جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
امتحان شهادة إتمام الدراسة الثانوية العامة لعام ٢٠١٣ م
[المرحلة الثانية – الدور الأول]

التفاضل والتكامل [رياضيات (٢)]
الزمن : ساعتان

(تنبيه مهم : الإجابات المتكررة عن أسئلة الاختيار من متعدد والصواب والخطأ لن تقدر ويتم تقدير الإجابة الأولى فقط)
يسمح باستخدام الآلة الحاسبة
[الأسئلة فى صفحتين]

أولا : أجب عن السؤال الآتى :

السؤال الأول : (تسع درجات)

(أ) أوجد كلا من :

(i) $\int \frac{(س^{٣} + ١)^{٢}}{(٣س + ١)^{٥}}$ د س

(ii) $\int$ (حا^{٢} ٣س + حتا^{٢} ٣س + طا^{٢} ٣س) د س

(ب) متى تكون الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = م ؟

(جـ) عين القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة للدالة د حيث :

د (س) = $\frac{س}{س^{٢} + ١}$ ، س ∈ [صفر ، ٢]

ثانيا : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يأتى :

السؤال الثانى : (سبع درجات)

(أ) إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} - م & ، \quad س \geq ٢ \\ ٣س + ب & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فأوجد قيمة كل من م ، ب .

(ب) إذا كان د$'$ (س) = ٦ س – ٤ عند أى نقطة على منحنى الدالة ص = د (س) وكان هذا المنحنى يمر بالنقطة (١ ، – ٥) وله قيمة صغرى محلية عند س = ٣ فأوجد معادلة هذا المنحنى والقيمة العظمى المحلية له .

[بقية الأسئلة فى الصفحة الثانية]

السؤال الثالث : (سبع درجات)

(أ) ارسم شكلا عاما لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٣} ـ ٣ س + ٢

(ب) إذا كان المماس للمنحنى ص = س^{٢} يمر بالنقطة (٣ ، ٥)

فأوجد معادلة هذا المماس .

السؤال الرابع : (سبع درجات)

(أ) إذا كان حا س = س ص فأثبت أن : س^{٢} (ص + ص$_{س}$) + ٢ حتا س = ٢ ص

(ب) أوجد النقط على منحنى الدالة د حيث : د (س) = $\frac{٦}{س^{٢} + ٣}$

والتى يكون ميل المماس عندها أصغر ما يمكن وأيضا النقط التى يكون ميل المماس عندها أكبر ما يمكن .

السؤال الخامس : (سبع درجات)

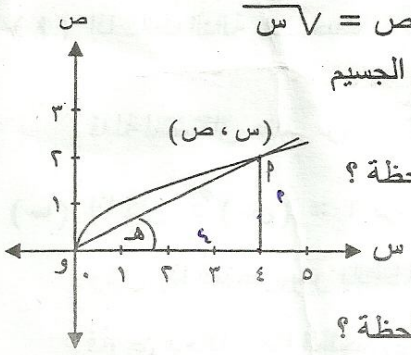
(أ) إذا كانت د دالة حيث : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{ط}\, ٣ س}{س} & \text{، عندما } س < \text{صفر} \\ ٢ + \text{حتا } س & \text{، عندما } س > \text{صفر} \end{cases}$

فأبحث وجود : نهـــــــــا د (س)
س ← صفر

(ب) فى الشكل المقابل :

يتحرك جسيم (س ، ص) على منحنى الدالة ص = $\sqrt{س}$

وعندما س = ٤ كان الاحداثى الصادى لموضع الجسيم يتزايد بمعدل ١ سم / ث .



i) ما هو معدل تغير الاحداثى السينى عند هذه اللحظة ؟

ii) ما هو معدل تغير المسافة بين نقطة الأصل والجسيم عند نفس اللحظة ؟

iii) ما هو معدل تغير زاوية الميل هـ عند نفس اللحظة ؟

الحل النموذجي لامتحان التفاضل والتكامل ٢٠١٣

[11] ① (أ) $\int \frac{س+1}{(3س+1)^5} \, د س = \frac{1}{3} \int (3س+2)(3س+1)^{-5} \, د س$

$= \frac{1}{3} \int ((3س+1)+2)(3س+1)^{-5} \, د س$

$= \frac{1}{3} \int (3س+1)^{-4} + 2(3س+1)^{-5} \, د س$

$= \frac{(3س+1)^{-3}}{-27} - \frac{(3س+1)^{-4}}{12} + ث$

(ii) $\int (ط^{3س} + ح^{3س} + ط^{3س}) \, د س$

$= \int (1 + ط^{3س}) \, د س = \int ح^{3س} \, د س$

$= \frac{1}{3} ط^{3س} + ث$

(ب) تكون الدالة ص = د(س) قابلة للاشتقاق عند س = p

إذا كانت p ∈ مجال الدالة ، $(\frac{د ص}{د س})$ لها وجود عند س = p

أي بفرض $\lim_{هـ \to 0} \frac{د(p+هـ) - د(p)}{هـ}$ لها وجود

وإذا كانت الدالة معرفة على يمين ويسار p

فإن الدالة تكون قابلة للاشتقاق عند س = p

إذا كانت $د'(p^+) = د'(p^-)$

أ. عبد الرحمن جمعه

(هـ) $د(س) = \frac{س}{س^2+1}$ ⇐ $د'(س) = \frac{س^2+1 - س \times 2س}{(س^2+1)^2}$

$د'(س) = 0$ ⇐ $-س^2+1 = 0$ ⇐ $س = \pm 1$

$-1 \notin [0,2]$ ، $1 \in [0,2]$

$د(0) = 0$ ، $د(1) = \frac{1}{2}$ ، $د(2) = \frac{2}{5}$

عظمى مطلقة — صغرى مطلقة

أ/ عبد الرحمن حمودة

[٢] (م) ∵ الدالة قابلة للاشتقاق عند $س = 2$

∴ الدالة متصلة عند $س = 2$ ⇐ $د(2^+) = د(2^-)$

∴ $4م + ب = 4 - م$ ⇐ $4م + ب = 4$

$د'(2^+) = د'(2^-)$ ⇐ $م = 4$ ⇐ $ب = -8$

(ب) $د'(س) = 6س - 4$

$د(س) = 3س^2 - 4س + ث_1$

$د'(س) = 0$ عندما $س = 3$

$0 = 27 - 12 + ث_1$ ⇐ $ث_1 = -15$

∴ $د'(س) = 3س^2 - 4س - 15$

$د(س) = س^3 - 2س^2 - 15س + ث_2$

$-5 = 1 - 2 - 15 + ث_2$

$ث_2 = 11$

$د(س) = س^3 - 2س^2 - 15س + 11$

$د'(س) = 0$ ⇐ $3س^2 - 4س - 15 = 0$

$(3س + 5)(س - 3) = 0$

$س = -\frac{5}{3}$ ، $س = 3$

	$-\frac{5}{3}$		3	
$د'(س)$	+	0	−	0	+
$د(س)$	↗	عظمى محلية	↘	صغرى محلية	↗

$د(-\frac{5}{3}) = -\frac{125}{27} - \frac{50}{9} + \frac{75}{3} + 11 = \frac{796}{27}$

∴ النقطة $(-\frac{5}{3}, \frac{796}{27})$ عظمى محلية

أ/ عبد الرحمن حمودة

٣ (أ) $د(س) = س^٣ - ٣س + ٢$

$د'(س) = ٣س^٢ - ٣$

$د''(س) = ٦س$

$د'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^٢ - ٣ = ٠$

$س = \pm ١$

	-١		١	
$د'(س)$	$+$	٠	$-$	٠	$+$
	ص.م		ع.م	

ص.م $(-١، ٤)$

ع.م $(١، ٠)$

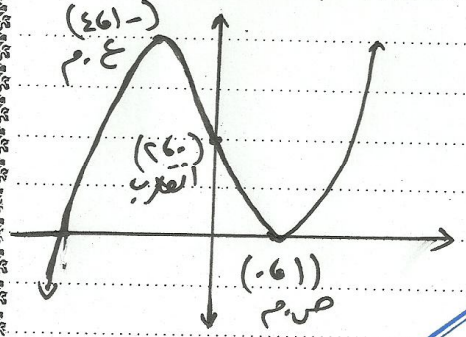
$د''(س) = ٠ \Leftarrow س = ٠$

		٠	
$د''(س)$	$-$	٠	$+$
		(٠، ٢)	
		انقلاب	

(٠، ٢) نقطة انقلاب

(-١، ٤) قيمة عظمى محلية

(٠، ١) صغرى محلية



أ/ عبدالرحمن حموده

(ب) $ص = س^٢$

نفرض نقطة التماس $(ع، ع^٢)$

$\frac{د ص}{د س} = ٢س$ عند $س = ع \Leftarrow$ الميل $= ٢ع$

$٢ع = \frac{ع^٢ - ٥}{ع - ٣} \Leftarrow ع^٢ - ٦ع + ٥ = ٠ \Leftarrow ع^٢ - ٥ = ٢ع^٢ - ٦ع$

$(ع - ١)(ع - ٥) = ٠ \Leftarrow ع = ١$ أو $ع = ٥$

نقطة التماس $(١، ١)$ و $(٢٥، ٥)$

أ/ عبدالرحمن حموده

معادلة المماس المار بالنقطة $(١، ١)$ و $(٥، ٣)$

$\frac{ص - ١}{س - ١} = \frac{٥ - ١}{٣ - ١} \Leftarrow$ ميل $= ٢ = \frac{ص - ١}{س - ١}$

$٢س - ص - ١ = ٠$

معادلة المماس المار بالنقطة $(٣، ٥)$ و $(٢٥، ٥)$

ميل $= \frac{ص - ٥}{س - ٣} = \frac{٥ - ٢٥}{٣ - ٥} \Leftarrow \frac{ص - ٥}{س - ٣} = \frac{-٢٠}{-٢} \Leftarrow س - ص - ٢٥ = ٠$

(٤) (أ) $ص = س ص$ بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$\therefore ص' = س ص' + ص$ ← (1)

بالاشتقاق مرة ثانية بالنسبة لـ س

$\therefore ص'' = س ص'' + ص' + ص'$ ⇐ $ص'' = س ص'' + 2ص'$ ← (2)

من (1) $ص' = \frac{ص - س ص}{س}$ بالتعويض في (2)

$\therefore ص'' = س ص'' + \frac{2ص - 2ص}{س}$ × س

$\therefore س ص'' = س^2 ص'' + 2ص - 2ص$

$\therefore - س^2 ص'' = س^2 ص'' + 2ص - 2ص$

$\therefore س^2 ص'' + س^2 ص + 2ص = 2ص$

$\therefore س^2 (ص + ص'') + 2ص = 2ص$

أ/ عبدالرحمن حموده

(ب) $د(س) = \frac{6}{س^2 + 3}$ ⇐ $د'(س) = \frac{-12س}{(س^2+3)^2}$ ميل المماس

$د''(س) = \frac{(س^2+3)^2 \times -12 + 12س \times 2(س^2+3) \times 2س}{(س^2+3)^4}$

أ/ عبدالرحمن حموده

$د''(س) = 0$ ⇐ $-12س^4 - 108 + 48س^4 + 72س^2 = 0$

$36س^4 + 72س^2 - 108 = 0$

$س^4 + 2س^2 - 3 = 0$ ⇐ $(س^2 - 1)(س^2 + 3) = 0$

$س = 1$ ، $س = -1$

$د(-1) = \frac{3}{2}$

$د(1) = \frac{3}{2}$

	-1		1	
	صغر		صغر	
$د''$	+	−	+	
$د'$	↗	↘	↗	
	ع.م		ص.م	

ميل المماس أصغر ما يمكن عند $(1 ، \frac{3}{2})$

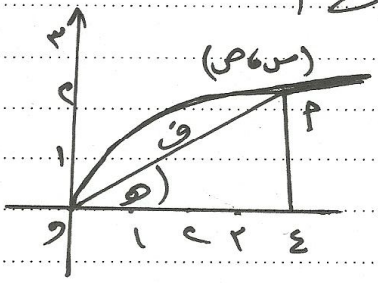
أكبر ما يمكن عند $(-1 ، \frac{3}{2})$

أ/ عبد الرحمن حموده

(٥) (أ) $د(٠) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{ظا ٣س}{س} = [٣]$

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} (٢ + جتا س) = ٢ + ١ = [٣]$

∴ توجد نهاية للدالة عند س = ٠ وقيمتها ٣



(ب) $ص = ٢\sqrt{س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ، $\frac{د ص}{د ف} = ١$

عند س = ٤ ⇐ ص = ٢

$\frac{د ص}{د ف} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \times \frac{د س}{د ف}$

$١ = \frac{١}{٤} \times \frac{د س}{د ف}$ ⇐ $\boxed{\frac{د س}{د ف} = ٤ \text{ سم/ث}}$ (i)

$ف = ٢س^٢ + ص^٢$ ⇐ $\frac{د ف}{د ف} = \frac{٤س \frac{د س}{د ف} + ٢ص \frac{د ص}{د ف}}{٢\sqrt{٢س^٢ + ص^٢}}$

$\frac{د ف}{د ف} = \frac{٨ \times ٤ + ٤}{٢\sqrt{١٦ + ٤}} = \frac{٣٦}{٢\sqrt{٢٠}} = \frac{١٨}{\sqrt{٢٠}} = \boxed{\frac{٩}{\sqrt{٥}} \text{ سم/ث}}$ (ii)

$ظا هـ = \frac{ص}{س}$

$\therefore ظا هـ \times \frac{د هـ}{د ف} = \frac{س \times \frac{د ص}{د ف} - ص \times \frac{د س}{د ف}}{س^٢}$

$\therefore \frac{٥}{٤} \times \frac{د هـ}{د ف} = \frac{٤ \times ١ - ٢ \times ٤}{١٦}$

$\frac{٥}{٤} \times \frac{د هـ}{د ف} = \frac{-٤}{١٦}$ ⇐ $\frac{د هـ}{د ف} = \frac{-١}{٥}$

مع أطيب تمنياتي وأرق تحياتي

وتراعى الحلول النموذجية

أ/ عبد الرحمن حموده

أ/ عبد الرحمن حموده