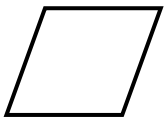
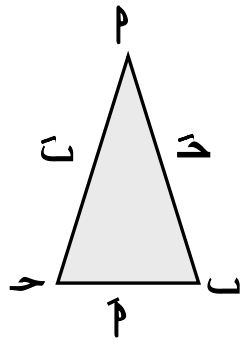
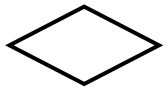
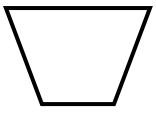
٣ ث/ع

متطلبات قبلية (ملاحظات وقوانين هامة)

٣ ث/ع

الشكل	المساحة	المحيط
متوازي الأضلاع 	= طول القاعدة × الارتفاع = حاصل ضرب طولي ضلعين متجاورين × جيب الزاوية المحصورة بينهما	= مجموع أطوال أضلاعه = ٢ × (مجموع طولي ضلعين متجاورين)
المثلث 	= $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي ضلعين متجاورين × جيب الزاوية المحصورة بينهما = $\sqrt{ح(ح-أ)(ح-ب)(ح-جـ)}$ حيث: ح = $\frac{١}{٢}$ المحيط = $\frac{١}{٢}$ (أ + ب + جـ)	= مجموع أطوال أضلاعه = أ + ب + جـ A.H.F
المثلث المتساوي الأضلاع	= $\frac{١}{٢}$ ل^{٢} جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢}	= ٣ × طول ضلعه = ٣ ل حيث: ل طول الضلع
المربع	= طول الضلع × نفسه = ل^{٢} = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره	= ٤ × طول ضلعه = ٤ ل حيث: ل طول ضلع المربع
المستطيل	= الطول × العرض	= ٢ (الطول + العرض)
المعين 	= طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي القطرين	= ٤ × طول ضلعه = ٤ ل حيث: ل طول ضلع المعين
شبه المنحرف 	= $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع	محيط شبه المنحرف أو أي مضلع = مجموع أطوال أضلاعه
الدائرة	= ط نو^{٢} حيث : نو نصف قطر الدائرة	محيط الدائرة = ٢ط نو

مساحات وحجوم بعض المجسمات الشهيرة

أبوعلي

المنشور

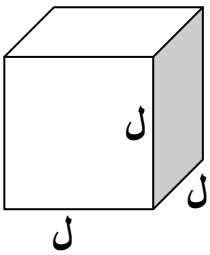
- حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع
- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

ملحوظة : تحدد قاعدة المنشور من معطيات المسالة .

المكعب

المكعب هو (منشور قائم - متوازي مستطيلات) قاعدة مربعة الشكل

بفرض أن طول حرف المكعب = ل



- حجم المكعب = $ل^{٣}$
- المساحة الجانبية = $٤ ل^{٢}$
- طول القطر = $\sqrt{٣}$ ل
- المساحة الكلية = $٦ ل^{٢}$

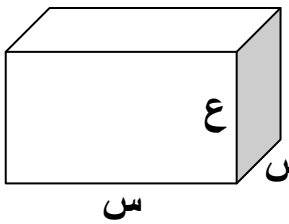
ملحوظة : أقطار المكعب عددها أربعة ومتساوية في الطول و مجموع أطوال الأقطار = $٤\sqrt{٣}$ ل

متوازي المستطيلات

أبو محمد

بفرض الأبعاد هي: س ، ص ، ع

- طول قطر متوازي المستطيلات = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}}$
- ملحوظة : أقطار متوازي المستطيلات عددها أربعة ومتساوية في الطول
- مجموع أطوال أقطار متوازي المستطيلات = $٤\sqrt{س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢}}$



- مجموع الأبعاد = س + ص + ع
- مجموع الأحرف الجانبية = ٤ س + ٤ص + ٤ ع
- حجم متوازي المستطيلات ح = الطول × العرض × الارتفاع = س × ص × ع
- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢(س + ص) × ع
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين = ٢(س+ ص) × ع+٢س× ص

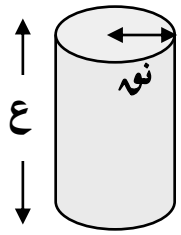
ملحوظة

(أبومحمد) A·H·F

إذا ذكر بالمسألة النسبة بين طولي ضلعي القاعدة في متوازي المستطيلات كنسبة ٣ : ٤

مثلاً فإننا نفرض أن طولي ضلعي القاعدة هما ٣ س ، ٤ س حيث أن : س > ٠

الأسطوانة



- حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع = ط نوه^{٢} × ع
- المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ط نوه×ع
- المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

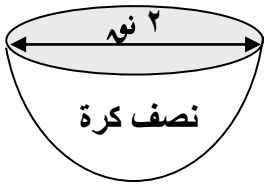
= ٢ط نوهع + ٢ ط نوه^{٢}

A.H.F.

الكـرة

- مساحة سطح الكرة = ٤ط نوه^{٢} حيث: نوه نصف قطر الكرة
- نصف مساحة سطح الكرة = $\frac{١}{٢}$ × ٤ ط نوه^{٢} = ٢ط نوه^{٢}
- مساحة سطح نصف الكرة = نصف مساحة سطح الكرة + مساحة الدائرة الكبرى

= ٢ط نوه^{٢} + ط نوه^{٢} = ٣ط نوه^{٢}



- حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ ط نوه^{٣}
- نصف حجم الكرة = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ ط نوه^{٣} = $\frac{٢}{٣}$ ط نوه^{٣}

الهرم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة ×الارتفاع

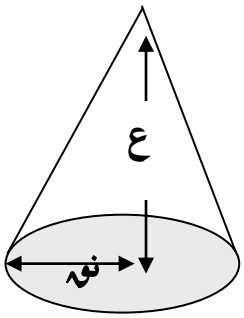
المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة ×الارتفاع

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

ملحوظة:
تحددقاعدة الهرم من المسالة

المخروط

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة ×الارتفاع



حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ ط نوه^{٢} × ع

- المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{١}{٢}$ × ٢ط نوه× ع = ط نوه× ع

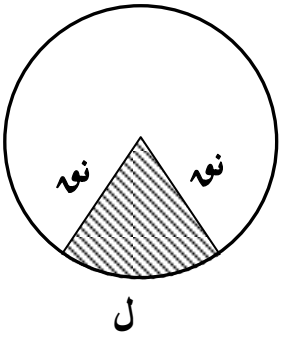
- المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

المساحة الكلية للمخروط = ط نوه× ع + ط نوه^{٢}

أبو محمد

القطاع الدائري

- محيط القطاع الدائري = ٢ نق + ل
- مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ ل نق
- القياس الدائري لزاوية القطاع : $هـ^{ء} = \frac{ل}{نق}$



العلاقة بين التقدير الدائري والستيني :

$$\frac{س^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{هـ^{ء}}{ط}$$

تذكر : $ط^{\circ} = ١٨٠^{\circ}$ ، $ط^{ء} = \frac{٢٢}{٧}$

قانون البعد بين نقطتين

$$أ ب = \sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^{٢} + (ص_٢ - ص_١)^{٢}}$$

ملحوظة

عند حل مسائل التطبيقات العملية التي تحتوي على الإنتاج والتكاليف والربح :

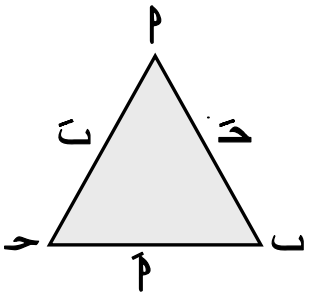
الربح= ثمن البيع – التكاليف ، ثمن البيع = عدد الأجهزة × ثمن بيع الجهاز الواحد

قانون (قاعدة) الجيب

$$\frac{أ}{جا أ} = \frac{ب}{جا ب} = \frac{حـ}{جا حـ}$$

قانون جيب التمام

$$أ^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} - ٢ ب حـ \text{ جتا } أ$$



ميل الخط المستقيم

(١) معلومة معادلته العامة : أ س + ب ص + حـ = ٠

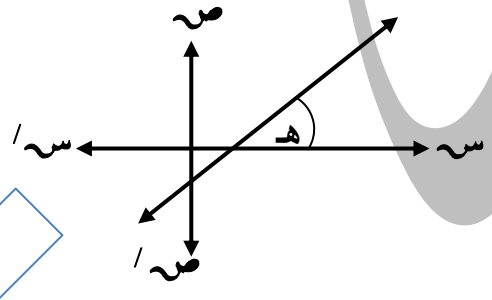
$$\text{ميله م} = \frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}} \Leftarrow \text{ميله م} = \frac{-أ}{ب}$$

(٢) ميل المستقيم المار بنقطتين:

$$\text{الميل م} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} \Leftarrow \text{الميل م} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

(٣) ميل المستقيم الذي يصنع زاوية قياسها هـ

مع الإتجاه الموجب لمحور السينات: الميل م = ظاهـ



ملاحظات هامة فى الهندسة المستوية

[١] تشابه مثلثين : يقال لمثلثين أنهما متشابهان إذا :

A.H.F.

- إذا تساوت (تطابقت) قياسات الزوايا المتناظرة فيهما.
- إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.
- إذا ساوى قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتين الزاويتين.

---

[٢] تطابق مثلثين : يتطابق المثلثان في إحدى الحالات التالية :

أبو علي

- إذا تساوي (تطابق) فيهما الأضلاع المتناظرة.
- إذا تساوي (تطابق) فيهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما.
- إذا تساوى (تطابق) فيهما زاويتان والضلع المرسوم بين رأسيهما.

---

[٣] النسبة بين (محيطي – مساحتي) مثلثين متشابهين : إذا كان $\Delta أ ب حـ \sim \Delta س ص ع$

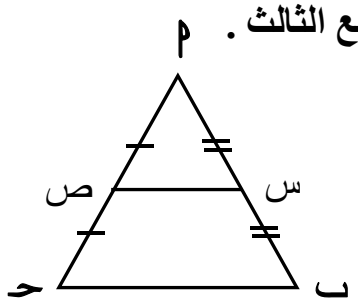
أبو محمد

$$\frac{\text{محيط } \Delta أ ب حـ}{\text{محيط } \Delta س ص ع} = \frac{أ ب}{س ص} = \frac{ب حـ}{ص ع} = \frac{أ حـ}{س ع}$$

$$\frac{\text{مساحة } \Delta أ ب حـ}{\text{مساحة } \Delta س ص ع} = \left(\frac{أ ب}{س ص}\right)^{٢} = \left(\frac{ب حـ}{ص ع}\right)^{٢} = \left(\frac{أ حـ}{س ع}\right)^{٢}$$

---

[٤] القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث . وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع الثالث.

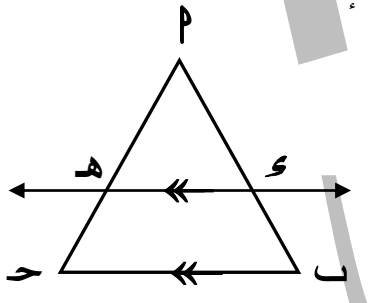


في $\Delta أ ب حـ$ س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ حـ}$

$\overline{س ص} \parallel \overline{ب حـ}$ ، $س ص = \frac{١}{٢} ب حـ$

---

[٥] إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة . (والعكس صحيح).



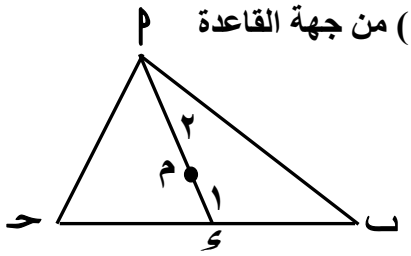
$\overline{ى هـ} \parallel \overline{ب حـ} \Leftrightarrow \frac{أ ى}{ى ب} = \frac{أ هـ}{هـ جـ}$ ، $\frac{أ ى}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ جـ} = \frac{ى هـ}{ب جـ}$

---

[٦] الشعاع المرسوم من منتصف ضلع في المثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث.

[٧] في أي مثلث يكون: مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث . **[متباينة المثلث]**

[٨] متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة تقسم كلاً منها بنسبة (١ : ٢) من جهة القاعدة أو بنسبة (٢ : ١) من جهة الرأس.

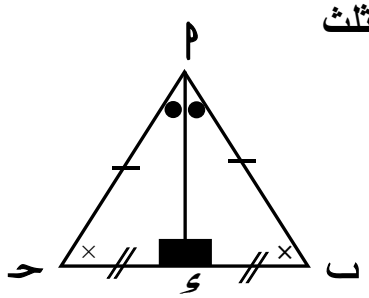


ففي الشكل المقابل : $\overline{أء}$ متوسط ،
م نقطة تلاقي المتوسطات

$$\frac{أ\,م}{م\,ء} = \frac{٢}{١}$$

---

[٩] متوسط المثلث المتساوي الساقين الخارج (المرسوم) من رأس المثلث ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة .

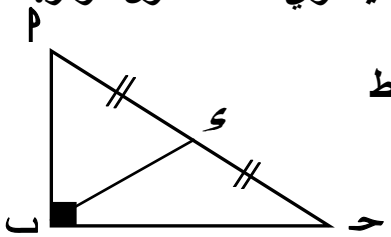


ففي الشكل المقابل : $\Delta أبحـ$ متساوي الساقين

$\overline{أء} \perp \overline{بحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ينصف $< بأحـ$

---

[١٠] متوسط المثلث القائم الزاوية الخارج (المرسوم) من رأس القائمة يساوي نصف طول الوتر.



ففي الشكل المقابل :

$\Delta أبحـ$ قائم الزاوية في ب ، $\overline{بء}$ متوسط

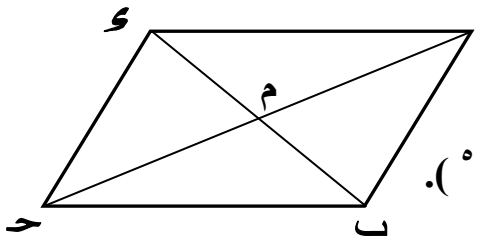
$$بء = \frac{١}{٢}\,أحـ \Leftarrow بء = \frac{١}{٢}\,أحـ = أء = ءحـ$$

---

[١١] إذا كان المثلث متساوي الأضلاع(تساوي أطوال الأضلاع – تساوي قياسات زواياه) فإن: إرتفاعات المثلث هي متوسطات المثلث هي منصفات زواياه الداخله .

---

[١٢] خواص متوازي الأضلاع : (مستطيل – معين – مربع)



- **كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين في الطول.**
- **كل زاويتان متقابلتان متساويتان في القياس.**
- **كل زاويتان متتاليتان متكاملتان (مجموع قياسهما = ١٨٠°).**
- **القطران ينصف كلاً منهما الآخر.**

المستطيل :

هومتوازي أضلاع

- **إحدى زواياه قائمة .**
- **القطران متساويان .**
- **القطران غير متعامدان .**
- **القطران ينصف كل منهما الآخر .**
- **القطران كل منهما لا ينصف زاويتا الرأس المرسوم بينهما.**

المعين :

هو متوازي أضلاع

- **تساوت أطوال أضلاعه .**
- **القطران غير متساويان .**
- **القطران متعامدان .**
- **القطران ينصف كل منهما الآخر .**
- **القطران كل منهما ينصف زاويتا الرأس المرسوم بينهما.**

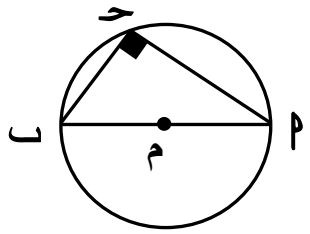
المربع :

هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان

هو معين إحدى زواياه قائمة

- **القطران متساويان .**
- **القطران متعامدان .**
- **القطران ينصف كل منهما الآخر .**
- **القطران كل منهما ينصف زاويتا الرأس المرسوم بينهما.**

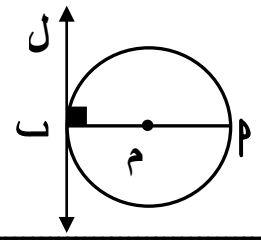
[١٣] الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة .



$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة ، $\hat{حـ}$ زاوية محيطية ∴ ق($\hat{حـ}$) = ٩٠°

---

[١٤] المماس لدائرة يكون عمودياً على القطر المرسوم من نقطة التماس .

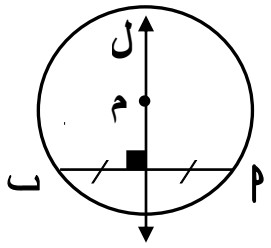


ففي الشكل المقابل :

ل مماس للدائرة عند ب ، $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة ∴ ل ⊥ $\overline{أ ب}$

---

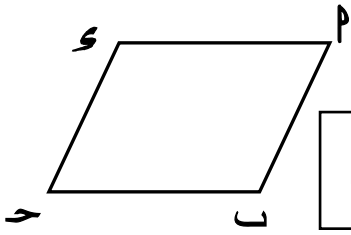
[١٥] نتائج مختصرة في الدائرة : إذا كان $\overline{أ ب}$ وتر في الدائرة م فإن :



- منصف الوتر + مار بالمركز ⟵ عمودي على الوتر
- منصف الوتر + عمودي على الوتر ⟵ مار بالمركز
- مار بالمركز + عمودي على الوتر ⟵ منصف الوتر

---

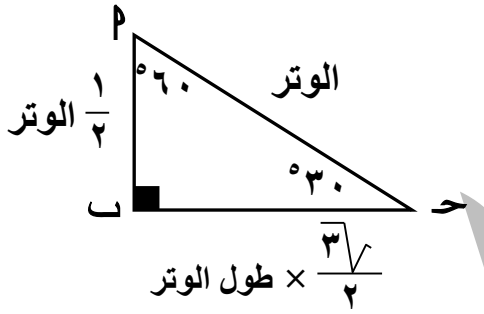
[١٦] في أي شكل رباعي إذا توازى ضلعان متقابلان فيه وتساويا في الطول كان هذا الشكل متوازي أضلاع .



$\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، أب = حـ ء ⟸ أبحـ ء متوازي أضلاع

---

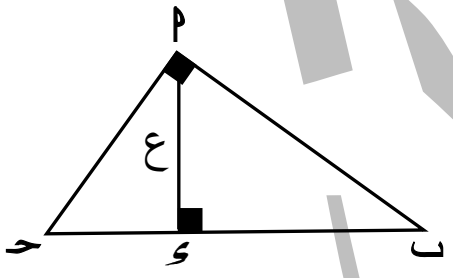
[١٧] في المثلث الثلاثيني الستيني:



- طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ الوتر
- طول الضلع المقابل للزاوية ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × طول الوتر

---

[١٨] نظرية (فيثاغورث + إقليدس) :



- $(ب حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (أ حـ)^{٢}$
- $(أ ب)^{٢}$ = ب ء × ب حـ
- $(أ حـ)^{٢}$ = حـ ء × ب حـ
- $(أ ء)^{٢}$ = ء ب × ء حـ
- أ ء × ب حـ = أ ب × أ حـ ⟸ الإرتفاع ع = أ ء = $\frac{أ ب \times أ حـ}{ب حـ}$

أبو محمد