ∴ أب ⊥

∵ ب ء ⊥ ∴ ⊥ المستوى أ ب ء #أولاً

∴ مائل على المستوى أ ب ء، مسقطه

∵ ⊥ أء ∴ ⊥ أء #ثانيًا

مثال (٤):



في الشكل المقابل: أ ب جـ قائم الزاوية عند أ، رُسم $\overline{\text{أم}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، أم = ٣,٦سم، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$، فإذا كان أ ب = ٦سم، أ جـ = ٨سم، احسب طول $\overline{\text{أ هـ}}$، $\overline{\text{م هـ}}$.

الحل:

∵ $\overline{\text{م هـ}}$ مائل على المستوى أ ب جـ، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ مسقطه ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∵ أ ب جـ قائم الزاوية عند أ، وباستخدام نظرية فيثاغورث ينتج أن:

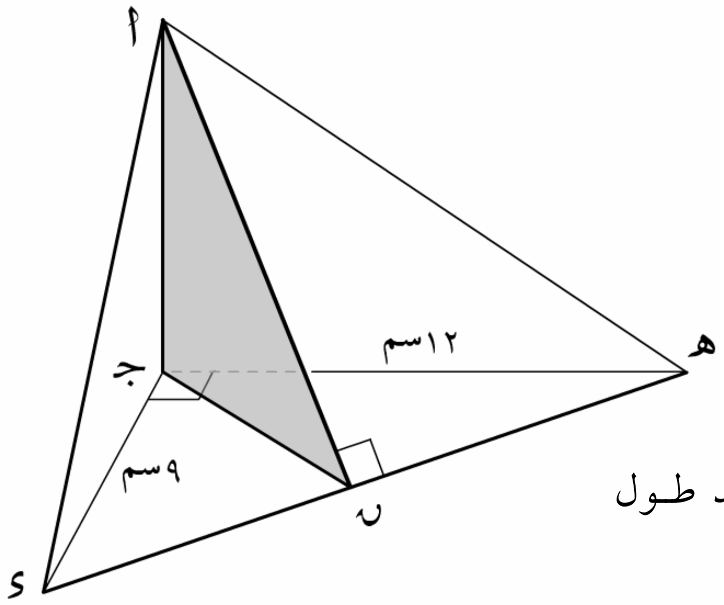
(ب جـ)^2 = ∴ ب جـ = سم

ومن نظرية إقليدس ينتج أن: أ هـ = $\frac{\quad\times\quad}{\quad}$ = $\frac{\quad\times\quad}{\quad}$ = ٤,٨سم

Δ م أ هـ قائم الزاوية عند أ لأن

∴ (م هـ)^2 =

مثال (٥):

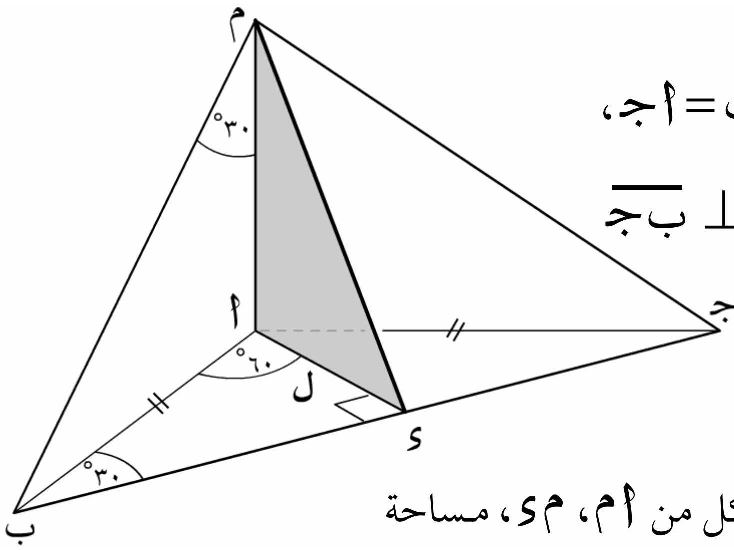


في الشكل المقابل: جـ ء هـ مثلث قائم الزاوية عند جـ، رُسم $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ المستوى جـ ء هـ، $\overline{\text{أ ء}}$، $\overline{\text{أ هـ}}$، وكانت مساحة سطح Δ أ ء هـ = ١٥٠سم^2، جـ ء = ٩سم، جـ هـ = ١٢سم، أوجد طول $\overline{\text{أ هـ}}$.

الحل:

∵ $\overline{\text{أ ہ}}$ مائل على المستوى هـ جـ ى، $\overline{\text{أ ہ}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ ى}}$ ∴ مسقطه ⊥ $\overline{\text{هـ ى}}$ ... أكمل

مثال (٦):



في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث فيه أ ب = أ جـ، ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ١٢٠°، رُسم $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ يقطعه في ى، حيث أ ى = ل، رُسم $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، بحيث ق(أ $\hat{\text{م}}$ ب) = ٣٠°، أوجد بدلالة ل كل من أ م، م ى، مساحة سطح Δ م ب جـ.

الحل:

في المثلث أ ب جـ: ∵ أ ب = أ جـ، $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ق(ب $\hat{\text{أ}}$ ى) =

∴ Δ أ ب ى ثلاثيني ستيني ∴ أ ب = ، ب ى =

، ب جـ = ٢ ب ى =

Δ م أ ب قائم الزاوية عند أ ∴ Δ م أ ب ثلاثيني ستيني

∵ أ ب = ∴ أ م =

Δ م أ ى قائم الزاوية عند أ ∴ (م ى)^{٢} = = =

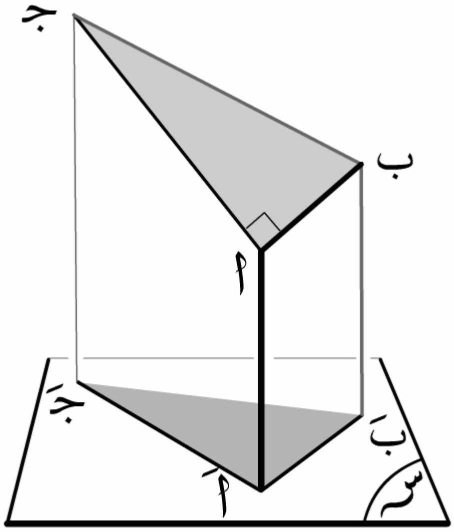
∴ م ى =

∵ $\overline{\text{م ى}}$ مائل على المستوى أ ب جـ، مسقطه ⊥ ∴ $\overline{\text{م ى}}$ ⊥

م (Δ م ب جـ) = $\frac{١}{٢}$. =

مثال (٧):

س، ص مستويان غير متوازيين، رُسم المثلث أ ب جـ قائم الزاوية عند أ داخل المستوى ص، فإذا كانت أَ، بَ، جَ هي مساقط رءوسه على المستوى س وكان $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{أَ بَ}}$، أثبت أن المثلث أَ بَ جَ قائم الزاوية عند أَ .



الحل:

∵ $\overline{\text{جـ أ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{أَ بَ}}$

∴

∵ $\overline{\text{جـ أ}}$ مائل على المستوى س

∴ مسقطه $\overline{\text{أَ جَ}}$ ⊥

مثال (٨):

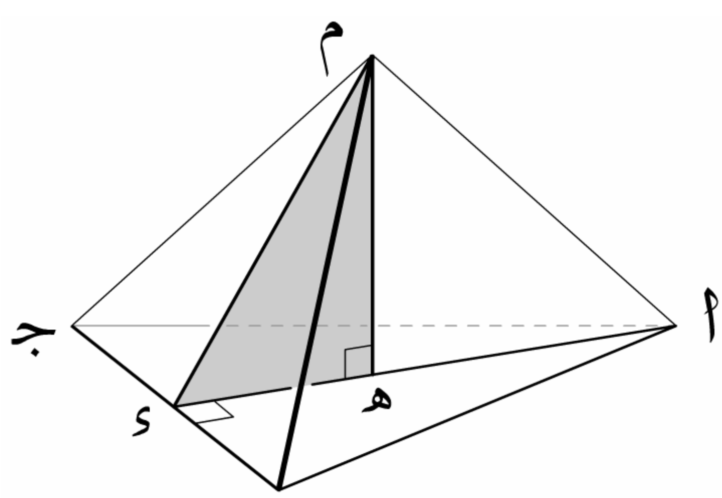
م أ ب جـ هرم ثلاثي، $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م جـ}}$ متعامدة مثنى مثنى، رُسم $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ يقطعه في ء، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ يقطعه في هـ، أثبت أن:

أولاً: $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوى م ب جـ.

ثانيًا: $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ.

ثالثًا: $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

رابعًا: $(\text{م هـ})^2 = \text{أ هـ} \cdot \text{هـ ء}$.



الحل:

∵ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ كل من ،

∴ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى م ب جـ # أولاً

∴ $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$، ∵ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ المستوى

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{م هـ}}$، ∵ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥

∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ # ثانيًا

∴ $\overline{\text{م ء}}$ مائل على المستوى ، مسقطه ، ⊥ ، ∴ # ثالثًا

Δ أ م ء قائم الزاوية عند م (لأن)، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$

بتطبيق نظرية إقليدس ينتج أن: # رابعًا

تمارين:

(١) مايو ١٩٩٦م:

أ) أكمل: الزاوية بين قطعة مستقيمة ومستوى هي الزاوية ....

ب) م مركز دائرة تقع في المستوى س، $\overline{\text{أ ب}}$ وترٌ فيها نُصِّفَ في جـ، رُسم $\overline{\text{م ء}}$ ⊥ المستوى س، أثبت أن: $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى م جـ ء.

(٢) مايو ١٩٩٧م:

أ) أكمل:

- المستقيمان العمودان على مستوى واحد ....
- إذا رُسم مستقيم مائل على مستوى وكان عموديًّا على مستقيم في المستوى فإن مسقط المستقيم المائل على المستوى يكون ....

ب) أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$، رُسم $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$ ويقطعها في هـ، أثبت أن: $\overline{\text{جـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب هـ}}$.

(٣) مايو ١٩٩٨م:

أكمل: المستقيم العمودي على كل من مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون ....

(٤) أغسطس ١٩٩٨م:

أ) أكمل:

- إذا كان مستقيم عموديًّا على كل من مستقيمين مستويين معًا وغير متوازيين فإنه يكون ....
- إذا رُسم مستقيم مائل على مستوى وكان مسقطه على المستوى عموديًّا على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل ....

(٥) أ ب جـ مثلث فيه ق($\hat{أ}$)=٣٠°، أ ب=٢٠سم، رُسم $\overline{ب ى}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، رُسم $\overline{ى و}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ يقطعه في و، فإذا كان ى و = ٢٦سم، احسب طول $\overline{ب ى}$.

(٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، رُسم $\overline{جـ ى}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، م منتصف $\overline{أ ى}$، رُسم $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$، $\overline{م ن}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$، أثبت أن: $\overline{ن هـ}$ // $\overline{أ ب}$، ن هـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب.

(٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية عند أ، أ ب=١٥سم، أ جـ=٢٠سم، رُسم $\overline{أ م}$ ⊥ المستوى أ ب جـ بحيث أ م=١٢سم، فإذا كانت ى ∈ $\overline{ب جـ}$ حيث ب ى=٩سم، فأثبت أن: $\overline{م ى}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$، ومن احسب قياس زاوية ميل $\overline{م ى}$ على المستوى أ ب جـ.

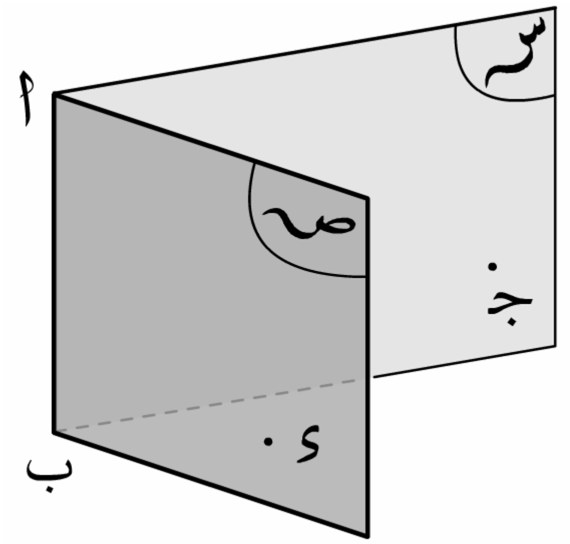
(٨) أ ب جـ، أ ب ى مثلثان غير مستويين، وكان $\overline{أ ب}$ ⊥ المستوى ب جـ ى، جـ ى=٢ أ ب =٢ ب ى=٢٤سم، ب جـ=١٢$\sqrt{٣}$ سم، ل، م، ن منتصفات $\overline{أ ب}$، $\overline{أ جـ}$، $\overline{أ ى}$ على الترتيب:

أولاً: أثبت أن $\overline{أ ب}$ ⊥ المستوى ل م ن.

ثانيًا: أوجد قياس زاوية ميل كل من $\overline{أ جـ}$، $\overline{أ ى}$ على المستوى ب جـ ى.

(٩) أ ب جـ ى أَ بَ جَـ ىَ مكعب، هـ ملتقى قطري القاعدة أ ب جـ ى، أثبت أن: $\overline{ىَ هـ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$. وإذا كان طول حرف المكعب ١٢$\sqrt{٣}$ سم، احسب طول $\overline{ىَ هـ}$.

الزاوية الزوجية



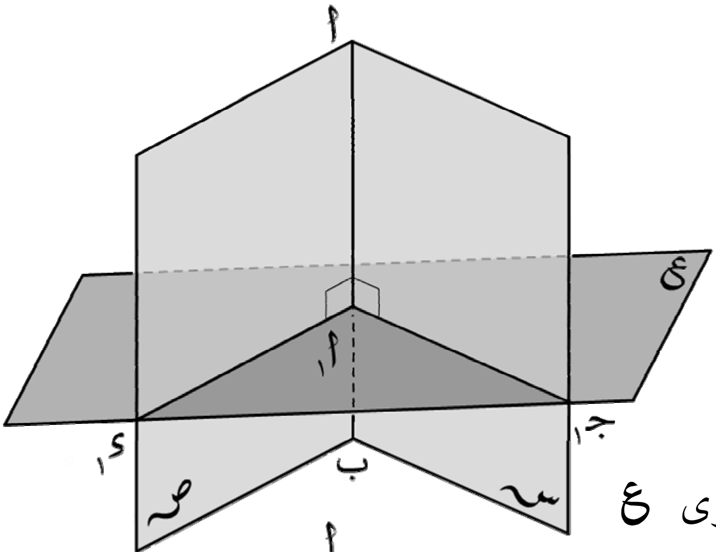
(١) تعريف:

هي اتحاد نصفي مستويين لهما حدٌّ مشترك.

في الشكل المقابل لنصفي المستويين س، ص حدٌّ مشترك هو $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، لذلك يُسمّى:

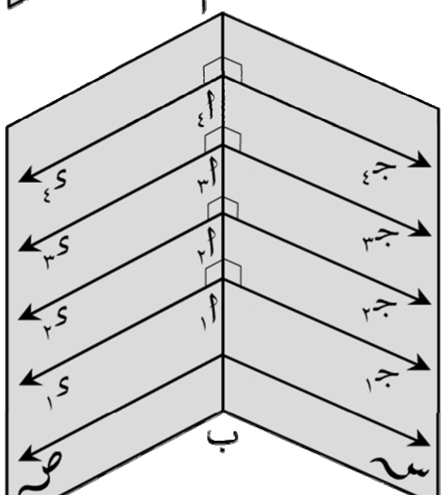
س ∪ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∪ ص زاوية زوجية، ويرمز لها بالرمز: ∠ (س – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – ص) أو بالرمز:

∠ (جـ – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – ء)، ويعني الزاوية الزوجية التي أحد وجهيها يمر بالنقطة جـ ووجهها الآخر يمر بالنقطة ء وحدُّها $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.



(٢) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية:

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع أي مستوى عمودي على حرفها (حدّها).



والشكلان المقابلان يوضحان المستوى ع العمودي على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ حدّ الزاوية الزوجية ∠ (س – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – ص) فقطعها في $\text{جـ}_1\hat{\text{أ}}_1\text{ء}_1$،

لذلك تُسمّي $\text{جـ}_1\hat{\text{أ}}_1\text{ء}_1$ زاوية مستوية للزاوية الزوجية ∠ (س – $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ – ص)، وكذلك كل من الزوايا $\text{جـ}_2\hat{\text{أ}}_2\text{ء}_2$، $\text{جـ}_3\hat{\text{أ}}_3\text{ء}_3$، $\text{جـ}_4\hat{\text{أ}}_4\text{ء}_4$.

● **لاحظ أن:**

١ – كلاً من ضلعي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية يكون عموديًّا على حرفها (حدّها).

٢ – يوجد لكل زاوية زوجية عدد لانهائي من الزوايا المستوية.

(٣) **حقيقة:**

جميع الزوايا المستوية للزاوية الزوجية تكون متساوية في القياس.

(٤) **تعريف:**

قياس الزاوية الزوجية هو قياس أيٍّ من زواياها المستوية.

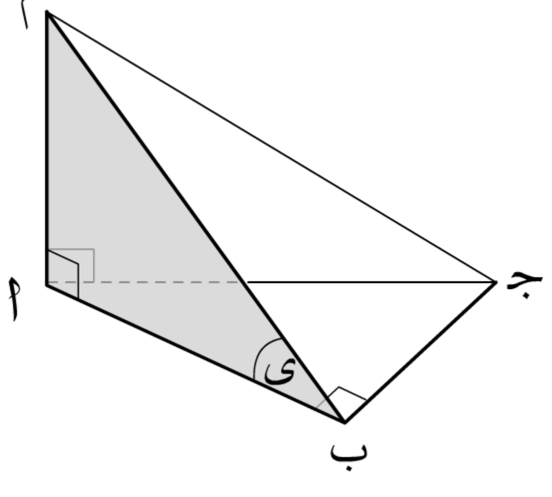
● **ملاحظات:**

١ – الزاوية الزوجية القائمة هي زاوية زوجية قياسها ٩٠° .

٢ – كل من المائل ومسقطه في المستوى يكونان زاوية مستوية للزاوية الزوجية حرفها المستقيم الثالث العمودي عليهما ووجهيها يحويانهما.

مثال (١):

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية عند ب، $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، فإذا كان م ب = ٢ م أ، أوجد زاوية مستوية للزاوية الزوجية ∠ (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – أ) واحسب قياسها.



الحل:

∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ∴ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ مائل

على نفس المستوى ومسقطه ⊥

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ ⊥ ∴ هي الزاوية

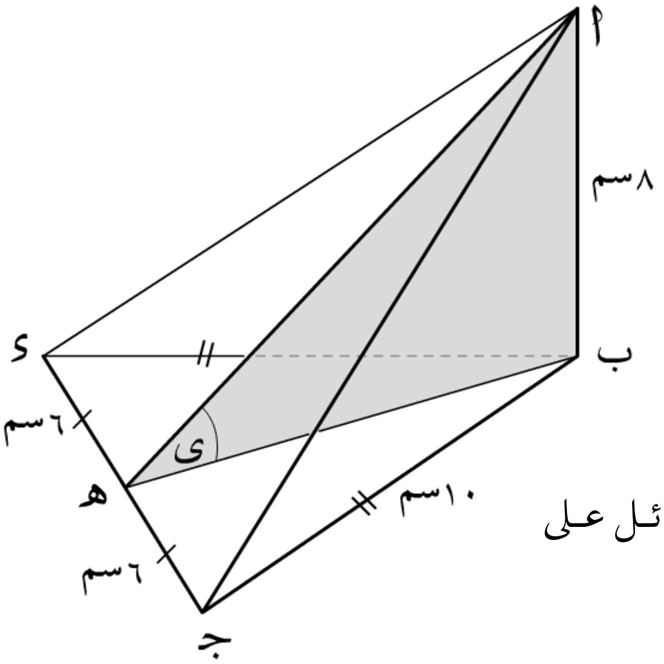
المستوية للزاوية الزوجية ∠ (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – أ)

في المثلث م أ ب القائم عند أ جا ى = ــــــ = ــــــ ∴ ى =

∴ ق[∠ (م – $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ – أ)] = ٣٠°

مثال (٢):

أ ب ج ى هرم ثلاثي فيه $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى ب ج ى، هـ منتصف $\overline{\text{ج ى}}$، فإذا كان أ ب = ٨سم، ب ج = ب ى = ١٠سم، ج ى = ١٢سم، أوجد:



أولاً: طول $\overline{\text{ب هـ}}$.

ثانيًا: ق[∠ (أ – $\overleftrightarrow{\text{ج ى}}$ – ب)]

الحل:

في المثلث ب ج ى: ∵ ب ج = ب ى، هـ منتصف $\overline{\text{ج ى}}$ ∴ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ج ى}}$

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى ب ج ى ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ مائل على نفس المستوى ومسقطه ∴ $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ⊥

في المثلث ب هـ ج القائم عند هـ وباستخدام نظرية فيثاغورث ينتج أن:

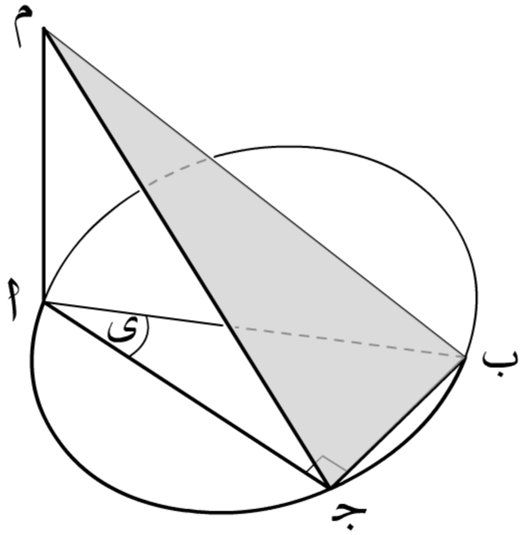
$(\text{ب هـ})^2$ = ∴ ب هـ =

في المثلث ب أ هـ القائم عند ب ينتج أن: ق(أ $\hat{\text{هـ}}$ ب) = ى =

لكن أ $\hat{\text{هـ}}$ ب هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية ∠ (أ – $\overleftrightarrow{\text{ج ى}}$ – ب) ... لماذا؟

مثال (٣):

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة طول نصف قطرها نق، رُسم $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ مستوى الدائرة حيث أ م = نق، فإذا كان ق[∠ (م – $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ – أ)] = ٤٥°، فاحسب ق[∠ (ب – $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ – ج)] هـ.



الحل:

∵ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ مستوى الدائرة

∴ $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$ مائل مسقطه

∵ ⊥ لأن $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة

∴ ^ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية ∠(م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – أ)

∴ ق(^) = ٤٥°، ∴ في المثلث م أ جـ القائم عند أ يكون م أ = = نو

في المثلث أ جـ ب القائم عند جـ، ∵ = $\frac{1}{2}$ أ ب، ∴ ى =

∵ $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ ∴ ^ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية ∠(ب – $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ – جـ)، ∴ ق[∠(ب – $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ – جـ)] =

(٤) المستويات المتعامدة:

يُقال لمستويين أنهما متعامدان، إذا نشأ عن تقاطعهما أربع زوايا زوجية قوائم.

● ملاحظة:

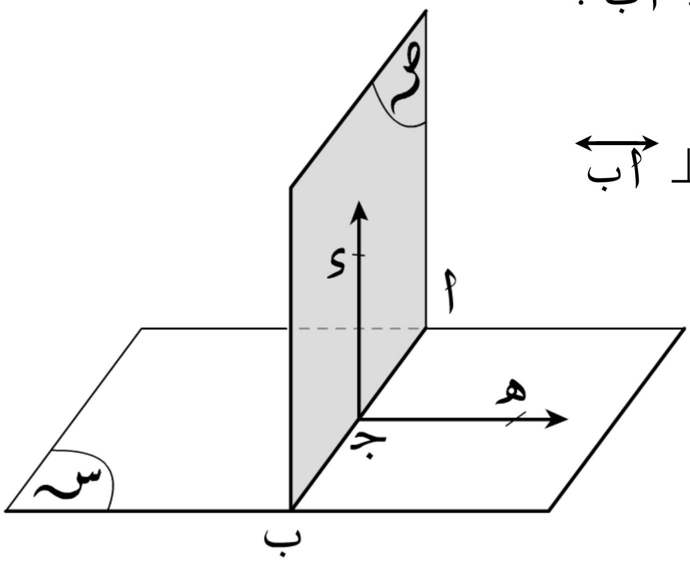
لإثبات تعامد مستويين، يكفي إثبات وجود زاوية زوجية عند تقاطعهما قائمة.

❊ نظرية (٥): {البرهان مقرر}

«إذا كان مستقيم عموديًا على مستوى، فكل مستوى يحوي هذا المستقيم يكون عموديًا على ذلك المستوى».

المعطيات: $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ ⊥ المستوى س عند جـ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ى}}$ ⊂ ص، ص ∩ س = $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

المطلوب: أثبت أن: المستوى ص ⊥ المستوى س.



العمـــل: نرسم في المستوى س: $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

البرهـان: ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp$ المستوى س

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ ^ هي زاوية مستوية

للزاوية الزوجية :

$\measuredangle$(س – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ص)

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp$ س

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \perp$ ∴ ^ قائمة

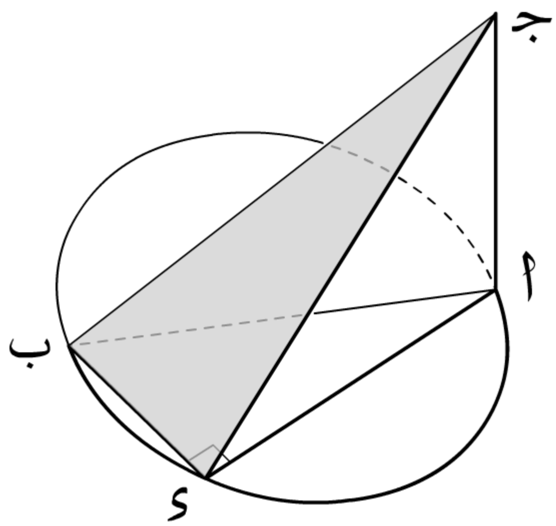
∴ $\measuredangle$(س – $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ – ص) قائمة

❁ نظرية (٦): { بدون برهان }

«إذا تعامد مستويان ورُسم في أحدهما مستقيمًا عموديًّا على خط تقاطعهما، كان هذا المستقيم عموديًّا على المستوى الآخر».

❁ حقيقة:

«إذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديًّا على مستوى ثالث، كان خط تقاطع هذين المستويين عموديًّا على المستوى الثالث».



مثال (١):

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة ، $\overline{\text{أ جـ}} \perp$ مستوى الدائرة، ء أي نقطة على الدائرة. أثبت أن المستويين أ جـ ء، ب ء جـ متعامدان.

الحل:

∵ $\overline{\text{جأ}}$ ⊥ مستوى الدائرة ∴ المستوى أجء ⊥ مستوى الدائرة .... نظرية (٥)

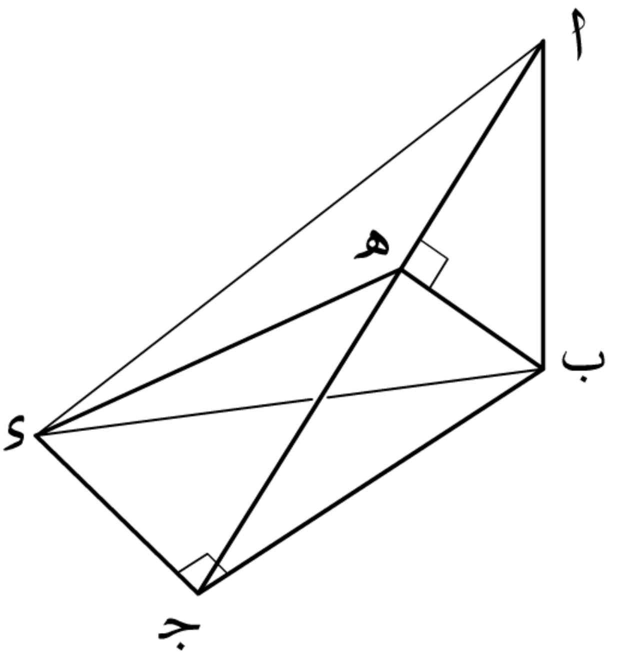
∵ المستوى أجء ∩ مستوى الدائرة = $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overline{\text{بء}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$

∴ $\overline{\text{بء}}$ ⊥ المستوى أجء .... نظرية (٦)

∴ المستويان أجء، بءج متعامدان .... نظرية (٥)

<u>مثال (٢):</u>

أبجء هرم ثلاثي فيه $\overline{\text{أب}}$ ⊥ المستوى بجء، فإذا كان المثلث بجء قائم الزاوية عند ج، فأثبت أن:



<u>أولاً:</u> $\overleftrightarrow{\text{ءج}}$ ⊥ المستوى أبج.

<u>ثانيًا:</u> المستوى أجء ⊥ المستوى أبج

<u>ثالثًا:</u> إذا رُسم $\overline{\text{به}}$ ⊥ $\overline{\text{أج}}$ ، أثبت أن:

$\overline{\text{به}}$ ⊥ $\overline{\text{هء}}$.

<u>الحل:</u>

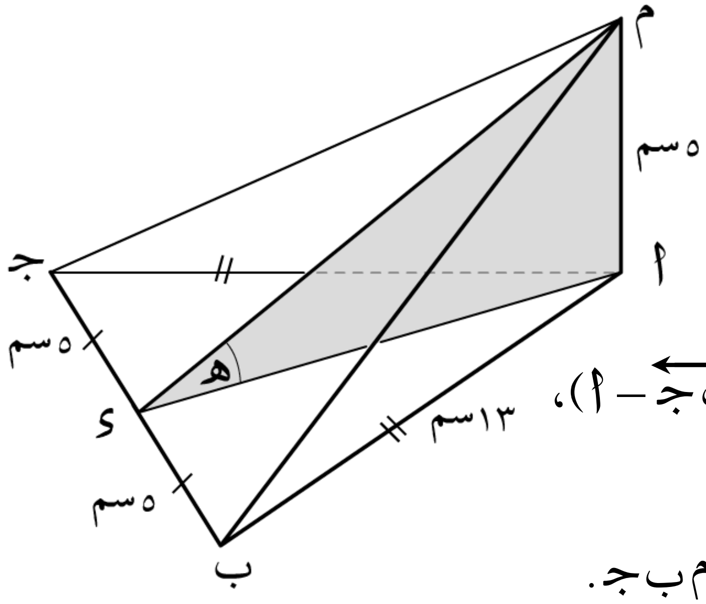
على الطالب أن يحل أولاً، وثانيًا ...

∵ المستوى أبج ∩ المستوى أجء = $\overleftrightarrow{\text{أج}}$ ، $\overline{\text{به}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أج}}$

∴ $\overline{\text{به}}$ ⊥ ∴ $\overline{\text{به}}$ ⊥ # ثالثًا

مثال (٣):

م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، أ م = ٥سم، أ ب = أ جـ = ١٣سم، ب جـ = ١٠سم، ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.



أولاً: احسب طول $\overline{\text{أ ى}}$ ، وأثبت أن: $\overline{\text{م ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$.

ثانيًا: احسب طول $\overline{\text{م ى}}$ ، واستنتج زاوية مستوية للزاوية الزوجية ∠ (م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – أ)، وإذا كان قياسها هـ أوجد جتاهـ.

ثالثًا: أثبت أن المستوى م أ ى ⊥ المستوى م ب جـ.

الحل: (يترك للطالب)

الهرم القائم

(١) **تعريف:**

هو هرم قاعدته سطح مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

- مركز المثلث المتساوي الأضلاع هو نقطة تقاطع متوسطاته.
- مركز المربع هو نقطة تقاطع قطريه.

(٢) **خواص الهرم القائم:**

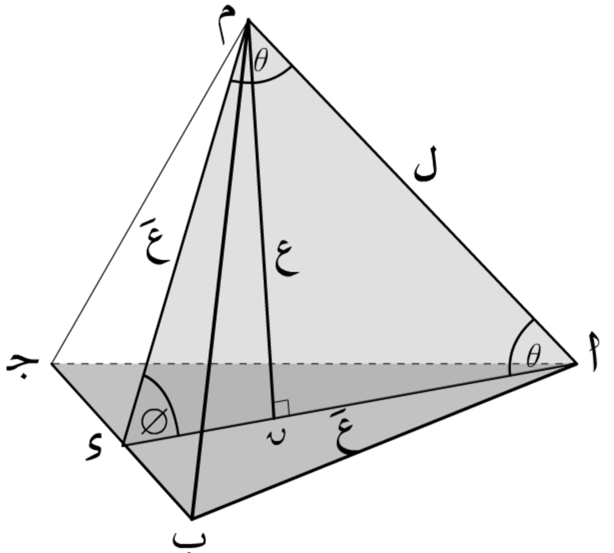
- أحرفه الجانبية متساوية الطول.
- أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.
- ارتفاعاته الجانبية – ارتفاعات أوجهه الجانبية– متساوية الطول.

(٣) **الهرم الثلاثي المنتظم:**

هو هرم ثلاثي قائم طول حرفه الجانبي يساوي طول ضلع قاعدته، أي أن أحرفه الستة متساوية الطول.

أو هو هرم ثلاثي أوجهه الأربعة سطوح مثلثات متساوية الأضلاع.

إذا كان **ل**، ع، عَ هي على الترتيب أطوال حرف وارتفاع والارتفاع الجانبي لهرم ثلاثي منتظم، فإن:

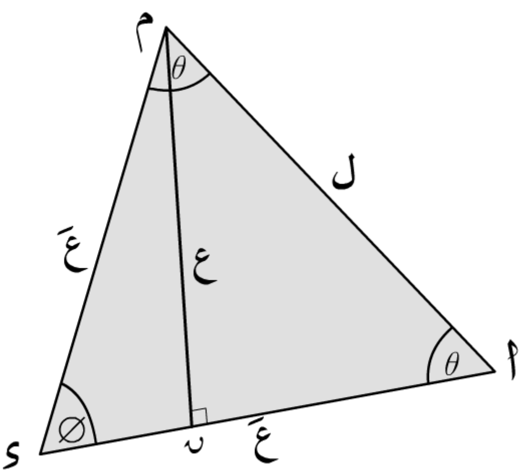


(١) ٢ ل^٢ = ٣ ع^٢		(٢) ٣ ل^٢ = ٤ عَ^{٢}

(٣) ٨ عَ^{٢} = ٩ ع^٢

(٤) مساحته الكلية = ل^٢ $\sqrt{٣}$

(٥) حجمه = $\frac{\sqrt{٣}}{١٢}$ ل^٢ ع



(٦) قياس الزاوية الزوجية بين أي وجهين من أوجهه هو مقدار ثابت ويساوي $\varnothing$

حيث: $جا\varnothing = \frac{ع}{عَ} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

$\therefore \varnothing = ٧٠^\circ\ ٣١'\ ٤٣,٦١''$.

(٧) قياس زاوية ميل أي حرف على قاعدة الهرم الثلاثي المنتظم هو مقدار ثابت ويساوي θ حيث: $جا\theta = \frac{ع}{ل} = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}}$

$\therefore \theta = ٥٤^\circ\ ٤٤'\ ٨,٢''$.

**** تدريب:**

(١) استنتج العلاقات السبع السابقة مستعينًا بالشكل المرسوم.

(٢) استنتج العلاقات المماثلة للعلاقات السبع السابقة لهرم رباعي قائم فيه طول الحرف الجانبي يساوي طول ضلع قاعدته.

مثال (١):

م أ ب جـ د هرم رباعي قائم طول ضلع قاعدته يساوي ٢ ل، وارتفاعه يساوي ل.

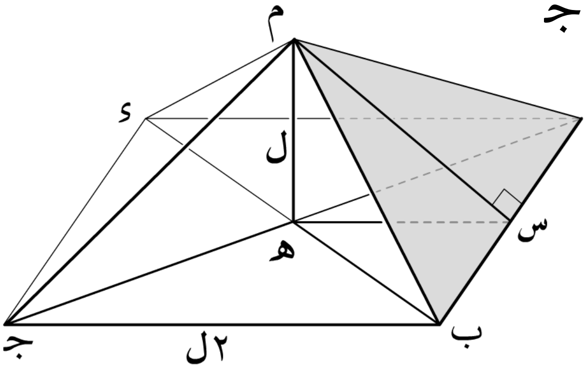
أولاً: احسب قياس كل من: i) زاوية ميل الحرف الجانبي على القاعدة.

ii) الزاوية الزوجية بين الوجه الجانبي والقاعدة.

ثانيًا: إذا مرّ مستوى بالضلع $\overline{أب}$ وقطع $\overline{مد}$ ، $\overline{مجـ}$ في و ، ن على الترتيب، فاثبت أن: الشكل أ ب ن و شبه منحرف.

الحل:

بفرض هـ نقطة تقاطع قطري القاعدة. $\therefore$ هـ أ = هـ ب = هـ جـ = هـ د = ل $\sqrt{٢}$ ،



$\overline{مهـ}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ء، ∴ $\overleftrightarrow{أجـ}$ مسقط $\overleftrightarrow{مجـ}$

على المستوى أ ب جـ ء، في المثلث م هـ جـ القائم

عند هـ، ظا(م $\hat{جـ}$ هـ) = ــــ = ــــ

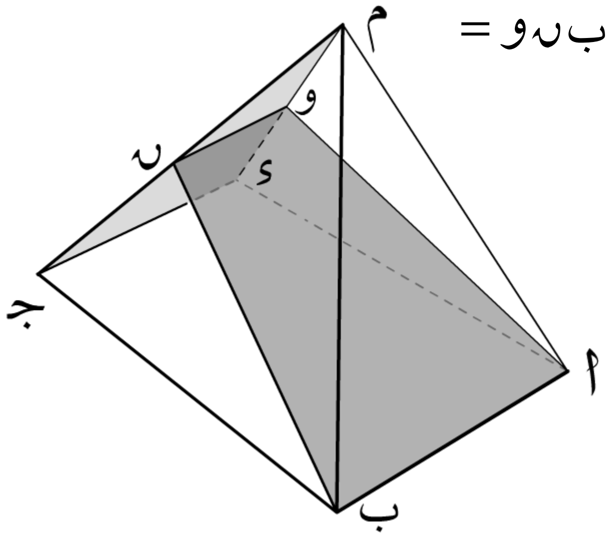
∴ ق(م $\hat{جـ}$ هـ) =

بفرض س منتصف $\overline{أب}$

∴ $\overline{هـس}$، $\overline{مس}$ ⊥ $\overline{أب}$ .... علل

∴ هـ س = ل، م $\hat{س}$ هـ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية ∠ (م – $\overleftrightarrow{أب}$ – هـ)

ظا(م $\hat{س}$ هـ) = ــــ = ــــ = ١   ∴ ق[∠ (م – $\overleftrightarrow{أب}$ – هـ)] =



∵ $\overline{أب}$ // $\overline{جـء}$، المستوى م جـ ء ∩ المستوى أ ب ن و = $\overleftrightarrow{ون}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$، $\overleftrightarrow{جـء}$ // $\overleftrightarrow{ون}$

لكن في المثلث م جـ ء، فإن: جـ ء ≠ و ن

∴ أ ب ≠ و ن   ∴ الشكل أ ب ن و

شبه منحرف.

مثال (٢):

أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم، رُسم $\overline{أن}$ ⊥ مستوى المربع حيث:

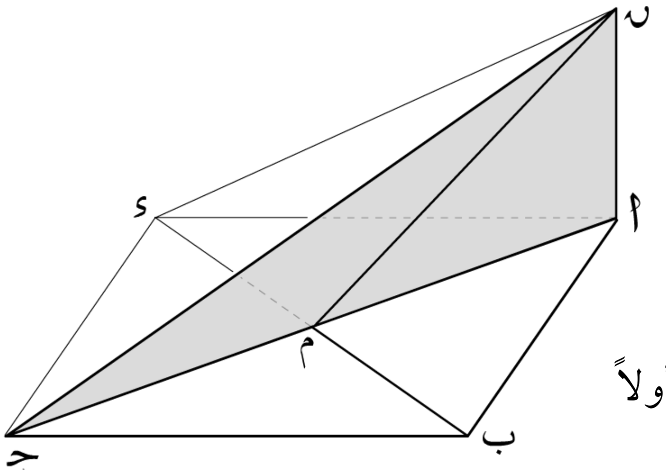
أ ن = $٢\sqrt{٦}$ سم، فإذا تقاطع قطري المربع في م:

أولاً: أثبت أن: $\overline{بء}$ ⊥ المستوى ن أ م.

ثانيًا: أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين ن ب ء، أ ب ء.

ثالثًا: أوجد قياس زاوية ميل $\overline{نجـ}$ على مستوى المربع.

رابعًا: أثبت أن المستوى ن أ ء ⊥ مستوى المربع.



الحل:

∵ $\overline{\text{أجـ}} \perp \overline{\text{بء}}$ (قطري المربع)، $\overline{\text{نم}}$

مائل على مستوى المربع مسقطه $\overline{\text{أم}}$

∴ $\overline{\text{نم}} \perp$

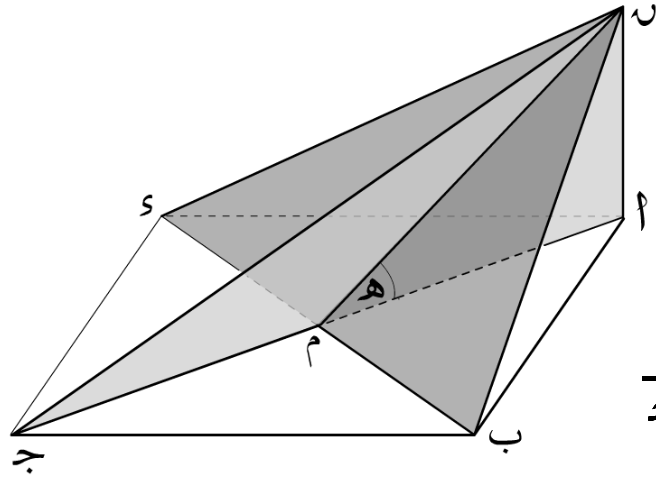
∴ $\perp$ المستوى ن أ م # أولاً

∴ $\wedge$ هي الزاوية المستوية للزاوية

الزوجية $\angle$(ن – $\overleftrightarrow{\text{بء}}$ – أ)

∴ ظاهـ = $\frac{\text{أن}}{\text{أم}}$ = ——— = ———

∴ هـ = ° # ثانيًا



∵ $\overline{\text{نجـ}}$ مائل على مستوى المربع مسقطه $\overline{\text{أجـ}}$

∴ ن $\hat{\text{جـ}}$ أ هي زاوية ميل $\overline{\text{نجـ}}$ على مستوى المربع

ثالثًا

∵ $\overline{\text{نأ}} \perp$ مستوى المربع ∴ # رابعًا

تمارين

● المجموعة الأولى:

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وعلامة (×) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي، وصوّب العبارة الخطأ كلما أمكن:

(١) المستويان العمودان على نفس المستوى متوازيان. (   )

(٢) إذا تعامد مستويان، فكل مستقيم يقع في أحدهما يكون عموديًا على المستوى الآخر (   )

(٣) إذا كان المستويان س، ص عمودين على المستوى ع، فخطا تقاطعهما مع المستوى ع يكونان متوازيين. ( )

(٤) إذا كان مستقيم عمودًا على كل من مستويين مختلفين، فإنهما يكونا متوازيين. ( )

(٥) المستقيمان العمودان على مستقيم ثالث في الفراغ متوازيان. ( )

(٦) يوجد مستوى واحد وواحد فقط يمر بنقطة معلومة عموديًّا على مستوى معلوم. ( )

(٧) يوجد مستقيم واحد وواحد فقط يمر بنقطة معلومة عموديًّا على مستوى معلوم. ( )

(٨) إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوى، فكل مستوى يمر بهذا المستقيم يكون عموديًّا على ذلك المستوى. ( )

(٩) أي ثلاث نقط تعين مستوى. ( )

(١٠) إذا كان $\overline{أب}$ توازي المستوى س، فإن النقطتين أ، ب تكونان على بعدين متساويين من المستوى س. ( )

(١١) متوازي مستطيلات أطوال ثلاثة أحرف من أحرفه متلاقية في رأس منه تساوي على الترتيب ٣سم، ٤سم، ١٢سم، فإن طول قطره يكون مساويًا ١٣سم. ( )

(١٢) مكعب طول قطره يساوي $٤\sqrt{٣}$ سم، فإن طول حرفه يساوي ٤سم. ( )

(١٣) إذا كان $ل_١$، $ل_٢$ مستقيمين متخالفين، م نقطة لا تنتمي لأحدهما، فإنه يمكن رسم مستويين مختلفين من النقطة م كل منهما يوازي كلا من $ل_١$، $ل_٢$. ( )

(١٤) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هي الزاوية التي تنشأ من قطع الزاوية الزوجية بمستوى يوازي حرفها. ( )

(١٥) إذا تقاطعت ثلاث مستويات مثنى مثنى، فإن خطوط تقاطعها تكون متوازية. ( )

(١٦) إذا قَطعت عدة مستويات متوازية مستقيمين، فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة تكون متساوية في الطول. ( )

(١٧) المستقيمان المتخالفان على التعامد يمكن أن يمر بهما مستويان متعامدان. ( )

(١٨) لا يمكن رسم سوى عمود واحد على مستوى معلوم من نقطة عليه. ( )

● المجموعة الثانية:

تمارين إنتاج الإجابة:

(١) أ ب جـ ء هرم ثلاثي منتظم، نُصّف الحرفان $\overline{أء}$ ، $\overline{ب جـ}$ في هـ، و على الترتيب، ثم نُصّف الحرفان $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ في س، ص على الترتيب. أثبت أن $\overline{هـ و}$، $\overline{س ص}$ ينصف كل منهما الآخر.

(٢) $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ء}$ غير مستويتين، م منتصف $\overline{ب ء}$، رُسم المستوى م س ص يوازي كل من $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ء جـ}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$، $\overline{أ ء}$ في س، ص على الترتيب. أثبت أن:

أ) $\overline{م ص}$ // $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م س}$ // $\overline{جـ ء}$.   ب) س ص $< \frac{1}{2}$(أ ب + جـ ء)

(٣) أ ب جـ ء هرم ثلاثي فيه س ∈ $\overline{أ ب}$ ، ص ∈ $\overline{أ جـ}$ ، ع ∈ $\overline{أ ء}$ ، وكان $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، $\overleftrightarrow{س ع}$ يقطع $\overleftrightarrow{ب ء}$ في هـ، $\overleftrightarrow{ص ع}$ يقطع $\overleftrightarrow{جـ ء}$ في و. أثبت أن: $\overleftrightarrow{هـ و}$ // $\overleftrightarrow{س ص}$.

(٤) أ ب جـ ء هرم ثلاثي، أُخذت النقطة س ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث أ س : أ ب = ١ : ٤، رُسم مستوى يمر بالنقطة س موازيًا المستوى ب جـ ء ويقطع $\overline{أ جـ}$ في ص، $\overline{أ ء}$ في ع:

أ) أثبت أن المثلث س ص ع ∼ المثلث ب جـ ء.

ب) إذا كانت مساحة سطح المثلث ب جـ ء تساوي ٦٤ سم^{٢} ، فاحسب مساحة سطح المثلث س ص ع.

(٥) سـ ، صـ مستويان متوازيان، قطعهما المستقيم $\overleftrightarrow{أ ء}$ في ب، جـ على الترتيب، وكان أ ب : ب جـ : جـ ء = ٢ : ٣ : ٥، رُسم من أ مستقيم يقطع المستويين

سـ، صـ في ن، م على الترتيب، كما رُسم من ى مستقيم قطع المستويين صـ، سـ في و، هـ على الترتيب. أثبت أن: $\frac{م جـ \times جـ و}{ن ب \times ب هـ} = \frac{٢٥}{١٦}$.

(٦) سـ، صـ، ع ثلاث مستويات متوازية قطعها المستقيم ل في أ، ب، جـ على الترتيب، كما قطعها المستقيم م في ى، هـ، و على الترتيب، فإذا كان $\overline{أ و} \cap$ صـ = {ن}، وكان أب : ب جـ = ١ : ٢، أثبت أن: جـ و + ٢ أ ى = ٣(ب ن + ن هـ).

(٧) أ ب جـ أَ بَ جَ منشور ثلاثي مائل فيه الوجه ب جـ جَ بَ مربع، رُسم $\overleftrightarrow{ب ى} \perp \overline{أ أَ}$ يقطعها في ى. أثبت أن: $\overline{أ أَ} \perp$ المستوى ب جـ ى، وإذا كان أ ب = ٥سم، ب ى = ٣سم، أ جـ = $٦\frac{٢}{٣}$سم، احسب طول $\overline{جـ ى}$.

(٨) أ ب جـ ى أَ بَ جَ ىَ متوازي مستطيلات أبعاده ٥، ٩، ١٢ من السنتيمترات:

أ) أوجد طول قطره $\overline{أ جَ}$.

ب) أثبت أن قطر متوازي المستطيلات يصنع مع ثلاثة أحرف متلاقية في أحد رؤوسه ثلاث زوايا مجموع مربعات جيوب تمامها يساوي ١.

جـ) أثبت أن قطر متوازي المستطيلات يصنع مع ثلاثة أوجه متقاطعة في أحد رؤوسه ثلاث زوايا مجموع مربعات جيوب تمامها يساوي ٢.

(٩) أ ب جـ ى هرم ثلاثي قاعدته المثلث المتساوي الأضلاع ب جـ ى الذي طول ضلعه ١٢سم، فإذا كان مسقط النقطة أ على القاعدة ب جـ ى هو نقطة تلاقي متوسطاتها، أ ب = ٨سم، فأوجد قياس زاوية ميل $\overline{أ ب}$ على مستوى القاعدة.

(١٠) أ ب جـ ى مربع تقاطع قطراه في م، هـ نقطة لا تنتمي إلى مستوى المربع، فإذا كان هـ م

= م ب، المثلث هـ أ ب متساوي الأضلاع، أثبت أن:

أ) $\overline{هـ م} \perp \overline{م ب}$.	ب) $\overline{هـ م} \perp$ مستوى المربع أ ب جـ د

(١١) أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه أ ب : ب جـ : أ د = ٣ : ٤ : ١٢، $\overline{أ د} \perp \overline{أ جـ}$، $\overline{أ ب} \perp \overline{ب جـ}$. أثبت أن: ٣ جـ د = ١٣ أ ب.

(١٢) جـ د هـ مثلث قائم الزاوية في جـ، رُسم $\overleftarrow{جـ أ} \perp$ المستوى جـ د هـ، وُصّلت $\overline{أ د}$، $\overline{أ هـ}$، وكانت مساحة سطح المثلث أ د هـ = ٩٦ سم²، جـ د = ٩ سم، جـ هـ = ١٢ سم. احسب طول $\overline{أ هـ}$، وقياس الزاوية الزوجية $\angle$(أ – $\overleftrightarrow{د هـ}$ – جـ).

(١٣) $\overline{أ ب}$ وتر في دائرة م نُصّف في جـ، رُسم $\overline{م د} \perp$ مستوى الدائرة. أثبت أن: $\overline{أ ب} \perp$ المستوى م جـ د.

(١٤) م أ ب جـ هرم ثلاثي فيه المثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم، $\overline{أ م} \perp$ المستوى أ ب جـ، أ م = ٢٠ $\sqrt{٣}$ سم، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$:

أ) أثبت أن المستوى م أ هـ $\perp$ المستوى أ ب جـ.

ب) أوجد ق[$\angle$(م – $\overleftrightarrow{ب جـ}$ – أ)].

(١٥) س ص ع مثلث فيه ق($\hat{س}$) = ٣٠°، س ص = ٢٠ سم، رُسم $\overline{ص د} \perp$ المستوى س ص ع بحيث كان ص د = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم، رُسم $\overline{ص هـ} \perp \overline{س ع}$ تقطعها في هـ. أثبت أن: $\overline{د هـ} \perp \overline{س ع}$، ومن ثم أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين د س ع، س ص ع.

(١٦) م أ ب جـ د هرم رباعي قاعدته المستطيل أ ب جـ د تقاطع قطريه في النقطة و، فإذا

عُلم أن م أ = ١٣سم، أ ب = ٦سم، ب جـ = ٨سم، احسب طول $\overline{\text{م و}}$ ، وإذا كانت س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، أثبت أن $\overline{\text{س م}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، وأوجد ظل الزاوية بين المستويين أ م ب، أ ب جـ ى، علمًا بأن $\overline{\text{م و}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ى.

(١٧) أ ب جـ ى هرم ثلاثي فيه ب ى = ب جـ، أ جـ = أ ى = ١٣سم، جـ ى = ١٠سم، هـ منتصف $\overline{\text{جـ ى}}$ ، قيست الزاوية بين المستويين أ جـ ى، ب جـ ى فكان قياسها ٦٠°، رسم من أ عمود على $\overline{\text{ب هـ}}$ قطعها في و، أثبت أن المستوى أ ب هـ ⊥ المستوى ب جـ ى، ثم احسب أ و.

(١٨) أ ب جـ مثلث فيه ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ١٢٠°، أ ب = أ جـ، رُسم $\overline{\text{أ ى}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ قطعتها في ى، أ ب = ٤سم، رُسم $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ بحيث ق(أ $\hat{\text{م}}$ ى) = ٣٠°، أوجد:

أ) طول كل من $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{م ى}}$.

ب) قياس زاوية ميل $\overline{\text{م ى}}$ على المستوى أ ب جـ.

جـ) ق[∠(م – $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ – أ)].

(١٩) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية عند ب، رُسم $\overline{\text{أ م}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ، $\overline{\text{أ ل}}$ ⊥ $\overline{\text{م ب}}$ قطعتها في ل، أثبت أن $\overline{\text{أ ل}}$ ⊥ المستوى م ب جـ.

(٢٠) س ص ع مثلث فيه س ص = س ع = ١٠سم، ص ع = ١٢سم، رُسم $\overline{\text{م س}}$ ⊥ المستوى س ص ع بحيث م س = ٨سم، هـ منتصف $\overline{\text{ص ع}}$:

أ) أوجد طول $\overline{\text{م هـ}}$.

ب) أثبت أن $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$.

جـ) أوجد ق[∠(م – $\overleftrightarrow{\text{صع}}$ – س)].

(٢١) س، ص مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، م نقطة لا تنتمي إلى أي من المستويين، رُسم $\overleftarrow{\text{مجـ}}$ ⊥ س، $\overleftarrow{\text{مء}}$ ⊥ ص فقطعاهما في جـ، ء على الترتيب، رُسم $\overleftarrow{\text{ءهـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ فقطعه في هـ، أثبت أن:

أ) $\overleftarrow{\text{جـهـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

ب) النقط م ، جـ، هـ، ء تقع في مستوى واحد.

(٢٢) أبجـء، أبهـو مربعان غير مستويين، ل، م منتصفا $\overline{\text{أو}}$ ، $\overline{\text{بهـ}}$ على الترتيب، أثبت أن الشكل لءجـم مستطيل، وإذا كان قياس الزاوية الزوجية بين المربعين يساوي ١٢٠°، أوجد بعدي المستطيل لءجـم، ثم وضح متى يكون هذا المستطيل مربعًا؟

(٢٣) م أبجـ هرم ثلاثي أحرفه $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م جـ}}$ متعامدة مثنى مثنى، رُسم $\overline{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{بجـ}}$، أثبت أن:

أ) ق($\widehat{\text{أءم}}$) يساوي قياس الزاوية بين المستويين م ب جـ، أ ب جـ.

ب) (م ء)^{٢} = ء ب × ء جـ = ء هـ × ء أ.

(٢٤) أبجـء هرم ثلاثي فيه أجـ = جـب، أء = ءب، ق($\widehat{\text{أجـء}}$) = ٩٠°، أثبت أن $\overleftarrow{\text{ءجـ}}$ ⊥ المستوى أبجـ، وإذا كان ق($\widehat{\text{ب أ جـ}}$) = ٥٠°، أوجد قياس الزاوية الزوجية ∠(أ – $\overleftrightarrow{\text{جـء}}$ – ب).