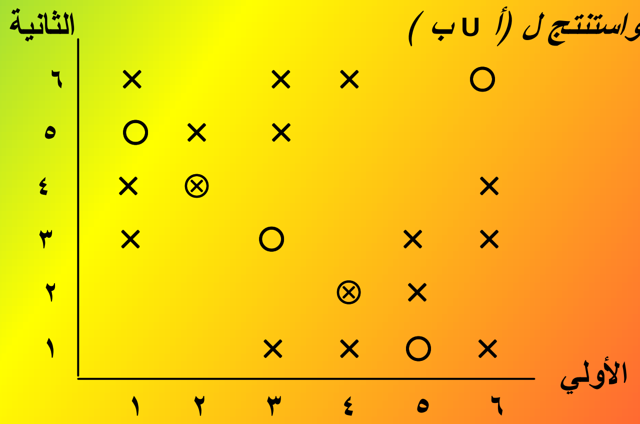
الحصة السابعة

سابعا : الشبكة البيانية

حالات استخدامها :

أولا : تجربة إلقاء حجري نرد مرقمين من ١ إلي ٦ مرة واحدة
= تجربة إلقاء حجر نرد مرقم من ١ إلي ٦ مرتين

(١) ألقى حجر نرد منتظم مرتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة . أوجد احتمال
" أ " أن يكون مجموع العددين قابلاً للقسمة على ٦
" ب " أن يكون الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً أولياً .
واستنتج ل (أ ∪ ب)



أولاً : ○ ⟵ أ مجموع العددين قابلاً للقسمة على ٦

أ ={ (١ ،٥) ، (٢ ،٤) ، (٣ ،٣) ، (٤ ،٢) ، (٥ ،١) ، (٦ ،٦) } ⇐ ل (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$

ثانياً : × ⟵ ب أن يكون الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً أولياً .

ب ={ (١ ،٣) ، (١ ،٤) ، (١ ،٦) ، (٢ ،٤) ، (٢ ،٥)،(٣ ،١)،(٣ ،٥)،(٣ ،٦)،(٤ ،١) ، (٤ ،٢)،(٤ ،٦)،(٥ ،٢)،(٥ ،٣) ، (٦ ،١) ، (٦ ،٣) ، (٦ ،٤)}

⇐ ل (ب) = $\frac{١٦}{٣٦}$

ل (أ ∩ ب) = ل { (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) } = $\frac{٢}{٣٦}$

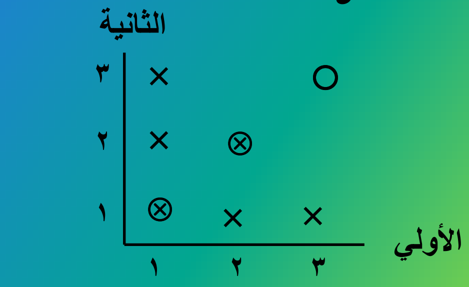
∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= $\frac{٦}{٣٦}$ + $\frac{١٦}{٣٦}$ − $\frac{٢}{٣٦}$ = $\frac{٢٠}{٣٦}$

ثانيا : تجربة سحب كرة من صندوقين (كرة من كل صندوق) كل منهما به عدد معين من الكرات مرقمة بأرقام معينة أو ملونة بألوان معينة .

(٢) صندوقان بكل منهما ٣ كرات مرقمة من ١ إلي ٣ سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق أحسب احتمال :
أولا : الكرتان تحملان نفس العدد .
ثانيا : الكرتان تحملان عددين مجموعهما ٤ علي الاكثر [مجموع العددين ≤ ٤]

الحل



أولاً : ○ ⟵ أ *الكرتان تحملان نفس العدد*

أ ={ (١ ،١) ، (٢ ،٢) ، (٣ ،٣)}

⇐ ل (أ) = $\frac{٣}{٩}$

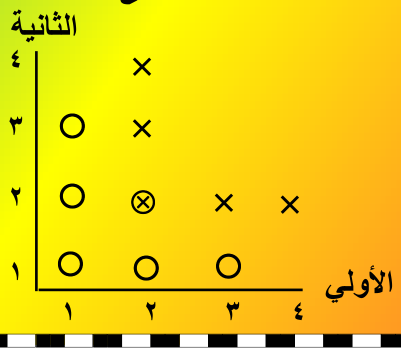
ثانياً : × ⟵ ب : *الكرتان تحملان عددين مجموعهما ٤ علي الاكثر [مجموع العددين ≤ ٤]*

ب ={(١ ،١) ، (١ ،٢) ، (١ ،٣) ، (٢ ،١) ، (٢ ،٢)،(٣ ،١)} ⇐ ل (ب) = $\frac{٦}{٩}$

ثالثا : تجربة سحب كرتان الواحدة بعد الاخري **مع الاحلال** من صندوق به عدد معين من الكرات مرقمة بأرقام معينة أو ملونة بألوان معينة

*المقصود بعبارة **مع الاحلال:***
هو إعادة الكرة المسحوبة أولا مرة أخري إلي الصندوق قبل السحبة الثانية وبذلك يصبح من الممكن سحب نفس الكرة للمرة الثانية .

(٣) صندوق به ٤ بطاقات مرقمة من ١ إلي٤ سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال . أوجد احتمال .
" أ " أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من ٥
" ب " أن يكون أحد العددين ٢ والمجموع أكبر من " ٣ "



○ ← أ = {(١ ، ١)،(١ ، ٢)،(١ ، ٣)، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١)} ⇐ ل (أ) = $\frac{٦}{١٦}$

× ← ب = { (٢ ، ٢)،(٢ ، ٣)، (٢ ، ٤)، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٢)} ⇐ ل (ب) = $\frac{٥}{١٦}$

رابعا : تجربة سحب كرتان الواحدة بعد الاخري **بدون إحلال:** من صندوق به عدد معين من الكرات مرقمة بأرقام معينة أو ملونة بألوان معينة **وفي هذه الحالة يتم إستبعاد الأزواج المرتبة المتساوية من الشبكة البيانية.**

المقصود بعبارة **بدون إحلال** هو عدم إعادة الكرة المسحوبة إلي الصندوق مرة ثانية وبذلك لن يكون هناك فرصة لسحب نفس الكرة للمرة الثانية .

(٤) صندوق به ٤ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٤ سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال

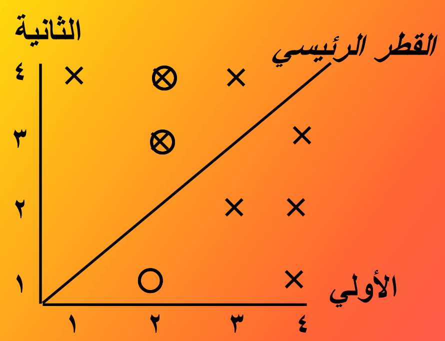
أولا : أكتب فضاء العينة.

ثانيا :أكتب بالسرد كلا من الحدثين أ ، ب حيث أ هوحدث ظهور العدد ٢ في الرمية الأولي .

، ب هو حدث مجموع العددين ٥ علي الأقل . [≥ ٥]

ثالثا : أوجد ل (بَ ∩ أ)َ

الحل



ف = {(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣)،(٢ ، ٤)، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) }

أولاً : ○ ←أ *هوحدث ظهور العدد ٢ في الرمية الأولي*

أ ={(٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤)}

⇐ ل (أ) = $\frac{٣}{١٢}$

ثانياً : × ← ب : *حدث مجموع العددين ٥ علي الأقل*

ب ={(١ ، ٤)،(٢ ، ٣)، (٢ ، ٤)، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣)}

⇐ ل (ب) = $\frac{٨}{١٢}$

ثالثا : ل (بَ ∩ أ)َ

١- ل (بَ ∩ أ) = ١- [ل (أ) - ل (أ ∩ ب)]

= ١ - [$\frac{٣}{١٢}$ - $\frac{٢}{١٢}$]

= ١- $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١١}{١٢}$

ملحوظة: إذا سحبت **الكرتان معا** فلا أهمية لترتيب الرقمين أو اللونين الظاهرين

فمثلا: الزوج المرتب (ح خ) هو (خ ح)

(٥) حقيبة بها ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات خضراء ، كرتان صفراء سحبت من الحقيبة كرتان معا ولوحظ لونها . اكتب فضاء النواتج ثم من الأحداث التالية:

(أ) الكرتان حمراوان . (ب) الكرتان خضراوان .

(جـ) أحداهما حمراء والاخري صفراء .

الحل

ف= {(ح ح) ، (ح خ)، (ح ص)، (خ خ) ، (خ ص) ، (ص ص) }

أ- الكرتان حمروان أ = { (ح ح)}

ب- الكرتان خضراوان ب = { (خ خ)}

ج- أحداهما حمراء والأخرى صفراء ج={(ح ص) }

ملحوظة: في حالة انقسام محور الشبكة البيانية إلي مجموعات جزئية متساوية من الممكن تمثيل عنصر واحد فقط من كل مجموعة علي محور الشبكة البيانية

(٦) صمم حجر نرد بحيث يكون وجهان فيه يحملان العدد " ١ " ووجهان يحملان العدد "٤" ووجهان يحملان العدد " ٥ " ألقى هذا الحجر مرتين

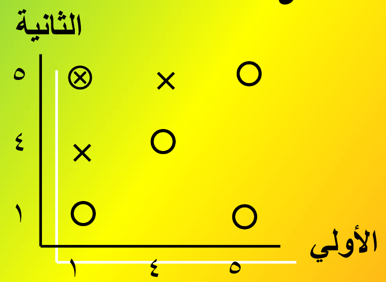
أولا: أكتب فضاء العينة

ثانيا أوجد احتمال:

أولا: أ هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً زوجيا.

ثانيا :ب هو حدث الحصول على عدد أكبر في الرمية الثانية من العدد الناتج من الرمية الأولى .

الحل



ف ={(١ ، ١) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥)، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

○ ← أ *هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً زوجيا.*

أ ={ (١، ١) ، (١، ٥) ، (٤ ، ٤)، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٥)} ⇦ ل(أ) = $\frac{٥}{٩}$

× ⟵ هو حدث الحصول على عدد أكبر في الرمية الثانية من العدد الناتج من الرمية الأولى .

ب = { (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٤ ، ٥) }

⇦ ل(ب) = $\frac{٣}{٩}$

---

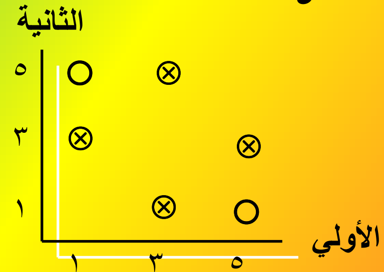
(٧) كيس به ٣٠ كرة.عشرة منها تحمل العدد ١ ، عشرة منها تحمل العدد ٣ ، العشرة الباقية تحمل العدد ٥ سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال .

احسب احتمال :

(أولاً) الكرتان تحملان عددين مختلفين.

(ثانياً) أن يكون مقياس الفرق بين العددين الظاهرين هو٢

الحل



○ ⟵ أ هو حدث الكرتان تحملان عددين مختلفين .

أ ={ (١، ٣) ، (١، ٥) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) } ⇦ ل(أ) = $\frac{٦}{٩}$

× ⟵ ب هو حدث أن يكون مقياس الفرق بين العددين الظاهرين هو٢

ب = {(١، ٣) ،(٣ ، ١) ، (٣ ، ٥) ،(٥ ، ٣)

⇦ ل(ب) = $\frac{٤}{٩}$

---

(٨) صندوق به ٥ بطاقات تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ وصندوق أخر به كرتان إحداهما حمراء والأخرى زرقاء سحب عشوائيا بطاقة من الصندوق الأول وكرة من الصندوق الثاني .

أولا : اكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

ثانيا : عين الحدث أ حيث أ هو أن تحمل البطاقة رقما أوليا وتكون الكرة زرقاء.

ثالثا : احسب احتمال وقوع الحدث أ .

الحل

أولا : فضاء العينة .

الصندوق الثاني

ز | (١، ز) (٢ ، ز) (٣، ز) (٤، ز) (٥،ز)

ح | (١،ح) (٢ ، ح) (٣ ،ح) (٤،ح) (٥،ح)

الصندوق الأول

١ ٢ ٣ ٤ ٥

ثانيا : الحدث أ = { (٢ ، ز) ، (٣ ، ز) ، (٥ ، ز) }

ثالثا : ل (أ) = $\frac{٣}{١٠}$

التمرين السابع

١– ألقى حجر نرد منتظم مرتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة . **أوجد احتمال**

" أ " أن يكون مجموع العددين قابلاً للقسمة على ٤

" ب " أن يكون الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً أولي

واستنتج ل (أ ∪ ب)

[١/٤ ، ٤/٩ ، ٢/٣]

٢– صندوقان بكل منهما ٤ كرات مرقمة من ١ إلي ٤ سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق **أحسب احتمال :**

أولا : الكرتان تحملان نفس العدد .

ثانيا : الكرتان تحملان عددين مجموعهما ٥ على الاكثر

[مجموع العددين ≤ ٥]

[١/٤ ، ٥/٨]

٣– صندوق به٣ بطاقات مرقمة من ١ إلى٣ سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال . **أوجد احتمال:**

" أ " أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من ٥

"ب " أن يكون أحد العددين ١ والمجموع أكبر من " ٣ "

[٣/٨ ، ١/٤]

٤– صندوق به٤ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٤ سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال

أولا : أكتب فضاء العينة.

ثانيا: أكتب بالسرد كلا من الحدثين أ ، ب

حيث أ موحدث ظهور العدد ٢ في الرمية الثانية .

، ب هو حدث مجموع العددين ٦ على الأقل . [≥ ٦]

ثالثا : أوجد ل (ب ∩ أ̄)

[١/٤ ، ١/٣ ، ٣/٤]

٥– حقيبة بها ٤ كرات بيضاء ، ٣ كرات زرقاء ، كرتان سوداوان سحبت من الحقيبة كرتان معا ولوحظ لونها . **اكتب فضاء النواتج ثم من الأحداث التالية:**

(أ) الكرتان بيضاوان . (ب) الكرتان زرقاوان .

(جـ) أحداهما بيضاء والاخرى سوداء .

[١/٦ ، ١/٦ ، ١/٦]

٦– صمم حجر نرد بحيث يكون وجهان فيه يحملان العدد " ١ " ووجهان يحملان العدد " ٣ " ووجهان يحملان العدد " ٦ " ألقى هذا الحجر مرتين.

أولا: أكتب فضاء العينة . ثانيا أوجد احتمال:

أولا: أ هو حدث أن يكون الفرق المطلق بين العددين مساوياً عدداً زوجيا.

ثانيا :ب هو حدث الحصول على عدد أصغر في الرمية الثانية من العدد الناتج من الرمية الأولى .

[٥/٩ ، ١/٣]

٧– كيس به ١٥ كرة.خمسة منها تحمل العدد ٢، خمسة منها تحمل العدد ٤ ، الخمسة الباقية تحمل العدد ٦ سحبت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال . **احسب احتمال :**

(أولاً) الكرتان تحملان عددين مختلفين.

(ثانياً) أن يكون مقياس الفرق بين العددين الظاهرين هو ٢

[٢/٣ ، ٤/٩]

٨- صندوق به ٥ بطاقات تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ وصندوق أخر به كرتان إحداهما سوداء والأخرى حمراء سحب عشوائيا بطاقة من الصندوق الأول وكرة من الصندوق الثاني .

أولا : اكتب فضاء العينة لهذه التجربة .

ثانيا : عين الحدث أ حيث أ هو أن تحمل البطاقة رقما أوليا وتكون الكرة حمراء.

ثالثا : احسب احتمال وقوع الحدث أ .

[٠,٣]

الفصل الثاني المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

الحصة الثامنة

المتغير العشوائي : هو متغير كمي يعبر عن (ف) في صورة مجموعة أرقام حقيقية (ح)

أنواع المتغير العشوائي

المتغير العشوائي المتقطع	المتغير العشوائي المتصل
يتكون مداه من مجموعة قابلة للعد **مثال :** س= { ٠، ١، ٢، ٣ }	يتكون مداه من فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية . **مثال :** ٠≤ س ≤ ٣ [فترة مغلقة] ٠< س < ٣ [فترة مفتوحة] ٠≤ س < ٣ [فترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة]

أولا: المتغير العشوائي المتقطع :

١- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

(١)في تجربة إلقاء قطعة النقود مرتين ليكن " س " هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن (عدد الصور - عدد الكتابات) . فاكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير س .

الحل

ف= {(ص،ص) ، (ص،ك) ، (ك،ص) ، (ك،ك)}

ف	س=عدد الصور - عدد الكتابات
(ص ، ص)	٢ - ٠ = ٢
(ص ، ك)	١ - ١ = ٠
(ك ، ص)	١ - ١ = ٠
(ك ، ك)	٠ - ٢ = -٢

مدى س = { -٢ ، ٠ ، ٢ }

التوزيع الاحتمالي :

$س_ر$	-٢	٠	٢	مجـ
د ($س_ر$)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	١

(٢) صندوق به ٣ كرات مرقمة من " ١ إلى ٣ " سحبت منه كرتان الواحدة بعد الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة أولاً قبل السحبة التالية(سحب مع الإحلال) وعرف المتغير العشوائي بأنه أكبر الرقمين المكتوبين على الكرتين المسحوبتين . أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير " س " .

الحل

الثانية

الثانية \ الأولى	١	٢	٣
٣	٣	٣	٣
٢	٢	٢	٣
١	١	٢	٣

الأولى

مدى " س " = { ١ ، ٢ ، ٣ }

س ر	١	٢	٣	مجـ
د (س ر)	١/٩	٣/٩	٥/٩	١

(٣) صندوقان أ ، ب بكل منهما أربع كرات مرقمة من ١ إلي ٤ فإذا سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق وكان المتغير العشوائي س يعبر عن " الرقم علي الكرة المسحوبة من الصندوق أ – الرقم علي الكرة المسحوبة من الصندوق ب "
أولا : أكتب مدي المتغير العشوائي س .
ثانيا : أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س .

ب \ أ	١	٢	٣	٤
٤	-٣	-٢	-١	٠
٣	-٢	-١	٠	١
٢	-١	٠	١	٢
١	٠	١	٢	٣

أولا : مدي س = { -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } .
ثانيا : يترك الحل للطالب .

٢ – حساب الوسط الحسابي (التوقع) – التباين – الانحراف المعياري – معامل الاختلاف المعياري

١ – نكون الجدول الآتي : –

١ ٢ ٣= ١ × ٢ ٤ = ١ × ٣

س ر	د (س ر)	س ر . د (س ر)	س ^{٢} ر. د (س ر)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
	مجـ د(س ر)	مجـ س ر .د (س ر)	مجـ س^{٢} ر . د (س ر)

٢ –نطبق في القوانين الآتية :–

الوسط الحسابي للمتغير العشوائي (التوقع)
• = مجـ س ر .د (س ر)

التباين •^{٢} = مجـ س^{٢} ر . د (س ر) – (•)^{٢}

الانحراف المعياري • = $\sqrt{\bullet^{٢}}$

معامل الاختلاف = الانحراف المعياري • × ١٠٠
الوسط الحسابي •

(٤) صندوقان بكل منهما ٣ كرات مرقمة من " ١ إلى ٣ " سحبت كرة عشوائياً من كل صندوق وعرف المتغير العشوائي بأنه الفرق المطلق (مقياس الفرق) بين العددين الظاهرين – فاكتب التوزيع الاحتمالي ثم أوجد معامل الاختلاف.

الثانية

الثانية \ الأولى	١	٢	٣
٣	٢	١	٠
٢	١	٠	١
١	٠	١	٢

الأولى

مدى " س " = { ٠ ، ١ ، ٢ }

س ر	٠	١	٢	مجـ
د (س ر)	٣/٩	٤/٩	٢/٩	١

س ر	د (س ر)	س ر . د (س ر)	س ^{٢} .د (س ر)
٠	٣/٩	٠	٠
١	٤/٩	٤/٩	٤/٩
٢	٢/٩	٤/٩	٨/٩
مجـ	١	٨/٩	١٢/٩

الوسط الحسابي(التوقع) • =مجـ س. د(س)= ٨/٩

التباين •^{٢} = مجـ س^{٢} ر. د (س ر)– (•)^{٢}

= ١٢/٩ – ٦٤/٨١ = ٤٤/٨١

الانحراف المعياري = $\sqrt{\bullet^{٢}}$ = $\sqrt{٤٤/٨١}$ = ٠,٧٣٧٠٢

معامل الاختلاف = •/• × ١٠٠

= (٠,٧٣ × ٩ × ١٠٠) / ٨ = ٨٢,٩١ ٪

(٥)كيس به ٦ بطاقات منها بطاقتان تحملان العدد ٢ وثلاث بطاقات تحمل العدد ٤ وبطاقة تحمل العدد ٦ فإذا سحبت بطاقة عشوائية وعرف المتغير العشوائي س بأنه العدد الظاهر علي البطاقة المسحوبة أوجد :

أ-التوزيع الاحتمالي للمتغير س.

ب-الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير س

الحل

مدي س = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

أ- التوزيع الاحتمالي :

$س_ر$	٢	٤	٦
د ($س_ر$)	$\frac{٢}{٦}$	$\frac{٣}{٦}$	$\frac{١}{٦}$

ب- يترك الحل للطالب .

التمرين الثامن

١- في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات إذا كان س هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن " عدد ظهور الصور الظاهرة "

صف هذا المتغير العشوائي وأوجد توزيعه الاحتمالي .

٢-في تجربة إلقاء قطعة نقود ٣ مرات إذا كان س هو المتغير العشوائي الذي يعبر عن (عدد الكتابات – عدد الصور)

– احسب الوسط الحسابي للمتغير العشوائي س .

[٣]

٣-في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين إذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن أكبر العددين الظاهرين

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير س

[٣٦/١٦١ ، ١,٤٠٤٠٨]

٤-صندوق به ٥ كرات مرقمة من ١ إلي ٥ سحبت من كرتان الواحدة بعد الأخرى مع أعادة الكرة المسحوبة أولا قبل السحبة التالية وعرف المتغير العشوائي بأنه أصغر العددين الظاهرين . **احسب التوقع والانحراف المعيارى للمتغير العشوائي س .**

[٥/١١ ، ١,١٦٦١٩]

٥-صندوقان كل منهما به ٣كرات مرقمة من ١ إلي ٣ سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق وعرف المتغير العشوائي بأنه مجموع العددين الظاهرين – **أوجد التوزيع الاحتمالي والتوقع للمتغير العشوائي س .**

[٤]

٦-في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين إذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن مقياس الفرق بين العددين الظاهرين – **أوجد التوزيع الاحتمالي والتباين للمتغير العشوائي س .**

[٢,٠٥٢٤٧]

٧- صندوقان أ ، ب بكل منهما ثلاث كرات مرقمة من ١ إلي ٣ فإذا سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق وكان المتغير العشوائي س يعبر عن " الرقم علي الكرة المسحوبة من الصندوق أ – الرقم علي الكرة المسحوبة من الصندوق ب "

أولا : أكتب مدي المتغير العشوائي س .

ثانيا : أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س .

٨-صندوقان بكل منهما ثلاثة كرات مرقمة من ١ إلي ٣ سحبت كرة عشوائيا من كل صندوق وعرف المتغير العشوائي س بأنه حاصل ضرب العددين الموجودين علي الكرتين المسحوبتين **أوجد: التوزيع الاحتمالي ومعامل الاختلاف للمتغير العشوائي س .**

[٠/٠ ٦٠,٠٩٢٥٢]

٩–كيس به ٦ بطاقات منها بطاقتان تحملان العدد ١ وثلاث بطاقات تحمل العدد ٣ وبطاقة تحمل العدد ٥ فإذا سحبت بطاقة عشوائية وعرف المتغير العشوائي (س) بأنه العدد الظاهر علي البطاقة المسحوبة **أوجد :**

أ–التوزيع الاحتمالي للمتغير س.

ب–الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير س

[٣/٨ ، ١,٣٧٤٣٦]

الحصة التاسعة

مجـ د (س ر) = ١

تستخدم هذه الخاصية في إيجاد د (س) مجهولة أو أكثر

(١) إذا كان " س " متغيرا عشوائيا مداه { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وكان ل (س = ٠) = ل (س= ٤) = ١/١٦
ل (س= ١) = ل (س= ٣) = ١/٤

أوجد :

أولاً : ل (س= ٢) ،التوزيع الاحتمالي لــ س

ثانياً : معامل الاختلاف .

الحل

س ر	٠	١	٢	٣	٤
د(س ر)	١/١٦	١/٤	أ	١/٤	١/١٦

أولاً : إيجاد " أ " : مجـ د (س ر) = ١

د (٠) + د (١) + د (٢) + د (٣) + د (٤) = ١

١/١٦ + ١/٤ + أ + ١/٤ + ١/١٦ = ١

أ + ٥/٨ = ١ ⇐ أ = ١ − ٥/٨ = ٣/٨

∴ د (٢) = ل (س = ٢) = ٣/٨

س ر	٠	١	٢	٣	٤	مجـ
د(س ر)	١/١٦	١/٤	٣/٨	١/٤	١/١٦	١

ثانياً : معامل الاختلاف (متروك الحل للطالب)

(٢) إذا كان " س " متغيرا عشوائيا متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي كالآتي :

س ر	−٤	−٣	٣	٤
د (س ر)	م	م^٢	٢م^٢	م

أوجد : أولاً : قيمة " م " ، التوزيع الاحتمالي .

ثانياً : الوسط الحسابي والتباين للمتغير " س "

الحل

أولاً : قيمة " م " :

مجـ د (س) = ١

د (−٤) + د (−٣) + د (٣) + د (٤) = ١

م + م^٢ + ٢ م^٢ + م = ١

٣ م^٢ + ٢ م − ١ = ٠

(٣ م − ١) (م + ١) = ٠

٣ م = ١ أو م = −١ مرفوض حيث أن الاحتمالات موجبة

⇐ م = ١/٣

إيجاد التوزيع الاحتمالي :

د(−٤) = م = $\frac{١}{٣}$

د (−٣) = م^{٢} = $(\frac{١}{٣})^{٢}$ = $\frac{١}{٩}$

، د (٣) = ٢م^{٢} = ٢ × $\frac{١}{٩}$ = $\frac{٢}{٩}$

، د (٤) = م = $\frac{١}{٣}$

التوزيع الاحتمالي :

س ر	−٤	−٣	٣	٤	مجـ
د (س ر)	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{٢}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١

ثانياً : إيجاد الوسط الحسابي والتباين للمتغير " س "
(متروك الحل للطالب)

(3) " س " متغيرا عشوائيا متقطعا يتحدد توزيعه الاحتمالي بالدالة د(س)= $\frac{أ س}{٩}$ حيث س = ١، ٢، ٣
أوجد أولاً : قيمة " أ " ، التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي . ثانياً : معامل الاختلاف .

الحل

د(س) = $\frac{أ س}{٩}$ ∴ د (١) = $\frac{أ}{٩}$

، د (٢) = $\frac{٢ أ}{٩}$ ، د (٣) = $\frac{٣ أ}{٩}$

إيجاد قيمة " أ "

مجـ د (س) = ١

د (١) + د (٢) + د (٣) = ١

$\frac{أ}{٩}$ + $\frac{٢ أ}{٩}$ + $\frac{٣ أ}{٩}$ = ١

⇐ $\frac{٦ أ}{٩}$ = ١ بضرب الطرفين في الوسطين

٦ أ = ٩ ⇐ أ = $\frac{٩}{٦}$

إيجاد التوزيع الاحتمالي :

د (١) = $\frac{أ}{٩}$ = $\frac{٩}{٦×٩}$ = $\frac{١}{٦}$

د (٢) = $\frac{٢ أ}{٩}$ = $\frac{٢ × ٩}{٦ × ٩}$ = $\frac{٢}{٦}$

د (٣) = $\frac{٣ أ}{٩}$ = $\frac{٣ × ٩}{٦ × ٩}$ = $\frac{٣}{٦}$

ثم يستكمل الحل ....

(٤) إذا كان (س) متغير عشوائيا متقطعاً مداه {−٢ ، −١ ، م ، ٢} وكان د (س) = $\frac{٤+س}{١٥}$
أوجد قيمة (م) ثم أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .

الحل

د (س) = $\frac{٤+س}{١٥}$ ∴ د(−٢) = $\frac{٤-٢}{١٥}$ = $\frac{٢}{١٥}$

، د (−١) = $\frac{٤-١}{١٥}$ = $\frac{٣}{١٥}$

، د (م) = $\frac{٤+م}{١٥}$ ، د (٢) = $\frac{٤+٢}{١٥}$ = $\frac{٦}{١٥}$

أولاً : إيجاد قيمة (م) مجـ د (س) = ١

د (−٢) + د (−١) + د (م) + د (٢) =١

$\frac{٢}{١٥}$ + $\frac{٣}{١٥}$ + $\frac{٤+م}{١٥}$ + $\frac{٦}{١٥}$ = ١

$\frac{١٥+م}{١٥}$ = ١ بضرب الطرفين فى الوسطين

⇐ ١٥ + م = ١٥ ⇐ م = ١٥ − ١٥ = ٠ ⇐ م=٠

إيجاد التوزيع الاحتمالي :

د (−٢) = $\frac{٢}{١٥}$ ، د (−١) = $\frac{٣}{١٥}$

د(م) = $\frac{٤+٠}{١٥}$ = $\frac{٤}{١٥}$ ، د (٢) = $\frac{٦}{١٥}$

التوزيع الاحتمالي:

س ر	−٢	−١	٠	٢	مجـ
د(س ر)	$\frac{٢}{١٥}$	$\frac{٣}{١٥}$	$\frac{٤}{١٥}$	$\frac{٦}{١٥}$	١

(٥) إذا كان (س) متغيرا عشوائيا متقطعا مداه {٢ ،٣، ٤، ٥} وكان ل (س = ر) = $\frac{أ}{ر - ١}$ لكل " ر " تنتمي إلى مدى " س "

أولاً : أوجد قيمة (أ) ثم أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .

ثانياً : ل (س > ٣) . ثالثا:(س=٣ علي الاقل)[ل (س≥ ٣)]

رابعا : (س=٣ علي الأكثر):[ل (س≤ ٣)]

خامسا ل (٣ ≤ س < ٥) . سادسا: ل(س = ٣و ٤)

سابعا : ل (س = ٣ أو ٤). ثامنا: ل(س < ٥) .

تاسعا : ل (س ≠ ٣) .

الحل

د (س) = $\frac{أ}{ر - ١}$ ∴ د (٢) = $\frac{أ}{٢ - ١}$ = أ

د(٣) = $\frac{أ}{٣ - ١}$ = $\frac{أ}{٢}$ ، د (٤) = $\frac{أ}{٤ - ١}$ = $\frac{أ}{٣}$

، د (٥) = $\frac{أ}{٥ - ١}$ = $\frac{أ}{٤}$

أولاً : إيجاد قيمة (أ)   مجـ د (س) = ١

د (٢) + د (٣) + د (٤) + د (٥) = ١

$أ + \frac{أ}{٢} + \frac{أ}{٣} + \frac{أ}{٤} = ١$

⇐ $\frac{١٢أ + ٦أ + ٤أ + ٣أ}{١٢} = ١$

$\frac{٢٥أ}{١٢} = ١$ بضرب الطرفين في الوسطين

٢٥ أ = ١٢ ⇐ $أ = \frac{١٢}{٢٥}$

$د (٢) = أ = \frac{١٢}{٢٥}$

، $د (٣) = \frac{أ}{٢} = \frac{١٢}{٢٥ \times ٢} = \frac{٦}{٢٥}$

، $د (٤) = \frac{أ}{٣} = \frac{١٢}{٢٥ \times ٣} = \frac{٤}{٢٥}$

، $د (٥) = \frac{أ}{٤} = \frac{١٢}{٢٥ \times ٤} = \frac{٣}{٢٥}$

التوزيع الاحتمالي :

س ر	٢	٣	٤	٥	مجـ
د(س ر)	$\frac{١٢}{٢٥}$	$\frac{٦}{٢٥}$	$\frac{٤}{٢٥}$	$\frac{٣}{٢٥}$	١

ثانياً : ل (س > ٣) = $\frac{١٢}{٢٥}$

ثالثا: ل (س ≤ ٣) = $\frac{٦}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥} + \frac{٣}{٢٥} = \frac{١٣}{٢٥}$

رابعا : ل (س ≥ ٣) = $\frac{٦}{٢٥} + \frac{١٢}{٢٥} = \frac{١٨}{٢٥}$

خامسا : ل (٣ ≤ س > ٥) = $\frac{٦}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥} = \frac{١٠}{٢٥}$

سادسا : ل (س = ٣و٤) = ل (٣ ∩ ٤) = صفر

سابعا : ل (س = ٣ أو ٤) = ل (٣ ∪ ٤) = $\frac{٦}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥}$ − صفر = $\frac{١٠}{٢٥}$

ثامنا: ل (س < ٥) = صفر

تاسعا : ل (س ≠ ٣) = ل (٢) + ل(٤) + ل(٥) = $\frac{١٢}{٢٥} + \frac{٤}{٢٥} + \frac{٣}{٢٥} = \frac{١٩}{٢٥}$

(٦) الجدول الآتي يبين التوزيع الإحتمالي لعدد رحلات الطيران التي تحدث في أي يوم من أيام العمل في إحدى شركات الطيران

عدد الرحلات س ر	٠	١	٢	٣	٤
احتمال حدوثها د(س ر)	أ	٠,٢٤	٠,٣٢	٠,٢٣	ب

فإذا علمت أن إحتمال حدوث رحلتان على الأقل في أي يوم من ايام العمل هو ٠,٦ فأوجد :

i – قيمة أ ، ب .

ii – إحتمال أن يكون عدد الرحلات اليومية للشركة هو رحلة واحدة على الأكثر

iii – متوسط عدد الرحلات اليومية مقربة لآقرب عدد صحيح موجب .

الحل

أولا : إيجاد قيمة ب .

ل (س ≤ ٢) = ٠,٦

د (٢) + د (٣) + د (٤) = ٠,٦

٠,٣٢ + ٠,٢٣ + ب = ٠,٦

٠,٥٥ + ب = ٠,٦

⇐ ب = ٠,٦ − ٠,٥٥ = ٠,٠٥

ثانيا : إيجاد قيمة أ

مجـ د (س) = ١

د (٠) + د (١) + د (٢) + د (٣) + د(٤) = ١

أ + ٠,٢٤ + ٠,٣٢ + ٠,٢٣ + ٠,٠٥ = ١

أ + ٠,٨٤ = ١

⇐ أ = ١ − ٠,٨٤ = ٠,١٦

عدد الرحلات س ر	٠	١	٢	٣	٤
احتمال حدوثها د(س ر)	٠,١٦	٠,٢٤	٠,٣٢	٠,٢٣	٠,٠٥

ثالثا: احتمال أن يكون عدد الرحلات اليومية للشركة هو رحلة واحدة على الأكثر

ل (س ≥١) = د (٠) + د (١) = ٠,١٦ + ٠,٢٤ = ٠,٤

رابعا : متوسط عدد الرحلات اليومية مقربة لآقرب عدد صحيح موجب .

• = مجـ س ر . د(س ر)

= ٠× ٠,١٦ + ١× ٠,٢٤ + ٢ × ٠,٣٢

+٣× ٠,٢٣ + ٤ × ٠,٠٥ = ١,٧٧ ≃ ٢ رحلة سنويا

(٧) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً ووسطه الحسابي

• = $\frac{٣}{٢}$ وتوزيعه الاحتمالي يعطى بالجدول

س ر	−٢	١	ك	٤
د(س ر)	م	٢ م	$\frac{١}{٢}$	م

أوجد قيمة ك ، م ثم احسب الانحراف المعياري للمتغير س

الحل

أولا إيجاد قيمة م

∴ مجـ د (س) = ١

م + ٢ م + $\frac{١}{٢}$ + (م) = ١

٤ م + $\frac{١}{٢}$ = ١

٤ م = ١ − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

⇐ م = $\frac{١}{٢ \times ٤}$ = $\frac{١}{٨}$ ، ٢ م = $\frac{٢}{٨}$

ثانياً : إيجاد (ك).

$س_ر$	٢−	١	ك	٤
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٢}{٨}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٨}$

الوسط الحسابي (التوقع) • = مجـ $س_ر$. $د(س_ر)$

−٢ × $\frac{١}{٨}$ + ١ × $\frac{٢}{٨}$ + ك × $\frac{١}{٢}$ + ٤ × $\frac{١}{٨}$ = $\frac{٣}{٢}$

$\frac{ك}{٢}$ + $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{٣}{٢}$

⇐ $\frac{ك}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ − $\frac{٤}{٨}$ = ١ ⇐ $\frac{ك}{٢}$ = ١ ⇐ ك = ٢

ثم يستكمل الحل

(٨) س متغير عشوائي متقطع ل (س = ٠) = ل (س = ٢) = ٢أ، ل (س = ١) = ١ − ٤أ

حيث ٠ < أ < $\frac{١}{٤}$

أوجد : أولاً: اثبت أن هذه الاحتمالات تحدد توزيعا احتماليا للمتغير س .

ثانياً: أحسب الوسط الحسابي والتباين للمتغير س .

ثالثا : أوجد قيمة أ التي تجعل تباين المتغير س يساوي $\frac{١}{٢}$

الحل

$س_ر$	٠	١	٢
$د(س_ر)$	٢أ	١ − ٤أ	٢أ

أولا : مجـ د (س) = ٢أ + ١ − ٤أ + ٢أ = ١

∴ الاحتمالات تحدد توزيعا احتماليا للمتغير س

ثانيا :

$س_ر$	$د (س_ر)$	$س_ر . د (س_ر)$	$س_ر^٢ . د(س_ر)$
٠	٢أ	٠	٠
١	١ − ٤أ	١ − ٤أ	١ − ٤أ
٢	٢أ	٤أ	٨أ
مجـ	١	١	١ + ٤أ

الوسط الحسابي (التوقع) • = مجـ $س_ر د(س)$ = ١

التباين $•^٢$ = مجـ $س^٢$. د (س) − $(•)^٢$

= ١ + ٤أ − ١ = ٤أ

ثالثا : إيجاد قيمة أ

التباين $•^٢$ = ٤أ

$\frac{١}{٢}$ = ٤أ ⇐ أ = $\frac{١}{٢ \times ٤}$ = $\frac{١}{٨}$

(٩) إذا كان الوسط الحسابي لمتغير ما ١٢٠ ، كان معامـل الاختلاف له يساوى ٤٥ ٪ فأوجد تباين المتغير .

الحل

معامل الاختلاف = $\frac{•}{•}$ × ١٠٠

⇐ ٤٥ = $\frac{• \times ١٠٠}{١٢٠}$ بضرب الطرفين في الوسطين

١٢٠ × ٤٥ = ١٠٠ • ⇐ ٥٤٠٠ = ١٠٠•

⇐ • = $\frac{٥٤٠٠}{١٠٠}$ = ٥٤ ⇐ التباين $•^٢$ = ٢٩١٦

التمرين التاسع

١- إذا كان " س " متغيرا عشوائيا مداه { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وكان ل (س = ٠) = ل (س= ٤) = ١/٨

ل (س= ١) = ل (س= ٣) = ١/٤

أوجد : أولاً : ل (س= ٢) ،التوزيع الاحتمالي لــ س

ثانياً : معامل الاختلاف للمتغير س .

[١/٤ ، ٦١,٢٣٧٢٤ ٠/٠]

٢- إذا كان س متغيرا عشوائيا مداه { -٥ ، -٤ ، ٢،١}

وكان ل (س = -٥) = ٢ك ، ل(س= -٤)

ل(س= ٢) = ك ، ل (س = ١) = ٤ك

فأوجد: أولا : قيمة ك ثانيا : احسب التوقع للمتغير س

[-١]

٣- إذا كان " س " متغيرا عشوائيا متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي كالآتي :

س ر	-٤	-٣	٣	٤
د (س ر)	٠,١٥	٠,٢٥	٠,٢٥	٥م

أوجد : أولاً : قيمة " م " ، التوزيع الاحتمالي .

ثانياً : الوسط الحسابي والتباين للمتغير " س

[٠,٠٧ ، ٠,٨ ، ١١,٨٦]

٤- إذا كان " س " متغيرا عشوائيا متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي كالآتي :

س ر	-٣	-١	٠	١
د(س ر)	ح	ح	٢ح	ح

أوجد : أولاً : قيمة "ح" ، التوزيع الاحتمالي .

ثانيا :تباين المتغير س .

[١/٣ ، ٢,٨٣٩٥١]

٥- إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعاً وتوزيعه الاحتمالي كالآتي :

س ر	٠	١	٢	٣
د (س ر)	م	٣م	م	٢م

أوجد : أولاً : قيمة م ، التوزيع الاحتمالي .

ثانياً : الوسط الحسابي والتباين للمتغير س .

[١/٤ ، ٢٩/١٦ ، ١,٦٥٢٣٤]

٦- إذا كان س متغيرا عشوائيا متقطعا

مداه { ١ ، ٣، ٧,٥} وكان د (س) = (ك + س)/٢٠

أوجد قيمة (ك) ثم أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .والتباين.

[١ ، ٤]

٧- إذا كان (س) متغير عشوائيا متقطعا

مداه{ -٣، ٠، ٤، ٥} وكان ل(س= -٣) = (أ-٢)/١٦

، ل (س = ٠) = أ/١٦ ، ل (س = ٤) = (أ+٤)/١٦

، ل (س = ٥) = (أ+٥)/١٦ أوجد:

أولا : قيمة (أ) ثم أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) . ثانيا : الوسط الحسابي للمتغير س

[٩/٤ ، ١٢١/٣٢]

٨-إذا كان (س) متغيرا عشوائيا متقطعا

مداه {-١ ، م ، ٦،٣} وكان د (س) = (٢ + س)/١٧

أوجد قيمة (م) ثم أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .ومعامل الاختلاف

[١ ، ٥٩,٦٦٣٧٥ ٠/٠]

٩- إذا كان (س) متغيرا عشوائيا متقطعا

مداه{ ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } وكان ل (س = ر) = أ/(ر - ٢)

لكل " ر " تنتمي إلى مدى " س " **أوجد قيمة (أ) ثم أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) .**

ثانياً : ل (س > ٤) . ثالثا:(س= ٤ علي الاقل)[ل (س≤ ٤)]

رابعا : (س= ٤ علي الأكثر):[ل (س≥ ٤)]

خامسا ل (٣ ≥ س > ٥). سادسا :ل (س = ٣و٤)

سابعا : ل (س = ٣ أو٤). ثامنا :ل (س > ٦) .

تاسعا : ل (س ≠ ٤) .

[٢٥/١٢ ، ٢٥/١٢ ، ٢٥/١٣، /٢٥/١٨ ، ٢٥/١٨ ، صفر ، ٢٥/١٨ ، صفر ، ٢٥/١٩]

١٠- الجدول الأتي يبين التوزيع الإحتمالي لعدد الرحلات السنوية لمجموعة مكونة من ١٥٠ أسرة بإحدي المدن

عدد الرحلات س ر	٢	٤	٦	٨	١٠
احتمال حدوثها د(س ر)	أ	٠,١٥	٠,١٨	٠,٣	ب

فإذا علمت أن إحتمال حدوث أربع رحلات علي الأكثر في السنة ٠,٢ **فأوجد :**

i – قيمة أ ، ب .

ii – أحتمال أن يكون عدد الرحلات السنوية للريف هو ٦ رحلات علي الاقل .

iii – متوسط عدد الرحلات السنوية مقربة لآقرب عدد صحيح موجب .

[٠,٠٥ ، ٠,٣٢ ، ٠,٨، ٧ رحلات]

١١-إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً ووسطه الحسابي

- = ٣ وتوزيعه الاحتمالي يعطى بالجدول

س ر	٠	٢	ك	٤
د(س ر)	م	٢ م	$\frac{١}{٣}$	٥م

أوجد قيمة ك ، م ثم احسب الانحراف المعياري

[٣ ، ١٢/١ ، ١,١٥٤٧]

١٢- س متغير عشوائي متقطع ل (س = ٠) = ل (س= ٢) =٣أ، ، ل (س= ١) = ١-٦أ حيث ٠< أ < $\frac{١}{٦}$

أولاً :اثبت أن هذه الاحتمالات تحدد توزيعا احتماليا للمتغير س .

ثانياً :أحسب الوسط الحسابي والتباين للمتغير س .

ثالثا : أوجد قيمة أ التي تجعل تباين المتغير س يساوي $\frac{١}{٤}$

[١ ، ٦أ ، ٢٤/١]

١٣- إذا كان الوسط الحسابي لمتغير ما ٤٠ ، كان معامل الاختلاف له يساوى ١٥ ٠/٠ **فأوجد الإنحراف المعياري**

[٦]

ثانيا: المتغير العشوائي المتصل

الحصة العاشرة

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل : يتحدد من خلال دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي س

تعريف دالة الكثافة : هي الدالة التي يتحدد من خلالها احتمالات المتغير العشوائي المتصل .

ل(أ ≤ س ≤ ب) = مساحة المنطقة تحت منحنى د فوق محور السينات من الفترة من أ إلي ب

خواص دالة الكثافة

أولا : الدالة الثنائية

١- منحنى الدالة يقع فوق محور السينات

٢- مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة وفوق محور السينات = ١

٣- ل(أ ≤ س ≤ ب) = ل(أ ≤ س < ب) = ل(أ < س ≤ ب) = ل(أ < س < ب)

أي ليس هناك فرق بين ≤ ، < لان الفرق هو قطعة مستقيمة والقطعة المستقيمة مساحتها مهملة أي أنها تساوي الصفر .

---

١ – إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي :

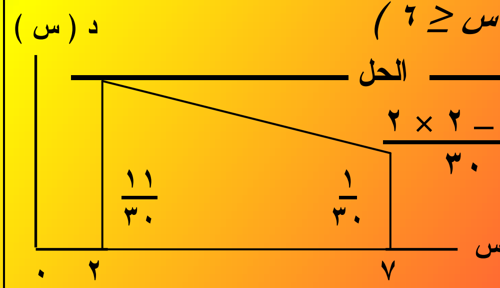
د (س) = { (١٥ – ٢ س) / ٣٠ ، ٢ ≤ س < ٧ ؛ صفر فيما عدا ذلك }

أولاً: اثبت أن د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائي س

[اثبت أن مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى دالة الكثافة وفوق محور السينات بين س= ٢ ، س= ٧ تساوى الواحد الصحيح]

ثانياً : ل (٣ < س ≤ ٦)

الحل



د (٢) = (١٥ – ٢ × ٢) / ٣٠ = ١١/٣٠

د (٧) = (١٥ – ٢ × ٧) / ٣٠ = ١/٣٠

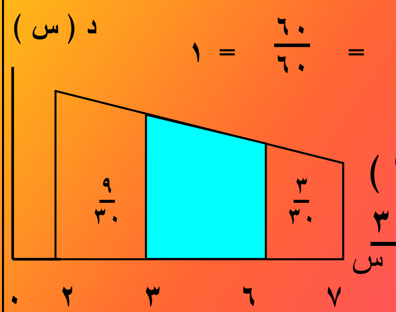
أولاً : مساحة الشكل م = ١/٢ [ق١ + ق٢] × ع

= ١/٢ [١١/٣٠ + ١/٣٠] × (٧ – ٢)

= (١ × ١٢ × ٥) / (٢ × ٣٠) = ٦٠/٦٠ = ١

∴ الدالة كثافة احتمال

ثانياً : ل (٣ < س ≤ ٦)



د (٣) = (١٥ – ٢ × ٣) / ٣٠ = ٩/٣٠

د (٦) = (١٥ – ٢ × ٦) / ٣٠ = ٣/٣٠

ل (٣ < س ≤ ٦) = مساحة الشكل المظلل

م = ١/٢ [ق١ + ق٢] × ع

= ١/٢ [٩/٣٠ + ٣/٣٠] × (٦ – ٣)

= (١ × ١٢ × ٣) / (٢ × ٣٠) = ٣٦/٦٠ = ٣/٥

---

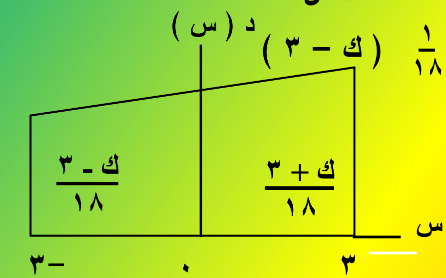
٢ – إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي :

د (س) = { ١/١٨ (س + ك) ، –٣ ≤ س < ٣ ؛ صفر ، فيما عدا ذلك }

أولاً : أوجد قيمة (ك) .

ثانياً : ل (س < ٠) ثالثاً : ل (٢ < س ≤ ٤)

الحل



د (–٣) = ١/١٨ (ك – ٣) = (ك – ٣) / ١٨

د (٣) = ١/١٨ (ك + ٣) = (ك + ٣) / ١٨

مساحة الشكل م = ١

∴ ١/٢ [(ك – ٣)/١٨ + (ك + ٣)/١٨] × (٣ – (–٣)) = ١

١/٢ (٢ ك / ١٨) × ٦ = ١

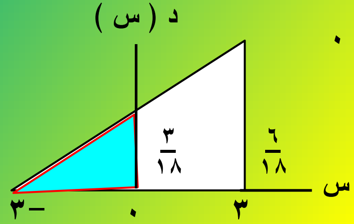
١٢ ك / ٣٦ = ١ ⇐ ١٢ ك = ٣٦ ⇐ ك = ٣

$$د (س) = \frac{١}{١٨} (٣ + س)$$

رسم منحنى الدالة الجديد :

د (−٣) = $\frac{-٣ + ٣}{١٨}$ = ٠

د (٣) = $\frac{٣ + ٣}{١٨}$ = $\frac{٦}{١٨}$



ثانياً : ل (س < ٠) .

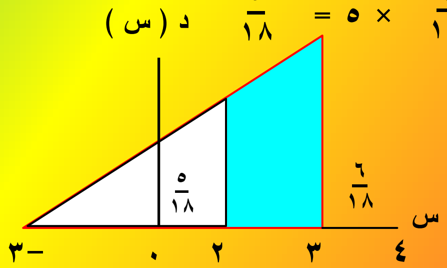
ل (س < ٠) = مساحة الشكل المظلل وهو مثلث

م = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{١٨}$ × (٠ − (−٣))

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{١٨}$ × ٣ = $\frac{٩}{٣٦}$ = $\frac{١}{٤}$

ثالثاً : ل (٢ < س ≤ ٤) .

د (٢) = $\frac{١}{١٨}$ × ٥ = $\frac{٥}{١٨}$



∴ ل (٢ < س ≤ ٤)

م = $\frac{١}{٢}$ [$\frac{٥}{١٨}$ + $\frac{٦}{١٨}$] × (٣ − ٢) + ٠

= $\frac{١ × ١١ × ١}{٢ × ١٨}$ = $\frac{١١}{٣٦}$

٣− إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د (س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} س + ك & ٠ \le س < ١ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

أوجد : أولاً − قيمة (ك) .

ثانياً : ل (س < $\frac{١}{٢}$)

الحل

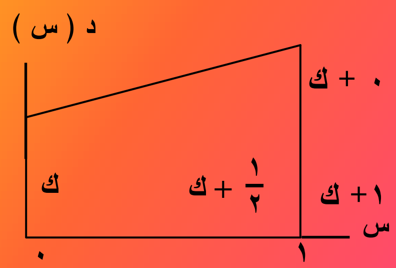
أولاً : إيجاد (ك) :

د (س) = $\frac{١}{٢}$ × ٠ + ك

= ٠ + ك = ك

د (١) = $\frac{١}{٢}$ × ١ + ك

= $\frac{١}{٢}$ + ك



مساحة الشكل م = ١

∴ $\frac{١}{٢}$ [ك + $\frac{١}{٢}$ + ك] × (١ − ٠) = ١

⇐ $\frac{١}{٢}$ [٢ ك + $\frac{١}{٢}$] × ١ = ١

⇐ $\frac{٢ ك}{٢}$ + $\frac{١}{٤}$ = ١

⇐ $\frac{٢ ك}{٢}$ = ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

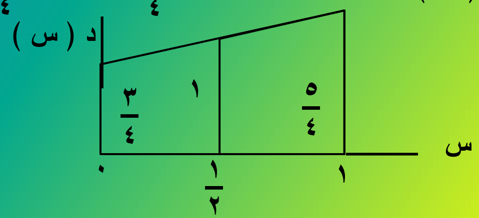
⇐ ك = $\frac{٣}{٤}$

$$د (س) = \frac{١}{٢} س + \frac{٣}{٤}$$

رسم منحنى الدالة الجديد :

د (٠) = $\frac{١}{٢}$ × ٠ + $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

د (١) = $\frac{١}{٢}$ × ١ + $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٥}{٤}$



ثانياً : ل (س < $\frac{١}{٢}$)

د ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٣}{٤}$ = ١

د (س < $\frac{١}{٢}$) = مساحة الشكل المظلل

م = $\frac{١}{٢}$ [١ + $\frac{٥}{٤}$] × (١ − $\frac{١}{٢}$)

⇐ $\frac{١ × ٩ × ١}{٢ × ٤ × ٢}$ = $\frac{٩}{١٦}$

٤− إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د (س) = \begin{cases} \frac{٢}{٥} (٤ - س) & ك \le س < ك + ١ \\ صفر & فيما عدا ذلك \end{cases}$$

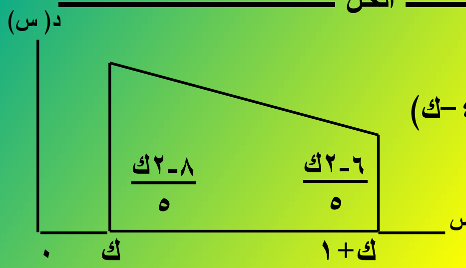
أوجد : أولاً : قيمة ك .

ثانياً : ل ($| س - ١\frac{١}{٢} | < \frac{١}{٤}$). ثالثاً : ل (س = ١,٥)

الحل

د (ك) = $\frac{٢}{٥}$ (٤ − ك)

= $\frac{٨ - ٢\text{ك}}{٥}$



د (ك+١) = $\frac{٢}{٥}$ (٤ −(ك+١))

= $\frac{٢}{٥}$ (٤ −ك −١)

= $\frac{٢}{٥}$ (٣ −ك) = $\frac{٦-٢\text{ك}}{٥}$

مساحة الشكل = م = ١

$\frac{١}{٢}$ [$\frac{٨-٢\text{ك}}{٥}$ + $\frac{٦-٢\text{ك}}{٥}$] × (ك+١ −ك) =١

⇐ $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١٤-٤\text{ك}}{٥}$] × ١ =١

⇐ $\frac{١٤-٤\text{ك}}{١٠}$ = ١ بضرب الطرفين في الوسطين

⇐ ١٤−٤ك=١٠ ⇐ $\cancel{٤}$ك = $\cancel{٤}$ ⇐ ك=١

ثانياً : ل (| س − ١ $\frac{١}{٢}$ | < $\frac{١}{٤}$).

ل (− $\frac{١}{٤}$ < س − ١ $\frac{١}{٢}$ < $\frac{١}{٤}$)

ل (− $\frac{١}{٤}$ + ١ $\frac{١}{٢}$ < س < $\frac{١}{٤}$ + ١ $\frac{١}{٢}$)

ل ($\frac{٥}{٤}$ < س < $\frac{٧}{٤}$)

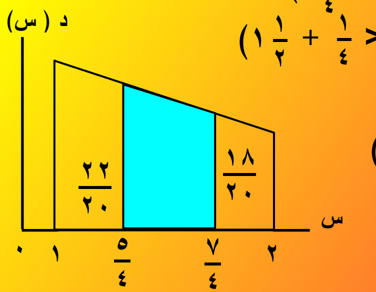
د ($\frac{٥}{٤}$) = $\frac{٢}{٥}$ (٤ − $\frac{٥}{٤}$)

= $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{١١}{٤}$

= $\frac{٢٢}{٢٠}$

د ($\frac{٧}{٤}$) = $\frac{٢}{٥}$ (٤ − $\frac{٧}{٤}$)

= $\frac{٢}{٥}$ × $\frac{٩}{٤}$ = $\frac{١٨}{٢٠}$



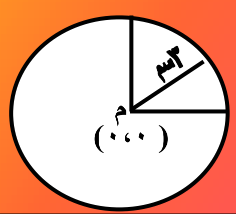
⇐ ل ($\frac{٥}{٤}$ < س < $\frac{٧}{٤}$)

= $\frac{١}{٢}$ [$\frac{٢٢}{٢٠}$ + $\frac{١٨}{٢٠}$] × ($\frac{٢}{٤}$) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤٠}{٢٠}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ثالثا : ل (س = ١,٥) = صفر لان مساحة القطعة المستقيمة مهملة أي انها تساوي الصفر .

٥− في تجربة اختيار نقطة داخل أو علي الـدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٩ عين مدي المتغير العشوائي س الذي يعبر عن بعد النقطة عـن مركز الدائرة

الحل



نق^{٢} = ٩

نق = $\sqrt{٩}$ = ٣

ف= { (س ، ص) : س^{٢} + ص^{٢} ≤ ٩ }

مدى المتغير العشوائى = [٠ ، ٣]

ملحوظة : إذا كانت التجربة هي اختيار نقطة داخـل الـدائرة فقط فإن مدي المتغير العشوائي = [٠ ، ٣ [

التمرين العاشر

١−إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي:

د (س) = { $\frac{٣\text{س}-٢}{٤٠}$ ، ٢≤ س ≤ ٦ ؛ صفر ، فيما عدا ذلك }

أولاً : اثبت أن د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائي س .

ثانيا: ل(٣≤ س ≤ ٥)

[٢/١]

٢ − س متغير عشوائي ودالة الكثافة الاحتمال له هي :

د (س) = { $\frac{١}{٣٢}$ (س+٤) ، −٤≤ س ≤ ٤ ؛ صفر ، فيما عدا ذلك }

أوجد: أولاً: ل (س < ٠)   ثانيا: ل (٢< س < ٥)

[١٦/٧ ، ٤/١]

٣− إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي:

د (س) = { $\frac{١}{٦}$ س + $\frac{١}{١٢}$ ، ٠≤ س < ٣ ؛ صفر ، فيما عدا ذلك }

أولا : اثبت أن مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى دالة الكثافة وفوق محور السينات بين س= ٠ ، س= ٣ تساوى الواحد الصحيح . *ثانيا: أوجد: ل (س < $\frac{١}{٢}$)*

[١٦/١٥]

٤ − إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي :

د (س) = { $\frac{١}{٥٠}$ (١٧ − ك س) ، ١≤ س < ٦ ؛ صفر ، فيما عدا ذلك }

أولاً : أوجد قيمة (ك) .   ثانيا: ل (٣< س ≤ ٧)

[٢٥/١٢ ، ٢]

٥−إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي

د (س) = { $\frac{١}{٨}$ (س +أ) ، −٢ ≤ س < ٢ ؛ صفر ، فيما عدا ذلك }

أولاً : أوجد قيمة (أ) .   ثانيا: ل (−٣< س ≤ ١)

[١٦/٩ ، ٢]

٦ − إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي :

د (س) = { $\frac{٢}{٢٥}$ س ، ٠ ≤ س ≤ أ ؛ صفر ، فيما عدا ذلك }

أوجد: أولاً : قيمة: أ   ثانيا: ل (٢< س ≤ ٤)

[٢٥/١٢ ، ٥]

٧- إذا كان س متغير عشوائي دالة كثا فة الاحتمال له هي

د (س) = $\begin{cases} \frac{١}{٩} \text{ (س + ك)} & ١ \le \text{س} < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$

أولا :أوجد قيمة أ . ثانيا : ل (س > ٢ $\frac{١}{٢}$)

[١/١٨ ، ٥/٨]

٨- إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي:

د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س} - ٢}{\text{ك}} & ٣ \le \text{س} < ٧ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$

أولا : أوجد قيمة ك . ثانيا : ل (٢ < س < ٤)

[١٢، ١/٨]

٩- إذا كان س متغير عشوائي دالة كثافة الاحتمال له هي :

د (س) = $\begin{cases} \frac{١}{١٦} \text{ (س +١)} & \text{م} \le \text{س} < \text{م} + ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$

أوجد : أولاً : قيمة م .

ثانياً : ل (|س − ٢| ≤ ١). ثالثا : ل (س = ٣)

[٣/٨ ، صفر]

١٠-في تجربة اختيار نقطة داخل أو علي الدائرة س^٢ + ص^٢ = ١٦ عين مدي المتغير العشوائي س الذي يعبر عن بعد النقطة عن مركز الدائرة

الحل: [صفر ، ٤]

---

١١ – في تجربة اختيار نقطة داخل الدائرة س^٢ + ص^٢ = ٢٥ عين مدي المتغير العشوائي س الذي يعبر عن بعد النقطة عن مركز الدائرة

الحل : [صفر، ٥]

الحصة الحادية عشر

ثانيا : الدالة المتعددة

١ – س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال لـه هي :

د (س) = $\begin{cases} \text{س} & ٠ \le \text{س} \le ١ \\ ٢ - \text{س} & ١ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$

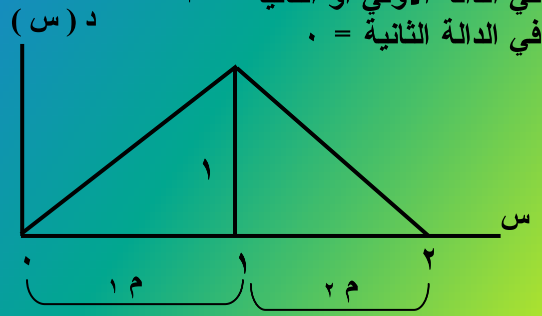
فأوجد أولا : اثبت أن د (س) دالة كثافة احتمال للمتغير العشوائي س . ثانيا : ل(٠,٥ ≤ س ≤ ١,٥)

الحل

د (٠) في الدالة الأولي = ٠

د (١) في الدالة الأولي أو الثانية = ١

د (٢) في الدالة الثانية = ٠



مساحة الشكل م = م١ + م٢

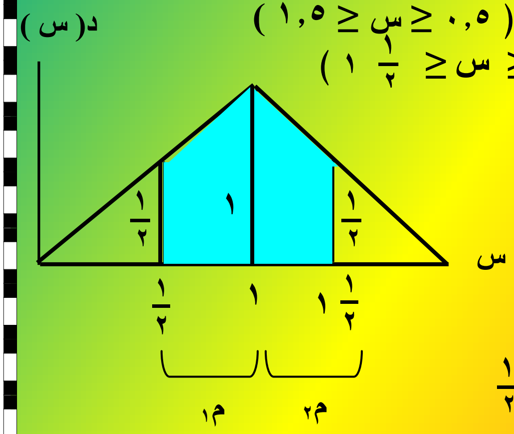
= $\frac{١}{٢}$ × ق × ع١ + $\frac{١}{٢}$ × ق × ع٢

= $\frac{١}{٢}$ × ١ × (١ − ٠) + $\frac{١}{٢}$ × ١ × (٢−١)

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١ .. الدالة كثافة احتمال

ثانيا إيجاد ل (٠,٥ ≤ س ≤ ١,٥)

= ل ($\frac{١}{٢}$ ≤ س ≤ ١ $\frac{١}{٢}$)



د ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$

د (١ $\frac{١}{٢}$) = ٢ − ١ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

= ل ($\frac{١}{٢}$ ≤ س ≤ ١ $\frac{١}{٢}$) = م١ + م٢

= $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{٢}$ + ١] × (١ − $\frac{١}{٢}$) + $\frac{١}{٢}$ [١ + $\frac{١}{٢}$] × (١ $\frac{١}{٢}$ − ١)

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$

= $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٦}{٨}$

٢- س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} & ٠ \le س \le ١ \\ أ\,(س + ١) & ١ \le س \le ٣ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

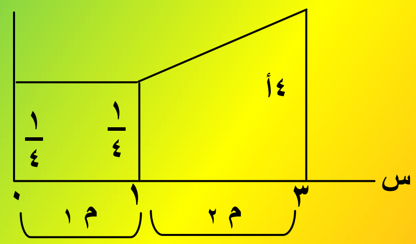
أولا : أوجد قيمة أ .

ثانيا :أوجد: ل (س > ٢,٥)

الحل

$د(٠) = \frac{١}{٤}$

$د(١) = \frac{١}{٤}$



$د(٣) = أ\,(٣ + ١) = ٤أ$

أولا : إيجاد أ :

مساحة الشكل م = م ١ + م ٢ = ١

$$\frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}\right) \times ١ + \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٤} + ٤أ\right) \times (٣ - ١)$$

$$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٤} \times ١ + \frac{١}{\cancel{٢}}\left(\frac{١}{٤} + ٤أ\right) \times \cancel{٢}$$

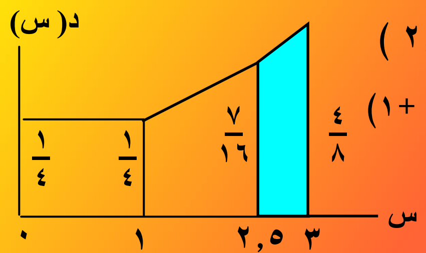
$$\frac{٢}{٨} + \frac{١}{٤} + ٤أ = ١ \Leftarrow \frac{١}{٢} + ٤أ = ١$$

$$\Leftarrow ٤أ = ١ - \frac{١}{٢} \Leftarrow ٤أ = \frac{١}{٢} \quad \therefore أ = \frac{١}{٢ \times ٤} = \frac{١}{٨}$$

$$\boxed{\therefore د(س) = \frac{١}{٨}(س + ١) \qquad ١ \le س \le ٣}$$

$د(٣) = \frac{٤}{٨}$

ثانياً : ل (س > ٢,٥)



$$د(٢,٥) = \frac{١}{٨}\left(٢\tfrac{١}{٢} + ١\right) = \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٢} = \frac{٧}{١٦}$$

$$ل\left(س > ٢\tfrac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٢} \times \left(\frac{٧}{١٦} + \frac{٤}{٨}\right) \times (٣ - ٢,٥)$$

$$\frac{١}{٢} \times \frac{١٥}{١٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{١٥}{٦٤}$$

ويمكن إيجاد قيمة أ مباشرة كما يلي :

د (١) في الدالة الاولي $= \frac{١}{٤}$

د (١) في الدالة الثانية = ٢ أ

$$\therefore \frac{١}{٤} = ٢أ \Leftarrow أ = \frac{١}{٤ \times ٢} = \frac{١}{٨}$$

٣- إذا كان س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س}{٨} & ٠ \le س \le ٢ \\ \frac{١}{٤} & ٢ \le س \le جـ \\ صفر & فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

أولا : أوجد قيمة جـ .

ثانيا : أوجد ل (١ ≤ س ≤ ٢)

ثالثا: أوجد قيمة أ التي تجعل ل (٢ ≤ س ≤ أ) $= \frac{٣}{٨}$

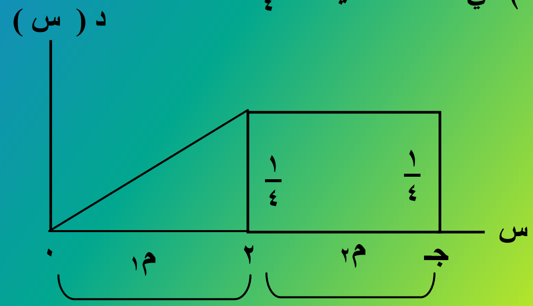
الحل

أولا : إيجاد قيمة جـ .

د (٠) في الدالة الأولي = ٠

د (٢) في الدالة الأولي أو الثانية $= \frac{١}{٤}$

د (جـ) في الدالة الثانية $= \frac{١}{٤}$



مساحة الشكل م = م ١ + م٢ = ١

$$\frac{١}{\cancel{٢}}\left(٠ + \frac{١}{٤}\right) \times \cancel{٢} + \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}\right) \times (جـ - ٢) = ١$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}(جـ - ٢) = ١$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}(جـ - ٢) = ١$$

$$\Leftarrow \frac{١}{٤}(جـ - ٢) = ١ - \frac{١}{٤}$$

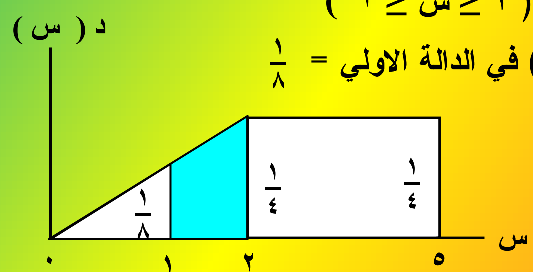
$$\Leftarrow \frac{١}{٤}(جـ - ٢) = \frac{٣}{٤}$$

$$\Leftarrow (جـ - ٢) = \frac{٣}{\cancel{٤}} \times \frac{\cancel{٤}}{١}$$

$$\Leftarrow جـ - ٢ = ٣ \Leftarrow جـ = ٥$$

ثانيا: ل(١ ≤ س ≤ ٢)

د (١) في الدالة الاولي $= \frac{١}{٨}$



ل(١ ≤ س ≤ ٢)

$$م = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{٨} + \frac{١}{٤}\right) \times (٢ - ١)$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٨} \times ١ = \frac{٣}{١٦}$$

التمرين الحادي عشر

١- إذا كان س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٥}\,س & \text{٠} \le س \le \text{٢} \\ \frac{٢}{١٥}\,(\text{٥} - س) & \text{٢} \le س \le \text{٥} \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أولا : اثبت أن ل (٠ ≤ س ≤ ٥) = ١

ثانيا : ل (١ ≤ س ≤ ٤) [٦/٥]

٢- س متغير عشوائي ودالة الكثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{١٨} & \text{حيث } -\text{٥} \le س \le \text{١} \\ \frac{١}{٩}\,(س - \frac{١}{٢}) & \text{حيث } \text{١} \le س \le \text{٤} \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أولا: اثبت أن د (س) داله الكثافة للمتغير العشوائي .

ثانيا : ل (س < ٠) ثالثا: ل (−١ < س < ٢)

[١٨/١٣ ، ٩/٢]

٣- ١- إذا كان س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦} & \text{١} \le س \le \text{٣} \\ أ\,(س - \text{٢}) & \text{٣} \le س \le \text{٥} \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أولا: أوجد قيمة أ ثانيا : ل (١ ≤ س ≤ ٤) [١/٦ ، ٧/١٢]

٤- س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} ك\,(\text{٤} - س) & \text{١} \le س \le \text{٣} \\ ك & \text{٣} \le س \le \text{٩} \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد ك ثم : i- ل(س ≤ ٢) ii- ل(٢ ≤ س ≤ ٦)

[١/١٠ ، ١/٤ ، ٩/٢٠]

٥- إذا كان س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س}{١٠} & \text{٠} \le س \le \text{٢} \\ \frac{١}{٥} & \text{٢} \le س \le جـ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

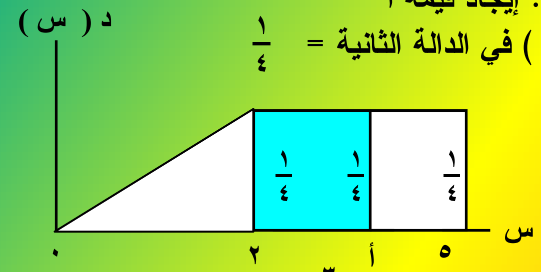
أولا : أوجد قيمة جـ ثانيا : ل (١ ≤ س ≤ ٢)

ثالثا : ل (٢ ≤ س ≤ أ) = ٠,٥

[٦ ، ٣/٢٠ ، ٤,٥]

ثالثا : إيجاد قيمة أ

د (أ) في الدالة الثانية = $\frac{١}{٤}$



ل (٢ ≤ س ≤ أ) = $\frac{٣}{٨}$

$\frac{١}{٢}\left[\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}\right] \times (أ - ٢) = \frac{٣}{٨}$

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times (أ - ٢) = \frac{٣}{٨}$

$\frac{١}{٤}\,(أ - ٢) = \frac{٣}{٨}$

$(أ - ٢) = \frac{٣}{٨} \times \frac{٤}{١}$

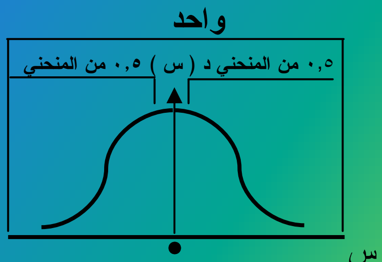
أ − ٢ = $\frac{١٢}{٨}$ ⇦ أ = $\frac{١٢}{٨}$ + ٢ = ٣,٥

الحصة الثانية عشر

الفصل الرابع
التوزيع الطبيعي الاعتدالي

المتغير العشوائي الطبيعي س:

هو متغير متصل يتراوح مداه بين − ∞ ، ∞ ودالة كثافة الاحتمال له تمثل بمنحني يتخذ شكل الناقوس (**الجرس**) ويطلق عليه منحني جاوس ⟵ المنحني الطبيعي .



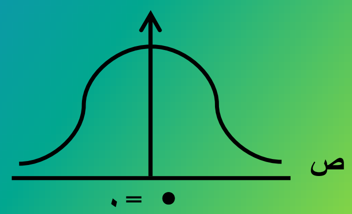
خواص المنحني الطبيعي :

١− له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلي ما لا نهاية يقتربان من المحور الأفقي ولكنهما لا يلتقيان به أبدا .

٢− المنحني متماثل حول المستقيم س = • أي أنه يقسم المساحة أسفل المنحني وفوق محور السينات إلي قسمين متساويين مساحة كل منهما = ٠,٥

٣− المساحة الكلية تحت المنحني تساوي الواحد الصحيح .

التوزيع الطبيعي المعياري :



هو توزيع طبيعي وسطه الحسابي • = صفر وانحرافه المعياري • = ١

بمعني أن التوزيع الطبيعي المتغير العشوائي له س ⟵ **يتحول إلي التوزيع الطبيعي المعياري المتغير العشوائي له ص**

حساب المساحة الواقعة تحت المنحني الطبيعي المعياري وفوق الفترة [٠، ى] حيث ى ⇦ عدد حقيقي موجب أو ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

باستخدام جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري

ملحوظة : ل (أ ≤ ص ≤ ب) = ل (أ ≤ ص < ب) = ل (أ < ص ≤ ب) = ل (أ < ص < ب) في حالات المتغير العشوائي الطبيعي المعياري

جانب من جدول المساحات أسفل المنحني الطبيعي المعياري

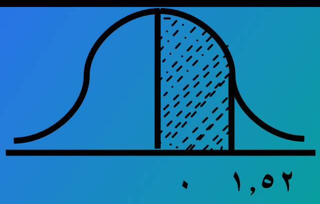
ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	...	٠,٠٩
٠,٠	...	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠ ↓ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٠٢)	٠,٠١٢٠	...	٠,٠٣٥٩
٠,١						
٠,٢						
٠,٣						
٠,٤						
.						
.						
١						
١,١	٠,٣٦٤٣ ↓ ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١)		٠,٣٦٨٦ ↓ ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١٢)			
.						
.						
٢	٠,٤٧٧٢ ↓ ل (٠ ≤ ص ≤ ٢)					
.						
.						
٣,٥						

حالات هامة

(١)

ل (٠ ≤ ص ≤ رقم موجب) = كشف الرقم الموجب

ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥ ٢) = ٠,٤٣٥٧



أوجد قيمة العدد الحقيقي الموجب ى

ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٤٣٥٧

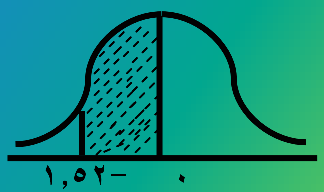
ى = الكشف العكسي = ١,٥٢ الكشف

(٢)

ل (رقم سالب ≤ ص ≤ ٠) = كشف الرقم الموجب

ل (− ١,٥١٥ ≤ ص ≤ ٠) = ل (− ١,٥٢ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٤٣٥٧



أوجد قيمة العدد الحقيقي الموجب ى

ل (−ى ≤ ص ≤ ٠) = ٠,٤٣٥٧

ى الكشف العكسي= ١,٥ الكشف

(٣)

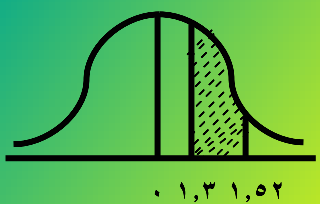
ل (رقم موجب ≤ ص ≤ رقم موجب)

= كشف الرقم الاكبر − كشف الرقم الأصغر

ل (١,٣ ≤ ص ≤ ١,٥٢١)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥٢)− ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٣)

= ٠,٤٣٥٧ – ٠,٤٠٣٢ = ٠,٠٣٢٥



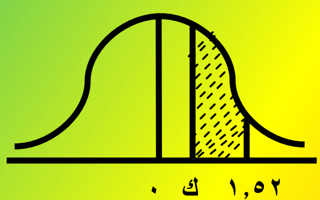
أوجد قيمة ك الموجبة ل (ك ≤ ص ≤ ١,٥٢) = ٠,٠٣٢٥

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥٢)− ل (٠≤ ص ≤ ك)= ٠,٠٣٢٥

= ٠,٤٣٥٧ – ل (٠≤ ص ≤ ك)= ٠,٠٣٢٥

∴ل (٠≤ ص ≤ ك)= ٠,٠٣٢٥ − ٠,٤٣٥٧ = ∴ ٠,٤٠٣٢

ك= الكشف العكسي =١,٣



(٤)

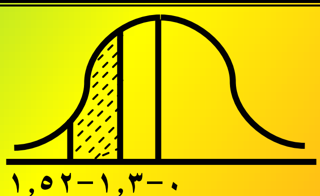
ل (رقم سالب ≤ ص ≤ رقم سالب)

= (كشف الرقم الاكبر − كشف الرقم الأصغر) بصرف النظر عن الإشارة

ل (−١,٥٢ ≤ ص ≤ − ١,٣)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥٢)− ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٣)

= ٠,٤٣٥٧ – ٠,٤٠٣٢ = ٠,٠٣٢٥

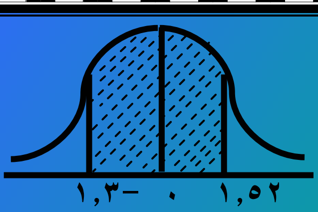


(٥) ل (رقم سالب≥ ص ≥ رقم موجب) = مجموع كشف الرقمين

ل (−١,٣ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

= ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٣) + ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

= ٠,٤٠٣٢ + ٠,٤٣٥٧ = ٠,٨٣٨٩



(٦) ل (ص > قيمة معينة) أو ل(ص < قيمة معينة)

أولاً : إذا كان الجزء المظلل أكبر من المنحنى

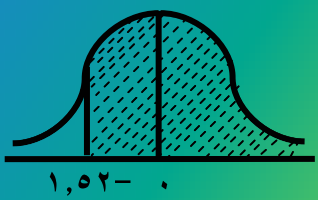
فإن ل = ٠,٥ + الكشف

ثانياً : إذا كان الجزء المظلل أقل من $\frac{1}{2}$ المنحنى

فإن ل = ٠,٥ – الكشف

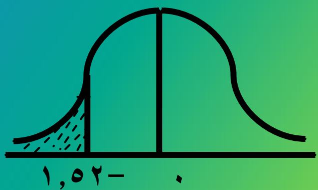
ل (ص > −١,٥٢) = ٠,٥ + ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

= ٠,٥ + ٠,٤٣٥٧ = ٠,٩٣٥٧



ل (ص < −١,٥٢) = ٠,٥ − ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

= ٠,٥ − ٠,٤٣٥٧ = ٠,٠٦٤٣

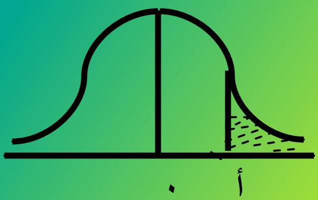


أوجد قيمة أ الموجبة التي تحقق: ل (ص > أ) = ٠,٠٦٤٣

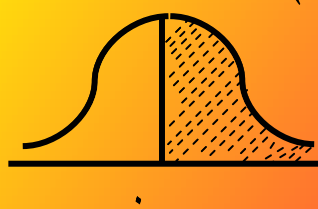
٠,٥ − ل (٠ ≥ ص ≥ أ) = ٠,٠٦٤٣

ل (٠ ≥ ص ≥ أ) = ٠,٠٦٤٣ − ٠,٥ = ٠,٤٣٥٧

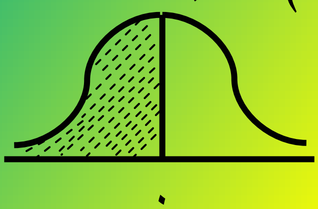
أ =الكشف العكسي ١,٥٢



(٧) ل (ص > ٠) = ٠,٥



(٨) ل (ص < ٠) = ٠,٥



(٩) ل (|ص | ≥ أ) = ل (−أ ≥ ص ≥ أ)

ل (|ص | ≥ ١,٥٢)

ل (−١,٥٢ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

= ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

+ ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

= ٢ ل (٠≥ ص ≥ ١,٥٢)

=٢ × ٠,٤٣٥٧ = ٠,٨٧١٤

(١٠) ل (|ص | ≤ أ)=ل (ص ≤ أ + ل ص ≥ −أ)

ل (|ص | ≤ ١,٥٢)

= ل (ص ≤ ١,٥٢ + ل ص ≥ −١,٥٢)

٠,٥ − ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

+ ٠,٥ − ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

= ١ − ٢ ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٥٢)

=١ − ٢ × ٠,٤٣٥٧ = ٠,١٢٨٦

التمرين الثاني عشر

أولا : إذا كان ص متغير عشوائيا طبيعيا معياريا فأوجد :

١- ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٤٨)
٢- ل (-١,١ ≥ ص ≥ ٠)
٣- ل (ص < ١,٠١)
٤- ل (ص ≥ - ٢,٥٨)
٥- ل (ص < -١,٩٨)
٦- ل (ص ≥ ١,٢)
٧- ل (١ ≥ ص ≥ ٢,٠٩)
٨- ل (-٢,٤١٤ ≥ ص ≥ -١,٦٧٦)
٩- ل (-٠,٥ ≥ ص ≥ ٠,٨٨)
١٠- ل (-٢ ≥ ص ≥ ٢)
١١- ل (ص < ٠)
١٢- ل (ص≥ ٠)
١٣- ل (| ص | ≥ ٣) .
١٤- ل (| ص | ≤ ٣)

ثانيا : إذا كان ص متغير عشوائيا طبيعيا معياريا فأوجد قيمة العدد الحقيقي الموجب ك التي تحقق :

١- ل (٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٤٣٤٥
٢- ل (- ك ≥ ص ≥ ٠) = ٠,٠٠٤
٣- ل (ص < ك) = ٠,٠٢١٢
٤- ل (ص ≥ - ك) = ٠,٤٨٠١
٥- ل (ص ≥ ك) = ٠,٩٤١٨
٦- ل (ص < - ك) = ٠,٦٩٥
٧- ل (١,٧١ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٠٢٧٢
٨- ل (ك ≥ ص ≥ ١,٨٣) = ٠,٠٣٤٥
٩- ل (- ك ≥ ص≥ ١,٤٦) = ٠,٠٥٥
١٠- ل (- ٠,٩٩ ≥ ص ≥ - ك) = ٠,٠٦٢٥
١١- ل (- ١,٦٤ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٨٤٠٢
١٢- ل (- ك ≥ ص ≥ ١,٩٤) = ٠,٨٥٢٨
١٣- ل (ص < ك) = ٠,٥
١٤- ل (- ك ≥ ص ≥ ك) = ٠,١٥٨٦
١٥- ل (| ص | ≥ ك) = ٠,٩٩٢٨

الحصة الثالثة عشر

حساب الاحتمالات لمتغير طبيعي غير معياري : س

إذا أعطيت (س) متغير عشوائي طبيعي يستلزم تحويله إلى ص = (س - •) / •
حيث ص متغير عشوائي طبيعي معياري

١- س متغير عشوائي وسطه الحسابي ١١,٩٦ وانحرافه المعياري • = ٢ أوجد :

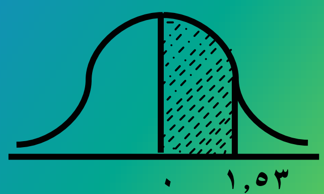
ل (١١,٩٦ ≥ س ≥ ١٥,٠١)

ل ((١١,٩٦ - ١١,٩٦) / ٢ ≥ ص ≥ (١٥,٠١ - ١١,٩٦) / ٢)

ل (٠≥ ص≥١,٥٢٥)

ل (٠≥ ص≥١,٥٣)

= ٠,٤٣٧٠



٢- إذا كان (س) متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي • وانحرافه المعياري • . فأوجد :

(i) ل (س > •)

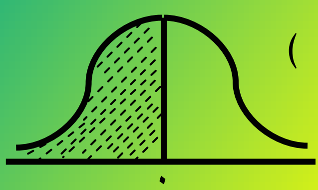
(ii) ل (• - • ≥ س ≥ • + ١/٥٠ •)

الحل

(أ) ل (س > •)

ل (ص > (• - •) / •)

ل (ص > ٠) = ٠,٥



(أأ) ل (• - • ≥ س ≥ • + ١/٥٠ •)

ل((• - • - μ) / • ≥ ص ≥ (• + ٠,٠٢• - •) / •)

ل (- ١ ≥ ص > ٠,٠٢)

= مجموع الكشفين

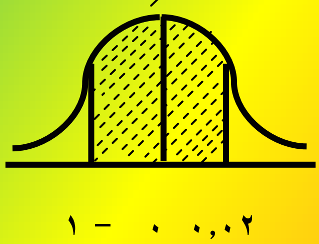
= كشف ١ + كشف ٠,٠٢

= ل (٠ ≥ ص> ١)

+ ل (٠ ≥ ص≥ ٠,٠٢)

= ٠,٣٤١٣ + ٠,٠٠٨٠

=٠,٣٤٩٣



ملاحظات :

☹ النسبة = الاحتمال × ١٠٠   ٠,٠٢   ٠   -١

☹ العدد = الاحتمال × العدد الكلي

☹ الصفة المرغوبة تحول إلي ل (س < ....)

☹ الصفة غير المرغوبة تحول إلي ل (س > ...)

☹ تتراوح بين مثلا ٢، ٥ ل (٢ ≤ س ≤ ٥)

☹ يزيد عن ٥ ⇦ ل (س > ٥)

☹ يقل عن ٥ ⇦ ل (س < ٥)

☹ ٥ علي الأقل(لا يقل عن ٥) (٥ فأكثر) ⇦ ل (س ≥ ٥)

☹ ٥ علي الأكثر(لا يزيد عن ٥)(٥ فأقل) ⇦ ل (س ≤ ٥)

١- تقدم ١٠٠٠ شاب إلى إدارة التجنيد فإذا كانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط • ١٧٠ سم وانحراف معياري • ١٠ سم . أوجد :

أولاً : احتمال أن الطول هو ١٩٠ سم علي الأقل .

ثانياً : عدد الغير مقبولين إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٥ سم

ثالثاً : النسبة المئوية للذين تتراوح أطوالهم بين ١٥٥,٥ سم ، ١٦٥ سم .

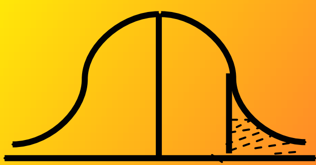
الحل

أولاً : احتمال أن الطول هو ١٩٠ سم علي الاقل

ل (س ≥ ١٩٠)

ل (ص ≥ $\frac{١٩٠ - ١٧٠}{١٠}$))

ل (ص ≥ ٢)



= ٠,٥ – كشف ٢

= ٠,٥ – ل (٠ ≤ ص ≤ ٢)

= ٠,٥ – ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

ثانياً : عدد الغير مقبولين إذا كان الحد الأدنى للطول ١٥٥ سم

ل (س < ١٥٥)

ل (ص < $\frac{١٥٥ - ١٧٠}{١٠}$)

ل (ص < – ١,٥)

= ٠,٥ – كشف ١,٥

= ٠,٥ – ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ – ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

العدد = الناتج × العدد الكلى

= ٠,٠٦٦٨ × ١٠٠٠ = ٦٦,٨ ≃ ٦٧ شاب

ثالثاً : النسبة المئوية للذين تتراوح أطوالهم بين ١٥٥,٥ سم ، ١٦٥ سم .

ل (١٥٥,٥ ≤ س ≤ ١٦٥)

ل ($\frac{١٥٥,٥ - ١٧٠}{١٠}$ ≤ ص ≤ $\frac{١٦٥ - ١٧٠}{١٠}$)

ل (-١,٤٥ ≤ ص ≤ - ٠,٥)

(كشف الرقم الاكبر ٢ – كشف الرقم الأصغر ١) بصرف النظر عن الإشارة

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٤٥) – ل (٠ ≤ ص < ٠,٥)

= ٠,٤٢٦٥ – ٠,١٩١٥ = ٠,٢٣٥

النسبة المئوية = الناتج × ١٠٠

= ٠,٢٣٥ × ١٠٠ = ٢٣,٥ %

٢- ينتج أحد المصانع اسطوانات أطوالها تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي • = ٥٦ سم وتباينه ٤ سم . تكون الاسطوانة المنتجة مقبولة إذا كان أطوالها تنحصر بين ٥٨ سم ، ٦٠ سم . أخذت عينة عشوائية من ١٠٠٠ اسطوانة .

أولاً : كم عدد الاسطوانات المتوقع قبولها .

ثانياً : النسبة المئوية للاسطوانات التي تقل أطوالها عن ٥٩ سم .

الحل

أولاً : عدد الاسطوانات المتوقع قبولها .

ل (٥٨ ≤ س ≤ ٦٠)

ل ($\frac{٥٨ - ٥٦}{٢}$ ≤ ص ≤ $\frac{٦٠ - ٥٦}{٢}$)

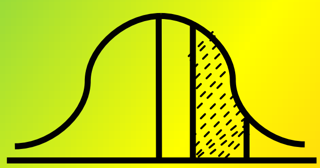
ل (١ ≤ ص ≤ ٢)

كشف الرقم الاكبر ٢ – كشف الرقم الأصغر ١

= ل (٠ ≤ ص ≤ ٢) – ل (٠ ≤ ص < ١)

= ٠,٤٧٧٢ – ٠,٣٤١٣

= ٠,١٣٥٩



العدد = ١٣٥٩ × ١٠٠٠ = ١٣٥,٩ ≃ ١٣٦

ثانياً : النسبة المئوية للاسطوانات التى تقل أطوالها عن ٥٩ سم .

ل (س < ٥٩)

ل (ص < (٥٩ ـ ٥٦) / ٢)

ل (ص < ١,٥)

= ٠,٥ + كشف ١,٥

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥)

= ٠,٥ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٩٣٣٢

النسبة المئوية = ٠,٩٣٣٢× ١٠٠ = ٩٣,٣٢ %

٣- بفرض أن أنصاف الأقطار للحلزونات التي تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعا طبيعيا u = ٣٠ سم ، • = ٢٥ سم يعتبر الحلزون معيبا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٥ سم أو يكبر عن ٣٠ سم . أوجد احتمال أن يكون الحلزون معيبا .

الحل

ل (س < ٢٥) + ل (س > ٣٠)

أولا : ل (ص < (٢٥ ـ ٣٠) / ٢٥)

ل (ص < - ٠,٢)

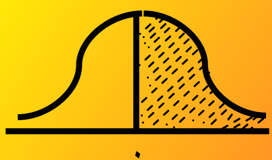
= ٠,٥ – ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٢)

= ٠,٥ – ٠,٠٧٩٣ = ٠,٤٢٠٧

ثانيا : ل (س > ٣٠)

ل (ص > (٣٠ ـ ٣٠) / ٢٥)

ل (ص > ٠) = ٠,٥



الاحتمال المطلوب = أولا + ثانيا

= ٠,٤٢٠٧ + ٠,٥ = ٠,٩٢٠٧

٤- في دراسة لتحديد نسب ذكاء الأطفال من الجنسين في احدي المدارس وجد أن متوسط نسب ذكاء الأطفال الذكور والإناث هما علي الترتيب ٨ ، ٦ وبانحرافين معياريين ٣ ، ٢ علي الترتيب فإذا كان من المعلوم أن نسب الذكاء للأطفال من الجنسين تتبع توزيعا طبيعيا فأوجد :

i – النسبة المئوية للأطفال الذكور الذين نسب ذكائهم أكبر من متوسط نسب ذكاء الأطفال الإناث .

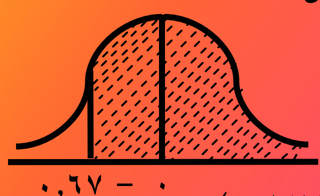
ii- النسبة المئوية للأطفال الإناث الذين تقل نسب ذكائهم عن متوسط نسب ذكاء الأطفال الذكور .

الحل

i- ل (س > ٦)

ل (ص > (٦ ـ ٨) / ٣)

ل (ص > - ٠,٦٧)



= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٦٧)

= ٠,٥ + ٠,٢٤٨٦ = ٠,٧٤٨٦

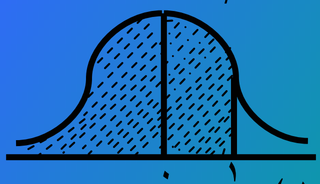
النسبة المئوية = الناتج × ١٠٠

= ٠,٧٤٨٦ × ١٠٠ = ٧٤,٨٦ ٠/٠

ii- ل (س < ٨)

ل (ص < (٨ ـ ٦) / ٢)

ل (ص < ١)



= ٠,٥ + كشف ١

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ١)

= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨٤١٣

النسبة المئوية = ٠,٨٤١٣× ١٠٠ = ٨٤,١٣ %

التمرين الثالث عشر

١- إذا كان س توزيعا معتاد وسطه الحسابي • = ٥٠ وانحرافه المعياري • = ١٠

أوجد : ل (٣٦,٣≥ س ≥ ٧٠,١)

[٠,٨٩٢٥]

٢- إذا كان س توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي • وانحرافه المعياري •

أوجد :ل(س > •)، ل (• - • ≤ س≤ • +٢ •) ل (• + • ≤ س ≤ • +٣ •)

[٠,٥ ، ٠,٨١٨٥ ، ٠,١٥٧٤]

٣- إذا كانت درجات امتحان الطلاب في مادة الإحصاء متغيرا عشوائيا وسطه الحسابي • وتباينه • ٢ **فاحسب :**

i – النسبة المئوية لطلاب الذين يحصلون علي درجة أقل من (• + $\frac{١}{٤}$ •)

ii- عدد الطلاب الذين يحصلون علي درجات تقع بين (• – •) ، (• + $\frac{١}{٥٠}$•) **إذا كان عدد الطـــلاب ١٣٧٠٠٠ طالب .**

[٥٩,٨٧ ٠/٠ ، ٤٧٨٥٤ طالب]

٤-إ ذا كان الدخل الشهري لعدد ١٠٠٠ أسرة فـــي أحـــدي المدن يتبع متغير عشوائي طبيعي وسطه الحســـابي • ١٧٠ جنيها وانحراف معياري • ٢٠ جنيها ، إذا اختيـــرت أســـرة عشوائيا من هذه الأسر **فأوجد :**

أولا : احتمال أن يكون دخلها ينحصر بـــين ١٦٠ جنيهـــا ، ٢٠٠ جنيها .

ثانيا : عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠ جنيها .

[٠,٦٢٤٧ ، ٨٤١ أسرة]

٥-ماكينة بأحد المصانع تنتج اسطوانات أطوالها تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي ٥٦ سم وانحرافه المعياري ٢ سم وتكون الاسطوانة المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥٣ سم ، ٥١ سم اختيرت عينة عشوائية مكونة من ١٠٠٠ اسطوانة **فكم عدد الاسطوانات المتوقع قبولها .**

[٦١ اسطوانة]

٦-تقدم ١٠٠٠ شاب إلي إدارة التجنيد فإذا كانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ١٧٠ سم وانحراف معياري ١٠ سم **أوجد عدد الشباب :**

أولا : الذين يبلغ طولهم ١٩٠ سم علي الاكثر.

ثانيا : غير المقبولين إذا كـــان الـــحد الأدنـــى للطـــول المطلوب هو ١٥٥ سم .

[٩٧٧ شاب ، ٦٧ شاب]

٧-إذا كانت أوزان الطلاب في إحدى الكليات تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي ٦٨ كجم وتباينه ١٦ كجم ٢ **فأوجد:**

أولا : احتمال أن الوزن يكون أكبر من ٧٠ كجم .

ثانيا النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٥ كجم ، ٧٢ كجم

ثالثا : عدد الطلاب الذين تصل أوزنهم ٦٦ كجم علي الأقل إذا كان عدد الطالبة ٣٤٢٥٦ .

[٠,٣٠٨٥ ، ٦١,٤٧ ٠/٠ ، ٢٣٦٨٨ طالب]

٨-بفرض أن أنصاف الأقطار للحلزونات الذي تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعا طبيعيا وسطه ٢٥ سم وانحرافه المعياري ٢٠ سم يعتبر الحلزون معيبا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ سم أو يكبر عن ٢٨ سم

أوجد احتمال أن يكون الحلزون معيبا .ومعامل الإختلاف

[٠,٨٤١٧ ، ٨٠ ٠/٠]

---

٩ في دراسة لتحديد نسب ذكاء الأطفال من الجنسين في احدي المدارس وجد أن متوسط نسب ذكاء الأطفال الذكور والإناث هما علي الترتيب ١٦ ، ١٢ وبانحرافين معياريين ٦ ، ٤ علي الترتيب فإذا كان من المعلوم أن نسب الذكاء للأطفال من الجنسين تتبع توزيعا طبيعيا فأوجد :

i – النسبة المئوية للأطفال الذكور الذين نسب ذكائهم أكبر من متوسط نسب ذكاء الأطفال الإناث .

ii- النسبة المئوية للأطفال الإناث الذين تقل نسب ذكائهم عن متوسط نسب ذكاء الأطفال الذكور .

[٧٤,٨٦ ٠/٠ ، ٨٤,١٣ ٠/٠]

الحصة الرابعة عشر

قاعدة ى ، ى-

ويتم استخدمها في حالات الكشف العكسي إذا كانت قيمة س أو • أو • مجهولة .

ل (ص < مقدار معين) = رقم أقل من ٠,٥ يتم مساواته بـــ ى	< ، أقل من مختلفين
ل (ص > مقدار معين) = رقم أكبر من ٠,٥ يتم مساواته بـــ ى	> ، أكبر من مختلفين
ل (ص < مقدار معين) = رقم أكبر من ٠,٥ يتم مساواته بـــ - ى	< ، أكبر من متشابهين
ل (ص > مقدار معين) = رقم أقل من ٠,٥ يتم مساواته بـــ - ى	> ، أقل من متشابهين

١ – إذا كان (س) متغيرا عشوائيا طبيعيا وسطه الحسابي ١٢٠ وانحرافه المعياري ١٠ . وكان ل (س < ك) = ٠,٩٩٢ فأوجد قيمة (ك)

ل (س < ك) = ٠,٩٩٢

ل(ص< $\frac{\text{ك - ١٢٠}}{\text{١٠}}$) = ٠,٩٩٢ ⇦ أكبر من ٠,٥

$\frac{\text{ك - ١٢٠}}{\text{١٠}}$ = ى

ل (ص < ى) = ٠,٩٩٢

٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ى) =٠,٩٩٢

ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٩٩٢ – ٠,٥

= ٠,٤٩٢ =٠,٤٩٢٠

ى =الكشف العكسي ٢,٤١

∴ $\frac{\text{ك - ١٢٠}}{\text{١٠}}$ = ٢,٤١

ك – ١٢٠ = ١٠ × ٢,٤١

ك = ٢٤,١ + ١٢٠ = ١٤٤,١

٢ – وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكـــون موزعـــة حسب التوزيع الطبيعـــي بمتوســـط قـــدره • . وانحـــراف معياري ٤ . إذا علم أن أطوال ١٠,٥٦ % من هذا النبات أقل من ٤٥ سم فأوجد الوسط الحسابي لأطوال هذا النبات

ل (س < ٤٥) = $\frac{\text{١٠,٥٦}}{\text{١٠٠}}$ = ٠,١٠٥٦

ل (ص < $\frac{\text{٤٥ - •}}{\text{٤}}$ = $\frac{\text{١٠,٥٦}}{\text{١٠٠}}$

=٠,١٠٥٦ ⇦ أقل من ٠,٥

$\frac{\text{٤٥ - •}}{\text{٤}}$ = - ى

ل (ص < - ى) = ٠,١٠٥٦

٠,٥ – ل (٠ ≤ ص ≤ ى) =٠,١٠٥٦

ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,١٠٥٦ – ٠,٥

= ٠,٣٩٤٤

ى = ١,٢٥

∴ $\frac{\text{٤٥ - •}}{\text{٤}}$ = – ١,٢٥

٤٥ – • = – ١,٢٥ × ٤

• = – ٥ – ٤٥ = ٥٠ ∴ • = ٥٠

٣ –إذا كانت أوزان الطلبة في إحدى الكليات تتبع توزيع طبيعي وسطه ٦٥ كجم وانحرافه المعياري • وكانت أوزان ٣٣ % من الطلبة تقل عن ٦٠ كجم .

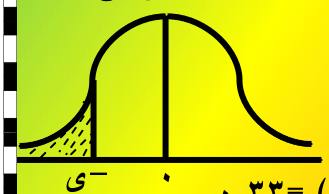
أولاً : أوجد قيمة التباين

ثانياً : إذا كان عدد الطلبة ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن ٦٢,٥ كجم .

ل (س < ٦٠) = $\frac{\text{٣٣}}{\text{١٠٠}}$ = ٠,٣٣

ل (ص < $\frac{\text{٦٠ - ٦٥}}{\text{•}}$)= ٠,٣٣ ⇦ أقل من ٠,٥

$\frac{\text{-٥}}{\text{•}}$ = ى-



ل (ص < – ى)

٠,٥ – ل (٠ ≤ ص ≤ ى) =٠,٣٣

ل (٠ ≤ ص≤ ى) = ٠,٣٣ – ٠,٥ = ٠,١٧٠٠

ى = الكشف العكسي = ٠,٤٤

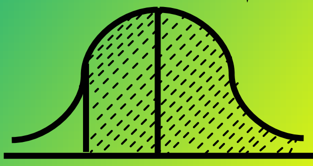
∴ $\frac{\text{-٥}}{\text{•}}$ = – ٠,٤٤

٥ = ٠,٤٤ σ

σ = ٥ / ٠,٤٤ = ١١,٣٦

أولاً : التباين σ^٢ = (١١,٣٦)^٢ = ١٢٩,١٣

ثانيا : عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم٦٢,٥ كجم



ل (س > ٦٢,٥)

ل (ص > (٦٢,٥ ـ ٦٥) / ١١,٣٦)

ل (ص > − ٠,٢٢٠٠٧)

٠   − ٠,٢٢

= ٠,٥ + كشف ٠,٢٢

= ٠,٥ + ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٢٢)

= ٠,٥ + ٠,٠٨٧١ = ٠,٥٨٧١

العدد = الناتج × العدد الكلى

= ٠,٥٨٧١ × ١٠٠٠ = ٥٨٧,١ ≃ ٥٨٧ طالباً

٤- إذا كان عدد الطلاب بإحدى الكليات ١٠٠٠٠ طالب وكانت درجاتهم في مادة الإحصاء تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي = ١١ وانحرافه المعياري = ٢ . فإذا كان ٤٠٠ من الطلاب الأوائل بالترتيب حصلوا على تقدير ممتاز فأوجد أقل درجة للطالب الحاصل على تقدير ممتاز

الحل

ل (س > ك) = ٤٠٠ / ١٠٠٠٠ = ٠,٠٤

ل(ص > (ك − ١١) / ٢) = ٠,٠٤ ⇦ أقل من ٠,٥

(ك − ١١) / ٢ = ى

ل (ص > ى) = ٠,٠٤

٠,٥ − ل (٠ ≥ ص ≥ ى) =٠,٠٤

ل (٠ ≥ ص ≥ ى) = ٠,٠٤ − ٠,٥

= ٠,٤٦ = ٠,٤٦٠٠

ى =الكشف العكسي ١,٧٥

٠   ى

∴ (ك − ١١) / ٢ = ١,٧٥

ك − ١١ = ٢ × ١,٧٥

ك = ٣,٥ + ١١ = ١٤,٥ درجة

٥-إذا كان أوزان مجموعة من أشخاص هو متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ فأوجد قيمة ك بحيث يكون :ل (μ − ك σ ≥ س ≥ μ + ك σ) = ٠,٣٤

الحل

ل ((μ − ك σ − μ) / σ ≥ ص ≥ (μ + ك σ − μ) / σ) = ٠,٣٤

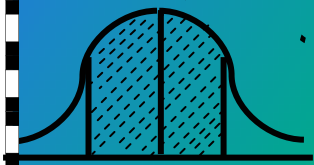
ل (−ك ≥ ص ≥ ك) = ٠,٣٤

ل (٠ ≥ ص ≥ ك) + ل (٠≥ ص ≥ ك) = ٠,٣٤

٢ ل (٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٣٤

∴ ل (٠≥ ص ≥ ك) = ٠,٣٤ / ٢

= ٠,١٧ = ٠,١٧٠٠



−ك   ٠   ك

ك = الكشف العكسي = ٠,٤٤

التمرين الرابع عشر

١- إذا كان س متغيرا طبيعيا وسطه الحسابي ٤٥ وتباينه ٢٥ فأوجد :أولا : ل (٣١≤ س ≤٥٠)
ثانيا : قيمة ك إذا كانت ل(س < ك) = ٠,٥٦٧٥
[٠,٨٣٨٧ ، ٤٤,١٥]

٢- إذا كان س متغيرا عشوائيا طبيعيا وسطه الحسابي• = صفر وانحرافه المعياري • **فأوجد قيمة ك التي تحقق ل(س ≥ ك •) = ٠,١٥**
[-١,٠٤]

٣- إذا كان س متغيرا عشوائيا طبيعيا وسطه الحسابي • وانحرافه المعياري • = ٨ وكان ل (س ≥ ٤٠) = ٠,١٥٨٧ **أوجد : أولا: قيمة الوسط الحسابي •** .
ثانيا : ل(س < ٥٠)
[٤٨ ، ٠,٤٠١٣]

٤- إذا كان س متغيرا عشوائيا طبيعيا وسطه الحسابي• = ٥٥ وانحرافه المعياري • **فأوجد التباين للمتغير س الذي يحقق ل(س ≥ ٤٥) = ٠,٠٢٢٨**
[٢٥]

٥- إذا كان درجات الطلاب في أحد الامتحان تتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط قدره ٧٥ درجة وانحراف معياري ١٥ درجة فإذا كانت ١٥ ٪ من الطلاب الأوائل بالترتيب يحصلون علي تقدير ممتاز **فأوجد أقل درجة لكي يحصل الطالب علي تقدير ممتاز**
[٩٠,٦ درجة]

٦- إذا كان الدخل الشهري للأسرة يمثل متغيرا عشوائيا بتوقع • ٥٠٠ **ج وانحراف معياري** • = ٢٠ ج **فأوجد الحد الاعلي للدخل لنسبة ٤ ٠/٠ من الأسر التي تحصل علي أدني الدخول .**
[٤٦٥ جنيه]

٧- تقدم ١٠٠٠ طالب للالتحاق بالكلية الحربية وكانت أطوالهم تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي ١٦٣ سم وانحرافه المعياري ٥ سم وعند الكشف الطبي عليهم وجد أن ١٥٩ من المتقدمين دون الحد الادني للطول المطلوب لذلك رسبوا في الكشف الطبي **أحسب الحد الادني للطول المطلوب .**
[١٥٨ سم]

٨-إذا كانت درجات طالب هي متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي • وانحرافه المعياري • = ٨ حصل ٢٢,٦ ٠/٠ من الطلاب علي أكثر من ٥٠ درجة **أوجد قيمة •** .
[٤٤]

٩-إذا كان أوزان الطلبة في أحد الكليات تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي ٦٥ كجم وانحرافه المعياري • وكانت أوزان ٣٣ ٠/٠ من الطلبة تزيد عن ٧٠ كجم **أولا أوجد قيمة •** .
ثانيا : إذا كان عدد الطلبة ١٠٠٠طالب فأحسب عدد الطلبة الذين لا تقل أوزانهم عن ٦٧ كجم .
[١١,٣٦ ، ٤٢٩ طالب]

١٠-وجد أن أطوال نوع معين من النباتات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط ٥٠ سم وانحراف معياري • إذا علم أن أطوال ١٠,٥٦ ٠/٠ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم **فأوجد تباين أطوال هذا النبات .**
[١٦]

١١- إذا كان س متغيرا عشوائيا طبيعيا وسطه الحسابي • **وانحرافه المعياري** • فأوجد قيمة ك بحيث يكون ل (• - ك • ≤ س ≤ • +ك •) = ٠,٥٧٠٤
[٠,٧٩]

الحصة الخامسة عشر

الفصل الخامس
الارتباط والانحدار

أولا الارتباط

الارتباط : هو علاقة بين متغيرين (**ظاهرتين**) أو أكثر

وتقاس درجة العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) بمقياس يسمي معامل الارتباط (ر)

إشارة معامل الارتباط (ر)

رقم موجب ← ارتباط طردي

رقم سالب ← ارتباط عكسي

قيمة معامل الارتباط	رقم عشري			١	صفر
	أقل من ٠,٥	٠,٥ ، ٠,٦	أكبر من ٠,٦		
	ضعيف	متوسطة	قوي	تام	لا يوجد ارتباط

طرق حساب معامل الارتباط

١ – معامل ارتباط بيرسون للبيانات غير المبوبة .

٢ – معامل ارتباط الرتب لسبيرمان .

أولا : معامل الارتباط الخطي لبيرسون للبيانات الغير مبوبة

(أ) : معامل ارتباط بيرسون بالطريقة العادية:

١ – نكون جدول لحساب معامل الارتباط لبيرسون (ر)

س	ص	س٢	ص٢	س ص
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
مجـ س	مجـ ص	مجـ س٢	مجـ ص٢	مجـ س ص

٢ – نطبق القانون الآتي :

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س) \times (مجـ\ ص)}{\sqrt{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2}\ \sqrt{ن\ مجـ\ ص^2 - (مجـ\ ص)^2}}$$

(١) من بيانات الجدول الآتي

س	٣	٥	٤	٢	٦
ص	١	٦	٧	٨	٣

احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س،ص وحدد نوعه :

س	ص	س ص	س٢	ص٢
٣	١	٣	٩	١
٥	٦	٣٠	٢٥	٣٦
٤	٧	٢٨	١٦	٤٩
٢	٨	١٦	٤	٦٤
٦	٣	١٨	٣٦	٩
٢٠	٢٥	٩٥	٩٠	١٥٩

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س) \times (مجـ\ ص)}{\sqrt{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2}\ \sqrt{ن\ مجـ\ ص^2 - (مجـ\ ص)^2}}$$

$$ر = \frac{٥ \times ٩٥ - ٢٠ \times ٢٥}{\sqrt{٥\times ٩٠ - ٢٠ \times ٢٠}\ \sqrt{٥\times ١٥٩ - ٢٥ \times ٢٥}}$$

$$ر = \frac{-٢٥}{\sqrt{٥٠} \times \sqrt{١٧٠}} = -٠,٢٧١١٦$$ عكسي ضعيف

ملحوظة: لا تتغير قيمة معامل الارتباط إذا طرحنا أو جمعنا أي عدد ثابت من جميع قيم المتغير الأول وأي عدد ثابت من جميع قيم المتغير الثاني .

(ب) معامل ارتباط بيرسون بطريقة الانحرافات:

١- نطرح عدديين ثابتين من جميع قيم المتغيرين س ، ص لينتج لدينا المتغيرين س′، ص′

حيث س′ = س – العدد الثابت الأول ،

ص′ = ص – العدد الثابت الثاني

وقد يكون العدديين هما $\bar{\text{س}}$ ، $\bar{\text{ص}}$

(الوسطين الحسابيين للمتغيرين س ، ص)

فتصبح س′ = س – $\bar{\text{س}}$ ، ص′ = ص – $\bar{\text{ص}}$

وفي هذه الحالة تكون مجـ س′ = صفر ،

مجـ ص′ = صفر

٢- نطبق القانون الآتي:

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س′ص′} - (\text{مجـ س′}) \times (\text{مجـ ص′})}{\sqrt{\text{ن مجـ س′}^{2} - (\text{مجـ س′})^{2}}\ \sqrt{\text{ن مجـ ص′}^{2} - (\text{مجـ ص′})^{2}}}$$

٢) : المطلوب حل المثال السابق بطريقة الانحرافات

الحل

س	ص	س′ = س – $\bar{\text{س}}$ = س – ٤	ص′ = ص – $\bar{\text{ص}}$ = ص – ٥	س′٢	ص′٢	س′ص′
٣	١	-١	-٤	١	١٦	٤
٥	٦	١	١	١	١	١
٤	٧	٠	٢	٠	٤	٠
٢	٨	-٢	٣	٤	٩	-٦
٦	٣	٢	-٢	٤	٤	-٤
٢٠	٢٥	صفر	صفر	١٠	٣٤	-٥

$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = ٤$ ، $\bar{\text{ص}} = \frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}} = ٥$

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س′ص′} - (\text{مجـ س′}) \times (\text{مجـ ص′})}{\sqrt{\text{ن مجـس′}^{2} - (\text{مجـ س′})^{2}}\ \sqrt{\text{ن مجـ ص′}^{2} - (\text{مجـ ص′})^{2}}}$$

$$\text{ر} = \frac{٥ \times (-٥) - ٠ \times ٠}{\sqrt{٥ \times ١٠ - ٠}\ \sqrt{٥ \times ٣٤ - ٠}}$$

$$\text{ر} = \frac{-٢٥}{\sqrt{٥٠} \times \sqrt{١٧٠}} = -٠,٢٧١١٦$$

وهو ارتباط عكسي ضعيف حيث أنه أقل من ٠,٥

وهي نفس النتيجة السابقة وبالتالي لاتتغير قيمة معامل الارتباط لبيرسون إذا طرحنا قيم ثابتة من جميع قيم المتغير س ، ص .

(٣) إذا كان مجـ س = ٣٠ ، مجـ ص = ٢٠ ، مجـ س ص = ٧٥ ، مجـ س٢ = ١٩٢ ، مجـ ص٢ = ٨٢ ، ن = ٦ أوجد :

معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين المتغيرين س ، ص واستنتج قيمة معامل الارتباط بين المتغيرين س′ ، ص′ حيث س′ = س – ٥ ، ص′ = ص – ٤ .

الحل

معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين المتغيرين (س ، ص) .

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س}) \times (\text{مجـ ص})}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}}\ \sqrt{\text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ص})^{2}}}$$

$$= \frac{٦ \times ٧٥ - ٣٠ \times ٢٠}{\sqrt{٦ \times ١٩٢ - ٣٠ \times ٣٠}\ \sqrt{٦ \times ٨٢ - ٢٠ \times ٢٠}}$$

$$= \frac{-١٥٠}{\sqrt{٢٥٢} \times \sqrt{٩٢}} = -٠,٩٨٥١٣$$

وهو ارتباط عكسي قوى .

معامل الارتباط بين المتغيرين س′ ، ص′ = معامل الارتباط بين المتغيرين س ، ص = - ٠,٩٨٥١٣

ثانيا : معامل ارتباط الرتب لسبيرمان :

- نكون الجدول الآتى :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
				صفر	مجـ ف٢

ف = رتب س – رتب ص

٢ - نطبق في القانون الآتي :

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

ملحوظة : يستخدم معامل الارتباط بيرسون في حالة البيانات الرقمية فقط أما معامل ارتباط الرتب لسبيرمان يستخدم في حالة البيانات الرقمية والوصفية .

(٤) في دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات وجدت التقديرات التالية : احسب معامل ارتباط الرتب .

الإحصاء	جيد	ضعيف	ممتاز	مقبول	جيد جداً	جيد
الرياضيات	١٢	١١	١٣	١٢	١٠	١١

الحل

س		ص		رتب س	رتب ص	ف	ف٢
جيد	٣	١٢	٢	٣,٥	٢,٥	١	١
ضعيف	٦	١١	٤	٦	٤,٥	١,٥	٢,٢٥
ممتاز	١	١٣	١	١	١	٠	٠
مقبول	٥	١٢	٣	٥	٢,٥	٢,٥	٦,٢٥
جيد جداً	٢	١٠	٦	٢	٦	٤ -	١٦
جيد	٤	١١	٥	٣,٥	٤,٥	١ -	١
						صفر	٢٦,٥

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ٢٦,٥}{٦ \times ٣٥}$$

$$= ١ - \frac{١٥٩}{٢١٠} = ١ - ٠,٧٥٥١٤ = ٠,٢٤٢$$

وهو ارتباط طردي ضعيف .

التمرين الخامس عشر

١ - من بيانات الجدول الآتي :

س	١٠	١٦	١٥	١٧	١٧
ص	٦	٧	٨	٥	٩

أولاً : احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س،ص وحدد نوعه .

ثانيا : احسب معامل الارتباط بين المتغيرين سَ ، صَ حيث سَ = س - ٥ ، صَ = ص + ١ .

ثالثا : أحسب احسب معامل الارتباط بين المتغيرينسَ ، صَ حيث سَ = س - $\overline{س}$ ، صَ = ص - $\overline{ص}$

ص - ص [٠,٢٧١١٦ ارتباط طردي]

٢ - إذا كان مجـ س = ٣٠٠ ، مجـ ص = ٢٥٠٠٠ ، مجـ س ص = ٤٥٠٠٠٠ ، مجـ س٢ = ٥٥٠٠ ، مجـ ص٢ = ٤٥٠٠٠٠٠٠ ، ن = ٢٠ أوجد :

معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين المتغيرين س ، ص واستنتج قيمة معامل الارتباط بين المتغيرينسَ ، صَ حيث سَ = س - ٥٠ ، صَ = ص + ٤٠ .[٠,٦٣٩٦،نفس المعامل]

٣ - من بيانات الجدول الآتي

س	١٥	٢٥	٣٥	٢٥	٣٥	١٥	٣٥
ص	٦	٩	٦	٨	٧	٨	٥

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س،ص وحدد نوعه .

[-٠,٣٣٠٣٦ ارتباط عكسي]

٤-في دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات وجدت التقديرات التالية :

الإحصاء	مقبول	جيد جدا	ممتاز	جيد جدا	مقبول	جيد جدا
الرياضيات	جيد	جيد	مقبول	جيد جدا	ضعيف	ممتاز

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان . [٠,٢٧١٤٢]

٥ - في دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب في مادتي الحاسوب والرياضيات وجدت التقديرات التالية :

الحاسوب	ممتاز	ضعيف جدا	ممتاز	ضعيف	جيد	جيد
الرياضيات	٧	٦	٨	٧	٨	٧

احسب معامل ارتباط الرتب . [٠,٦٧١٤٣ طردي]

٦-في دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات وجدت التقديرات التالية :

س	جـ جـ	جـ جـ	جـ	ض	ل	جـ جـ	ز
ص	مرتفع	متوسط	مرتفع	منخفض	مرتفع جدا	منخفض	منخفض جدا

احسب معامل ارتباط الرتب [-٠,٣٧٥ عكسي]

الحصة السادسة عشر

ثانيا: الانحدار

تمهيد : إذا كان لدينا متغيرين س ، ص عدد عناصر كل منهما = ن **فإن :**

شكل الانتشار : هو الشكل الناتج من تمثيل قيم المتغيرين بمجموعة النقط (س ، ص) **حيث :**

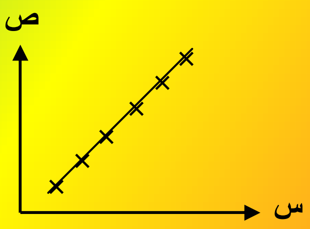
١) المحور الأفقي يمثل قيم المتغير س ، المحور الرأسي يمثل قيم المتغير ص .

٢) شكل انتشار النقط في المستوي يبين قوة الارتباط بين المتغيرين :

خط الانحدار : هو خط مستقيم يعبر عن العلاقة بين المتغير س ، ص ومن خلال هذه العلاقة يمكن التنبؤ أو تقدير قيم س ، ص إذا علم قيم المتغير الأخر .

وكلما اقتربت النقط من هذا الخط إي كلما قلت إنتشاره حوله زادت درجة الارتباط ويظهر **ذلك في الاشكال الاتية :**

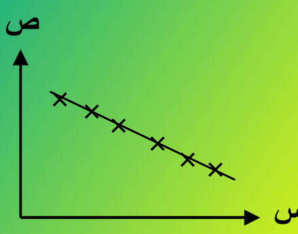
(١)



جميع النقط ∋ خط مستقيم ميله موجب .

الارتباط طردي تام أي أن ر =١

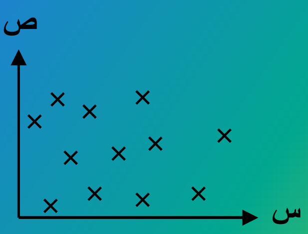
(٣)



جميع النقط ∋ خط مستقيم ميله سالب .

الارتباط عكسي تام أي أن ر =−١

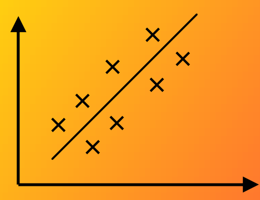
(٥)



النقط تنشر في المستوي دون روابط بينها ،

الارتباط منعدم أي ن ر = صفر

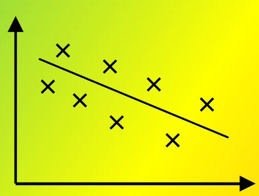
(٢)



النقط تقع حول المستقيم ميله موجب .

الارتباط طردي أي أن ر موجبة .

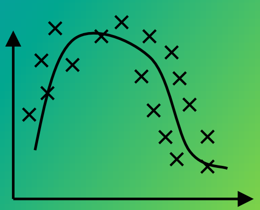
(٤)



النقط تقع حول المستقيم ميله سالب .

الارتباط عكسي أي أن ر سالبة .

(٦)



النقط تقع حول منحني وليس خط مستقيم.

الارتباط منحني .

طرق إيجاد خط الإنحدار :

١−**الرسم باليد :** بحيث يمر بأكبر عدد ممكن من النقط وذلك في شكل الإنتشار ويعيب هذه الطريقة أنها غير دقيقة وتختلف من شخص لآخر .

٢−**طريقة المربعات الصغري :** تستخدم لتوفيق أفضل خط مستقيم لمجموعة من النقط بحيث يكون مجموع مربعات إنحرافات النقط من هذا الخط أصغر ما يمكن وبذلك يقل خطأ التنبؤ .

ملحوظة : يمثل البعد بين نقطة ما وخط الإنحدار خطأ التنبؤ.

طريقة المربعات الصغري لإيجاد خط الإنحدار :

انحدار ص علي س (لتقدير ص)

١ − **نكون جدول بيرسون**

٢ − **معامل انحدار ص علي س**

$$\text{أ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$\text{٣ − ب} = \frac{\text{مجـ ص} - \text{أ مجـ س}}{\text{ن}}$$

٤ − **معادلة خط انحدار ص علي س**

$$\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$$

انحدار س علي ص (لتقدير س)

١ − **نكون جدول بيرسون**

٢ − **معامل انحدار س علي ص**

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}$$

$$\text{٣ − د} = \frac{\text{مجـ س} - \text{جـ مجـ ص}}{\text{ن}}$$

٤ − **معادلة خط انحدار س علي ص**

$$\text{س} = \text{جـ ص} + \text{د}$$

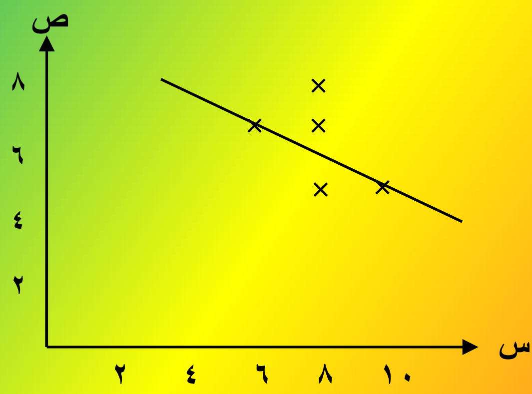
١ – الجدول الآتي يوضح سعر الوحدة س بالجنيهات وعدد الوحدات ص من سلعة ما .

س	٨	٦	١٠	٨	٨
ص	٨	٧	٥	٧	٥

أولا: ارسم شكل الإنتشار .

ثانيا :قدِّر عدد الوحدات المطلوبة من السلعة إذا كان سعر الوحدة ١١ ج . باستخدام خط الانحدار المناسب .

الحل



س	ص	س ص	س²	ص²
٨	٨	٦٤	٦٤	٦٤
٦	٧	٤٢	٣٦	٤٩
١٠	٥	٥٠	١٠٠	٢٥
٨	٧	٥٦	٦٤	٤٩
٨	٥	٤٠	٦٤	٢٥
٤٠	٣٢	٢٥٢	٣٢٨	٢١٢

أولا: إيجاد معادلة خط انحدار عدد الوحدات (ص) علي السعر (س)

$$\text{أ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$\text{أ} = \frac{٥ \times ٢٥٢ - ٤٠ \times ٣٢}{٥ \times ٣٢٨ - ٤٠ \times ٤٠} = \frac{-٢٠}{٤٠} = -٠,٥$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ ص} - \text{أ مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$\text{ب} = \frac{٣٢ + ٠,٥ \times ٤٠}{٥} = \frac{٥٢}{٥} = ١٠,٤$$

معادلة خط انحدار عدد الوحدات ص على السعر س هي :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{ص} = \text{أ س} + \text{ب} \\ \text{ص} = -٠,٥ \text{ س} + ١٠,٤ \end{array}}$$

ثانيا : إيجاد قيمة عدد الوحدات ص إذا كان السعر س = ١١ ج

بالتعويض عن قيمة (س) فى معادلة الانحدار .

ص= − ٠,٥ × ١١ + ١٠,٤ = ٤,٩ ≃ ٥ وحدات

٢ – البيانات التالية تمثل الإنفاق (ص) والادخار (س) بالمليون جنيه لعينة من ٥مدن بمحافظة المنوفية .

س	٣	٥	٤	٢	٦
ص	١	٦	٧	٨	٣

أولا: معادلة خط انحدار الإدخار على الإنفاق .

ثانيا: قدِّر الإدخار إذا كان الإنفاق ٢ مليون جنيه .

الحل

س	ص	س ص	س²	ص²
٣	١	٣	٩	١
٥	٦	٣٠	٢٥	٣٦
٤	٧	٢٨	١٦	٤٩
٢	٨	١٦	٤	٦٤
٦	٣	١٨	٣٦	٩
٢٠	٢٥	٩٥	٩٠	١٥٩

أولا: إيجاد معادلة خط انحدار الإدخار(س) على الإنفاق (ص)

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}$$

$$\text{جـ} = \frac{٥ \times ٩٥ - ٢٠ \times ٢٥}{٥ \times ١٥٩ - ٢٥ \times ٢٥} = \frac{-٢٥}{١٧٠}$$

جـ = − ٠,١٤٧٠٥

$$\text{د} = \frac{\text{مجـ س} - \text{جـ مجـ ص}}{\text{ن}}$$

$$\text{د} = \frac{٢٠ + ٠,١٤٧٠٥ \times ٢٥}{٥} = \frac{٢٣,٦٧٦٤}{٥}$$

د = ٤,٧٣٥٢

معادلة خط انحدار الإدخار س على الإنفاق ص هي:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{س} = \text{جـ ص} + \text{د} \\ \text{س} = -٠,١٤٧٠٥ \text{ ص} + ٤,٧٣٥٢ \end{array}}$$

ثانيا:إيجاد قيمة الإدخار س إذا كان الإنفاق ص = ٢ مليون جنيه .

بالتعويض عن قيمة ص في معادلة خط الانحدار :

س = − ٠,١٤٧٠٥ × ٢ + ٤,٧٣٥٢ = ٤,٤٤١ مليون جنيه

٣- لدراسة العلاقة بين الاستهلاك (ص) من سلعة ما ، والإدخار (س) لعينة من ستة أفراد علما بأن قيم س ، ص بعشرات الجنيهات .فكانت لدينا البيانات التالية :

مجـ س = ٣٣ ، مجـ ص = ٢٣ ، مجـ س ص = ١٥١ ، مجـ س^{٢} = ٢١١، مجـ ص^{٢} = ١٠٩

أوجد :

أولا : معادلة خط انحدار الاستهلاك على الادخار .

ثانيا : تقدير الاستهلاك عندما يصل الإدخار إلي ٤٠ ج .

الحل

$$\text{أ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$\text{أ} = \frac{٦ \times ١٥١ - ٣٣ \times ٢٣}{٦ \times ٢١١ - ٣٣ \times ٣٣} = \frac{١٤٧}{١٧٧} = ٠,٨٣٠٥$$

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ ص} - \text{أ مجـ س}}{\text{ن}}$$

$$\text{ب} = \frac{٢٣ - ٠,٨٣٠٥ \times ٣٣}{٦} = \frac{-٤,٤٠٦٥}{٦} = -٠,٧٣٤٤$$

معادلة خط انحدار الاستهلاك ص على الادخار س

هي : ص= أ س +ب ⇐ ص = ٠,٨٣٠٥س − ٠,٧٣٤٤

ثانيا : تقدير الاستهلاك عندما يصل الإدخار إلي ٤٠ ج حيث أن البيانات بعشرات الجنيهات يتم التعويض عن قيمة س = $\frac{٤٠}{١٠}$ = ٤

ص = ٠,٨٣٠٥× ٤ − ٠,٧٣٤٤ = ٢,٥٨٧٦ × ١٠

= ٢٥,٨٧٦ جنيه .

٤- عند دراسة العلاقة بين الدخل الشهري بمئات الجنيهات (ص) والعمر بالسنوات (س) لعمال أحد المصانع كانت لدينا البيانات الاتية لعينة من عشرين عاملا بالمصنع :

مجـ س = ٥٠٠ ، مجـ ص = ٢٠٠ ،

مجـ س ص = ١١٢٠٠ ، مجـ س^{٢} = ٥٠٠٠٠ ،

مجـ ص^{٢} = ٣٥٠٠ .

إذا علمت أن أحد العمال يبلغ من العمر ٤٠ عاما فما هو تقدير الدخل الشهري بالجنيه .

الحل

باستخدام القوانين السابقة نجد أن :

أ = ٠,١٦٥٣٣

ب =٥,٨٦٦٦٧

معادلة خط انحدار الدخل ص على العمر س هي

ص= أ س +ب ⇐ ص = ٠,١٦٥٣٣٥س + ٥,٨٦٦٦٧

ثانيا:إيجاد قيمة الدخل الشهري ص إذا كان العمر س = ٤٠ عاما .

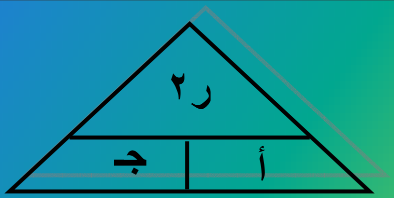
بالتعويض عن قيمة س في معادلة خط الانحدار :

ص = ٠,١٦٥٣٣٥س + ٥,٨٦٦٦٧

= ٠,١٦٥٣٣٥×٤٠ + ٥,٨٦٦٦٧ = ١٢,٤٨×١٠٠

= ١٢٤٨ جنيه

إيجاد معامل الارتباط بالعلاقة بين معاملي الانحدار



ر^{٢} = معامل انحدار ص على س × معامل انحدار س على ص

ر^{٢} = أ × جـ

ر= +$\sqrt{\text{أ جـ}}$ إذا كان أ ، جـ موجبان	ر = -$\sqrt{\text{أ جـ}}$ إذا كان أ ، جـ سالبان
أ = $\frac{\text{ر}^{٢}}{\text{جـ}}$	جـ = $\frac{\text{ر}^{٢}}{\text{أ}}$

٤- إذا كان مجـ س = ٣٠ ، مجـ ص = ٢٠ ، مجـ س ص = ٧٥ ، مجـ س^{٢} = ١٩٢ ، مجـ ص^{٢} = ٨٢ ، ن = ٦ أوجد :

أولا: معامل انحدار ص على س .

ثانيا: معادلة خط انحدار س على ص .

ثالثاً : معامل الارتباط الخطي بين س ، ص مستخدماً معاملي الانحدار ومبيناً نوع الارتباط .

الحل

أولاً : معامل انحدار ص على س .

$$\text{أ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{٦ \times ٧٥ - ٣٠ \times ٢٠}{٦ \times ١٩٢ - ٣٠ \times ٣٠} = \frac{-١٥٠}{٢٥٢} = -٠,٥٩٥٢$$

ثانياً : معادلة خط انحدار (س على ص) .

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}}$$

$$= \frac{٦ \times ٧٥ - ٣٠ \times ٢٠}{٦ \times ٨٢ - ٢٠ \times ٢٠} = \frac{-١٥٠}{٩٢} = -١,٦٣٠$$

د = (مجـ س − جـ مجـ ص) / ن

= (٣٠ + ١,٦٣٠٤٣ × ٢٠) / ٦ = ١٠,٤٣٤٧٦

معادلة خط انحدار س على ص .

س = جـ ص + د

س = − ١,٦٣٠٤٣ ص + ١٠,٤٣٤٧٦

ثالثا: معامل الارتباط الخطي بين س ، ص مستخدما معاملي الانحدار ومبينا نوع الارتباط .

ر^{2} = أ جـ = (− ٠,٥٩٥٢٣) × (− ١,٦٣٠٤٣)

= ٠,٩٧٠٤٨

∴ أ سالب ، جـ سالب .

∴ ر = − √أ جـ = − √٠,٩٧٠٤٨ = − ٠,٩٨٥١٣

وهو ارتباط عكسي قوى .

٥- إذا كان معامل انحدار س على ص هو − ٠,٨٠٧ ومعامل الارتباط الخطي بين س على ص هو − ٠,٧١ فأوجد : معامل انحدار ص على س .

الحل

ر^{2} = أ جـ

أ = ر^{2} / جـ

أ = ٠,٥٠٤١ / − ٠,٨٠٧ = − ٠,٦٢٤٦٥

٦- في دراسة العلاقة بين متغيرين س ، ص إذا كانت معادلة خط انحدار ص على س هو ص = ٠,٤٢ س + ١,٣ ، معادلة خط انحدار س على ص هو س = ١,٥٨ ص + ١,٢ فأوجد معامل الارتباط الخطي بين س ، ص وحدد نوعه .

الحل

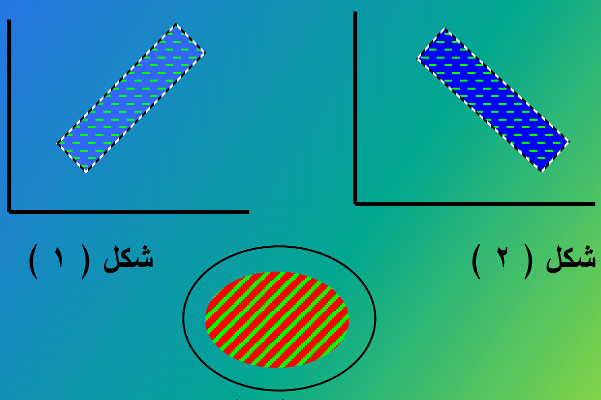
ر^{2} = أ جـ = ٠,٤٢ × ١,٥٨ = ٠,٦٦٣٦

ر = √٠,٦٦٣٦ = ٠,٨١٤٦١

وهو ارتباط طردي قوى .

التمرين السادس عشر

١- حدد نوع العلاقة التى يعبر عنها انتشار النقاط والشكلين المجاورين .



شكل (٢)   شكل (١)

شكل (٣)

٢- البيانات التالية تمثل الإنفاق ص والدخل اليومي س بالمليون جنيه لعينة من ٦ محافظات .

س	٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢
ص	١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨

أولا : أرسم خط الإنتشار .

ثانيا :أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س،ص .

ثالثا: أوجد خط انحدار الإنفاق علي الدخل .

رابعا: قدر الإنفاق إذا كان الدخل ١٥ مليون جنيه .

[٠,٩٤٧٣٧ طردي ، ص=١,٤٧٨٢٦س+١,٩١٣٠٤ ، ٢٤,٠٨٦٩٦ مليون جنيه]

٣- عند دراسة العلاقة بين الاستهلاك (س) و الدخل السنوي (ص) لعينة من سبعة عمال بإحدى الشركات علما بأن قيم س ، ص بآلاف الجنيهات كانت لدينا البيانات الاتية :

مجـ س = ٤٩ ، مجـ ص = ٧٧ ، مجـ س ص = ٦٠٩

مجـ س^{2} = ٣٧١ ، مجـ ص^{2} = ١٠٤٩

أوجد :

أولا : معادلة خط انحدار الاستهلاك على الدخل السنوي .

ثانيا : تقدير الاستهلاك عندما يصل الدخل السنوي ١١٠٠٠ج

[س = ٠,٣٤٦٥٣ص+٣,١٨٨١٢ ، ٧٠٠٠ج]

٤- من بيانات الجدول الآتي :-

س	١٢	١٠	١٤	١١	١٢	٩
ص	١٨	١٧	٢٣	١٩	٢٠	١٥

أوجد : أولا :معامل ارتباط الرتب لسبيرمان .

ثانيا:معادلة خط انحدار س علي ص .

[٠,٩ طردي ، س=٠,٦٠٧١٤ص]

٥- من بيانات الجدول الآتي :-

س	٣	٤	٧	٢	٥	٢
ص	٥	٦	٨	٣	٦	١

أوجد : معامل انحدار ص علي س ومعامل انحدار س علي ص ومن ذلك أوجد قيمة معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين س ، ص .

[١,١٥٩٢٩ ، ٠,٧٠٨١١ ، ٠,٩٠٦٠٤ طردي]

٦- إذا كان معامل انحدار ص علي س هو ٣,٢ ومعامل ارتباط الخطي بين س ، ص هو ٠,٨ فأوجد معامل انحدار س علي ص .

[٠,٢ طردي]

٧- إذا كان معامل انحدار س علي ص هو – ٢,٣ ومعامل ارتباط الخطي بين س ، ص هو – ٠,٨ فأوجد معامل انحدار ص علي س .

[-٠,٢٧٨٢٦ عكسي]

٨- في دراسة العلاقة بين متغيرين س ، ص إذا كانت معادلة خط انحدار ص علي س هو – ٠,٤٢ س + ٠,٦٧ ، معادلة خط انحدار س علي ص هي س = – ١,٥٨ ص + ٣,٩ فأوجد معامل الارتباط الخطي بين س، ص .

[-٠,٨١٤٦١ عكسي]

٩- عند دراسة العلاقة بين الاجر السنوي بمئات الجنيهات (ص) والعمر بالسنوات (س) لعمال أحد المصانع كانت لدينا البيانات الاتية لعينة من عشرين عاملا بالمصنع :

مجـ س = ٧٠٠ ، مجـ ص = ١٥٠٠ ، مجـ س ص = ٦٥٠٠٠ ، مجـ س^2 = ٣٥٠٠٠ ، مجـ ص^2 = ١٥٠٠٠٠ .

أولا: احسب معامل الارتباط الخطي بين الاجر السنوي والعمر

ثانيا: خط إنحدار الاجر السنوي علي العمر .

ثالثاً : إذا علمت أن أحد العمال يبلغ من العمر ٥٥ عاما فما هو تقدير أجره السنوي بالجنيه .

رابعا : أوجد معامل إنحدار العمر علي الاجر السنوي .

خامسا: معامل الارتباط الخطي بين الاجر السنوي والعمر مستخدما معاملي الانحدار ومبينا نوع الارتباط .

[٠,٦٢٩٩٤ طردي ، ص= ١,١٩٠٤٨س+٣٣,٣٣٣٣٣ ، ٩٨٨٠,٩٥٢٣٨ جنيه ، ٠,٣٣٣٣٣ ، ٠,٦٢٩٩٤طردي]

الحصة السابعة عشر

طرق أخري مختصرة لإيجاد خطوط الإنحدار

أولا : طريقة الانحرافات :

وهي تستخدم لتصغير الأعداد الحسابية المستخدمة لحساب أ ، ب ، جـ ، د في معادلات خطوط الانحدار .

١- نستخدم الفرض الآتي : سَ = س – و

صَ = ص – هـ

حيث و ، هـ أعداد ثابتة تختارها حسب ظروف المسألة .

٢- نوجد معادلة خط الانحدار المطلوبة بدلالة سَ ، صَ

٣- نعوض عن قيم سَ ، صَ بدلالة س ، ص لنحصل علي معادلة خط انحدار البيانات الأصلية .

١ – البيانات التالية تبين الناتج الشهري (س) وتكلفة العمالة (ص) في أحد المصانع .

س	٩	١٥	١٢	٦	١٨
ص	٢	١٢	١٤	١٦	٦

أوجد معادلة خط انحدار تكلفة العمالة علي الناتج الشهري مستخدما طريقة الانحرافات .

الحل

١- بفرض أن سَ = س – ٩

صَ = ص – ٨

س	ص	سَ = س – ٩	صَ = ص – ٨	سَ^{2}	سَ صَ
٩	٢	٠	-٦	٠	٠
١٥	١٢	٦	٤	٣٦	٢٤
١٢	١٤	٣	٦	٩	١٨
٦	١٦	-٣	٨	٩	-٢٤
١٨	٦	٩	-٢	٨١	-١٨
		١٥	١٠	١٣٥	٠

$$أ = \frac{ن \text{ مجـ سَ صَ} - \text{مجـ سَ} \times \text{مجـ صَ}}{ن \text{ مجـ سَ}^2 - (\text{مجـ سَ})^2}$$

$$أ = \frac{٥ \times ٠ - ١٥ \times ١٠}{٥ \times ١٣٥ - (١٥)^2} = \frac{-١٥٠}{٤٥٠} = -٠,٣٣٣٣٣$$

$$\bar{ب} = \frac{\text{مجـ صَ} - أ \text{ مجـ سَ}}{ن} = \frac{١٠ + ٠,٣٣٣٣٣ \times ١٥}{٥} = ٣$$

٢- معادلة خط انحدار صَ علي سَ هي :

صَ = أ سَ + بَ ⟸ صَ = -٠,٣٣٣٣٣ سَ + ٣

٣- معادلة خط انحدار ص (التكلفة) علي س(الناتج)

بالتعويض عن قيم صَ ، سَ في المعادلة السابقة

ص- ٨ = -٠,٣٣٣٣٣(س – ٩) + ٣

ص- ٨ = -٠,٣٣٣٣٣ س + ٣ +٣

ص= -٠,٣٣٣٣٣ س + ٦ + ٨

ص= -٠,٣٣٣٣٣ س +١٤

ثانيا : طريقة الانحرافات المبسطة

وهي تستخدم لتصغير الأعداد الحسابية المستخدمة لحساب أ ، ب ، جـ ، د في معادلات خطوط الانحدار بطريقة أكثر تبسيطا .

١- نفرض أن :

$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{س} - \text{و}}{\text{ل}} \quad ، \quad \overline{\text{ص}} = \frac{\text{ص} - \text{هـ}}{\text{م}}$$

حيث و ، هـ ، ل ، م أعداد ثابتة تختارها حسب ظروف المسألة .

٢- نوجد معادلة خط الانحدار المطلوبة بدلالة $\overline{\text{س}}$ ، $\overline{\text{ص}}$

٣- نعوض عن قيم $\overline{\text{س}}$ ، $\overline{\text{ص}}$ بدلالة س ، ص لنحصل علي معادلة خط انحدار البيانات الأصلية .

٢- المطلوب حل المثال السابق بإستخدام طريقة الإنحرافات المبسطة .

الحل

١- بفرض أن :

$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{س} - ٩}{٣} = \frac{\text{سَ}}{٣} \quad ، \quad \overline{\text{ص}} = \frac{\text{ص} - ٨}{٢} = \frac{\text{صَ}}{٢}$$

س	ص	سَ = س−٩	صَ = ص−٨	$\overline{\text{س}} = \frac{\text{سَ}}{٣}$	$\overline{\text{ص}} = \frac{\text{صَ}}{٢}$	$\overline{\text{س}}^٢$	$\overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}}$
٩	٢	٠	−٦	٠	−٣	٠	٠
١٥	١٢	٦	٤	٢	٢	٤	٤
١٢	١٤	٣	٦	١	٣	١	٣
٦	١٦	−٣	٨	−١	٤	١	−٤
١٨	٦	٩	−٢	٣	−١	٩	−٣
				٥	٥	١٥	٠

$$\overline{\text{أ}} = \frac{\text{ن مجـ } \overline{\text{س}}\,\overline{\text{ص}} - \text{مجـ } \overline{\text{س}} \times \text{مجـ } \overline{\text{ص}}}{\text{ن مجـ } \overline{\text{س}}^٢ - (\text{مجـ } \overline{\text{س}})^٢}$$

$$\overline{\text{أ}} = \frac{٥ \times ٠ - ٥ \times ٥}{٥ \times ١٥ - (٥)^٢} = \frac{-٢٥}{٥٠} = -٠,٥$$

$$\overline{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ } \overline{\text{ص}} - \text{أ مجـ } \overline{\text{س}}}{\text{ن}} = \frac{٥ + ٠,٥ \times ٥}{٥} = ١,٥$$

٢- معادلة خط انحدار $\overline{\text{ص}}$ علي $\overline{\text{س}}$ هي :

$$\overline{\text{ص}} = \text{أ}\overline{\text{س}} + \overline{\text{ب}} \Leftarrow \overline{\text{ص}} = -٠,٥\,\overline{\text{س}} + ١,٥$$

٣- معادلة خط انحدار ص (التكلفة) علي س(الناتج) بالتعويض عن قيم $\overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{س}}$ في المعادلة السابقة

$$\frac{\text{ص} - ٨}{٢} = -٠,٥ \left(\frac{\text{س} - ٩}{٣} \right) + ١,٥$$

بضرب طرفي المعادلة × (٢ × ٣) أي × ٦

$$\cancel{٦}^{٣} \times \left(\frac{\text{ص} - ٨}{\cancel{٢}} \right) = \cancel{٦}^{٢} \times -٠,٥ \left(\frac{\text{س} - ٩}{\cancel{٣}} \right) + ٦ \times ١,٥$$

٣ ص − ٢٤ = −س + ٩ + ٩

٣ص = − س + ١٨ + ٢٤

٣ص = − س + ٤٢ ⇦ بالقسمة علي ٣

ص = − ٠,٣٣٣٣٣ س + ١٤ وهي نفس النتيجة السابقة بإستخدام طريقة الإنحرافات .

٣- في تجربة لدراسة العلاقة بين متغيرين س ، ص حصلنا على ١٠ أزواج من قيم المتغيرين ثم قمنا بتبسيط تلك القيم بإستخدام سَ = س − ١٠٣ ، صَ = ص − ٩٧ لتعطينا البيانات الآتية :

مجـ سَ = −٣ ، مجـ صَ = صفر ،

مجـ سَ صَ = −٤٤٤ ، مجـ سَ٢ = ٣٤١ ،

مجـ صَ٢ = ٧٨٨ أوجد :

(أولا) معامل الارتباط الخطى بين س ،ص مبينا نوعه

(ثانيا) معادلة خط انحدار ص على س .

(ثالثا) معادلة خط انحدار س على ص .

الحل

أولا : $\text{ر}_{\text{س، ص}} = \text{ر}_{\text{سَ، صَ}}$

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ سَ صَ} - \text{مجـ سَ} \times \text{مجـ صَ}}{\sqrt{\text{ن مجـ سَ}^٢ - (\text{مجـ سَ})^٢}\ \sqrt{\text{ن مجـ صَ}^٢ - (\text{مجـ صَ})^٢}}$$

$$= \frac{١٠ \times -٤٤٤ + ٣ \times \text{صفر}}{\sqrt{١٠ \times ٣٤١ - ٩}\ \sqrt{١٠ \times ٧٨٨ - \text{صفر}}}$$

$$\text{ر} = \frac{-٤٤٤٠}{\sqrt{٣٤٠١} \times \sqrt{٧٨٨٠}} = -٠,٨٥٧$$

ثانيا : معادلة خط انحدار ص علي س

$$\text{أ} = \frac{\text{ن مجـ سَ صَ} - \text{مجـ سَ} \times \text{مجـ صَ}}{\text{ن مجـ سَ}^٢ - (\text{مجـ سَ})^٢}$$

$$= \frac{-٤٤٤٠}{٣٤٠١} = -١,٣٠٥٤٩$$

$$\overline{\text{ب}} = \frac{\text{مجـ صَ} - \text{أ مجـ سَ}}{\text{ن}} = \frac{٠ + ١,٣٠٥٤٩ \times -٣}{١٠} = -٠,٣٩١٦٥$$

صَ = أ سَ + $\overline{\text{ب}}$

صَ = − ١,٣٠٥٤٩ سَ − ٠,٣٩١٦٥

معادلة خط انحدار ص علي س

بالتعويض عن قيم سَ ، صَ

ص−٩٧ = −١,٣٠٥٤٩ (س−١٠٣) − ٠,٣٩١٦٥

ص−٩٧ = −١,٣٠٥٤٩س+ ١٣٤,٤٦٥٤٧ −٠,٣٩١٦٥

ص= −١,٣٠٥٤٩س +١٣٤,٤٦٥٤٧ −٠,٣٩١٦٥ +٩٧

ص = −١,٣٠٥٤٩ س + ٢٣١,٠٧

ثالثا : معادلة خط انحدار س علي ص

$$\text{جـ} = \frac{\text{ن مجـ سَ صَ} - \text{مجـ سَ} \times \text{مجـ صَ}}{\text{ن مجـ صَ}^٢ - (\text{مجـ صَ})^٢}$$

$$= \frac{-٤٤٤٠}{٧٨٨٠} = -٠,٥٦٣$$

$$\bar{د} = \frac{\text{مجـ س} - \text{جـ مجـ ص}}{\text{ن}} = \frac{-٣ + ٠,٥٦٣٥٤ \times \text{صفر}}{١٠} = -٠,٣$$

س = جـ ص + $\bar{د}$

س = −٠,٥٦٣٥٤ ص − ٠,٣

معادلة خط انحدار س علي ص

بالتعويض عن قيم س ، ص

س−١٠٣ = −٠,٥٦٣٥٤ (ص − ٩٧) −٠,٣

س−١٠٣=−٠,٥٦٣٥٤ ص + ٥٤,٦٦٣٣٨ −٠,٣

س = − ٠,٥٦٣٥٤ ص + ٥٤,٦٦٣٣٨ −٠,٣ +١٠٣

س= −٠,٥٦٣٥٤ ص + ١٥٧,٦٦٣٣٨

لأحظ أن :

١)معامل إنحدارص / س =معامل إنحدار ص/س = أ

٢) معامل إنحدار س / ص = معامل إنحدار س/ص =جـ

٣)معامل إنحدار ص/ س

$$\text{أ} = \frac{\text{معامل إنحدار } \bar{\text{ص}} / \bar{\text{س}} \times \text{مقام إنحراف ص}}{\text{مقام إنحراف س}}$$

$$\text{أ} = \frac{\bar{\text{أ}} \times \text{مقام إنحراف ص}}{\text{مقام إنحراف س}}$$

٤) معامل إنحدار س/ ص

$$\text{جـ} = \frac{\text{معامل إنحدار } \bar{\text{س}} / \bar{\text{ص}} \times \text{مقام إنحراف س}}{\text{مقام إنحراف ص}}$$

$$\text{جـ} = \frac{\bar{\text{جـ}} \times \text{مقام إنحراف س}}{\text{مقام إنحراف ص}}$$

٤ – فى دراسة العلاقة بين المتغير بين س ،ص حصلنا على النتائج الآتية :

ن = ٨ ، $\bar{\text{س}} = \frac{\text{س - ٤٠}}{٥}$ ، $\bar{\text{ص}} = \frac{\text{ص - ١٥}}{٣}$

، مجـ $\bar{\text{س}}$ = ٦ ، مجـ $\bar{\text{ص}}$ =١ ، مجـ $\bar{\text{س}}^٢$ = ١٢٩

، مجـ $\bar{\text{ص}}^٢$ = ٢٩ ، مجـ $\bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}$ = ٥٩ أوجد :

أولا : معامل انحدار ص على س .

ثانيا : معامل انحدار س على ص .

ثالثا : معامل الارتباط الخطى بين س ، ص .

الحل

أولا: معامل انحدار $\bar{\text{ص}}$ علي $\bar{\text{س}}$

$$\bar{\text{أ}} = \frac{\text{ن مجـ } \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}} - \text{مجـ } \bar{\text{س}} \times \text{مجـ } \bar{\text{ص}}}{\text{ن مجـ } \bar{\text{س}}^٢ - (\text{مجـ } \bar{\text{س}})^٢}$$

$$= \frac{٨ \times ٥٩ - ٦ \times ١}{٨ \times ١٢٩ - ٣٦} = \frac{٤٦٦}{٩٩٦} = ٠,٤٦٧٨٧$$

معامل انحدار ص علي س

$$\text{أ} = \frac{\bar{\text{أ}} \times \text{مقام إنحراف ص}}{\text{مقام إنحراف س}}$$

$$= \frac{٠,٤٦٧٨٧ \times ٣}{٥} = ٠,٢٨٠٧$$

ثانيا : معامل انحدار $\bar{\text{س}}$ علي $\bar{\text{ص}}$

$$\bar{\text{جـ}} = \frac{\text{ن مجـ } \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}} - \text{مجـ } \bar{\text{س}} \times \text{مجـ } \bar{\text{ص}}}{\text{ن مجـ } \bar{\text{ص}}^٢ - (\text{مجـ } \bar{\text{ص}})^٢}$$

$$= \frac{٨ \times ٥٩ - ٦ \times ١}{٨ \times ٢٩ - ١} = \frac{٤٦٦}{٢٣١} = ٢,٠١٧٣٢$$

معامل انحدار س علي ص

$$\text{جـ} = \frac{\bar{\text{جـ}} \times \text{مقام إنحراف س}}{\text{مقام إنحراف ص}}$$

$$= \frac{٢,٠١٧٣٢ \times ٥}{٣} = ٣,٣٦٢١٩$$

ثالثا : ايجاد معامل الارتباط بين س ، ص

$$\text{ر}_{\text{س ، ص}} = \text{ر}_{\bar{\text{س}} ، \bar{\text{ص}}}$$

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ } \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}} - \text{مجـ } \bar{\text{س}} \times \text{مجـ } \bar{\text{ص}}}{\sqrt{\text{ن مجـ } \bar{\text{س}}^٢ - (\text{مجـ } \bar{\text{س}})^٢}\ \sqrt{\text{ن مجـ } \bar{\text{ص}}^٢ - (\text{مجـ } \bar{\text{ص}})^٢}}$$

$$= \frac{٤٦٦}{\sqrt{٩٩٦} \times \sqrt{٢٣١}} = ٠,٩٧١٥٢$$

التمرين السابع عشر

١- البيانات التالية تبين الناتج الشهري (س) وتكلفة العمالة (ص) في أحد المصانع .

س	٩	١٥	١٢	٦	١٨
ص	٢	١٢	١٤	١٦	٦

أوجد معادلة خط انحدار الناتج الشهري علي تكلفة العمالة مستخدما طريقتي الانحرافات و الانحرافات المبسطة .

[س = -٠,٣٣٣٣٣ ص + ١٤,٢٠٥٨٩]

٢- في تجربة لدراسة العلاقة بين متغيرين س ، ص حصلنا على ١٠ أزواج من قيم المتغيرين ثم قمنا بتبسيط تلك القيم باستخدام $\text{س}'$ = س - ٧٢ ، $\text{ص}'$ = ص - ٤٠ لتعطينا البيانات الآتية :

مجـ $\text{س}'$ = -٤ ، مجـ $\text{ص}'$ = ١١ ،

مجـ $\text{س}'\text{ص}'$ = ٨٩ ، مجـ $\text{س}'^{2}$ = ٤٥٦ ،

مجـ $\text{ص}'^{2}$ = ٨٣ أوجد :

(أولا) معامل الارتباط الخطى بين س ،ص مبينا نوعه

(ثانيا) معادلة خط انحدار ص على س .

(ثالثا) معادلة خط انحدار س على ص .

[٠,٥٢٠٣٦،طردي، ص=٠,٢٠٥٥٤ س+٢٦,٣٨٢٩٢ ، س=١,٣١٧٣٥ ص + ١٧,٤٥٦٩٨]

٣- فى دراسة العلاقة بين المتغير بين س ،ص حصلنا على النتائج الآتية :

ن = ٨ ، $\bar{\text{س}} = \frac{\text{س} - ٤٠}{٥}$ ، $\bar{\text{ص}} = \frac{\text{ص} - ١٥}{٣}$

، مجـ $\bar{\text{س}}$ = ٦ ، مجـ $\bar{\text{ص}}$ =١ ، مجـ $\bar{\text{س}}^{2}$ = ١٢٩

، مجـ $\bar{\text{ص}}^{2}$ = ٢٩ ، مجـ $\bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}$ = ٥٩ أوجد :

أولا : معامل انحدار ص على س .

ثانيا : معامل انحدار س على ص .

ثالثا : معامل الارتباط الخطى بين س ، ص .

[٠,٢٨٠٧٢ ، ٣,٣٦٢١٩ ، ٠,٩٧١٥١ طردي]

تمت بحمد الله

تمت بحمد الله

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعي المعياري

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٩٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٥	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨